

Анализ терморазмеростабильности композитной сотовой панели для условий термического нагружения космического аппарата

Н.Г. Крищук¹ • В.Н. Маслей² • А.В. Масштабей¹

1 – КПИ им. Игоря Сикорского, г. Киев, Украина;

2 – ГП «Конструкторское бюро «Южное» им. М.К. Янгеля», г. Днепр, Украина

Received: 13 February 2019 / Accepted: 25 March 2019

Аннотация. Представлены результаты численного определения напряженно-деформированного состояния сотовой панели космического аппарата при термических нагрузках разной интенсивности на околоземной орбите. В качестве имитационной модели исследуемой конструкции, выбрана типовая структура композитной сотовой панели с известным типом расположения ячеек сот алюминиевого заполнителя и схем армирования слоев материала углепластиковых ленты для верхних и нижних пластин с известными термомеханическими свойствами. Для решения задач термоупругости использован метод конечных элементов в математических постановках для квазистатического термомеханического анализа. Определено распределение величин эквивалентных по Мизесу напряжений в структурных элементах сотовой панели при термических нагрузках в диапазоне температур от -80 до $+80$ °С. Найдены продольные и поперечные прогибы сотовой панели от действия термических нагрузок различной интенсивности на околоземной орбите. Установлено предельную величину температурного напора между внешними поверхностями пластин, который обеспечивает терморазмеростабильность сотовой панели космического аппарата.

Ключевые слова: композиционные материалы, многослойные углепластиковые пластины, сотовая панель, термомеханические характеристики, терморазмеростабильность, конечно-элементные аппроксимации, математическая модель, численные расчеты, напряженно-деформированное состояние

Введение

Композитные конструкции с сотовым наполнителем (сотовой панели) находят широкое применение в качестве силовых элементов панельных силовых платформ и профилированных агрегатов космических аппаратов (КА) и т.п. [1–3]. Их основные достоинства: – высокая удельная прочность и жесткость при относительно небольшой массе; – низкие коэффициенты линейного температурного расширения; – устойчивость к воздействию термических ударов; – повышенная теплопроводность; – высокая усталостная прочность [4]. Комплексу необходимых требований по терморазмеростабильности сотовых панелей КА отвечают композитные материалы (КМ) на основе современных углеродных волокон в сочетании с различными видами наполнителей. Варианты компоновки технологического исполнения пластин сотовой панели КА из слоистых лент композиционного материала [5] и конструкции ячеек сотового наполнителя из алюминиевых сплавов [6] влияют на показатели работоспособности данного типа изделий на каждом этапе их жизненного цикла [7]. Этот факт предопределяет необходимость применения расчетно-экспериментальных методов при проектировании несущей способности сотовых панелей КА [8], в том числе и анализе их терморазмеростабильности [9, 10] для условий термического нагружения при эксплуатации КА на орбите Земли [11–12].

Объект исследований

Для изготовления композиционного материала пластин сотовой панели КА в ГП «Южное» (рис.1а), используется углепластиковая лента, состоящая из матрицы высокопрочного угольного наполнителя фирмы TAIRYFIL (Англия) марки ТС 36S-12К и эпоксидной соединительной ленты марки ЭДП-69У ОСТ 92-0957. Технологически монослои пакетов композиционного материала выкладываются из лент препрега по заданной схеме армирования ($0^\circ / 90^\circ / 45^\circ / -45^\circ$) до набора необходимой толщины пластин сотовой панели с учетом припуска на механическую обработку [3, 6]. Предел кратковременной прочности однонаправленного углепластика данного типа на разрыв составляет 900 МПа. Плотность 1490 кг/м³. Физико-механические характеристики монослоя углепластика «ТС-36S-12К/ ЭДП-69У» определены экспериментальными величинами модулей

упругости для деформаций растяжения $E_X = 132000$ МПа, $E_Y = E_Z = 6500$ МПа и сдвига $G_{XY} = 2300$ МПа, $G_{YZ} = G_{XZ} = 3500$ МПа, коэффициентами Пуассона $\mu_{XY} = 0.50$, $\mu_{YZ} = \mu_{XZ} = 0.32$ и температурного линейного расширения $\alpha_X = 0.14 \times 10^{-6}$ град $^{-1}$, $\alpha_Y = \alpha_Z = 0.30 \times 10^{-6}$ град $^{-1}$.

Пластины сотованели КА жестко соединены специальным клеем с сотовым наполнителем 5056-6-23, изготовленным из алюминиевой фольги (модуль Юнга – 69ГПа, коэффициент Пуассона – 0.36, удельная плотность – 2700кг/м 3) [1, 2]. Высота сотового наполнителя – 76 мм, размер ядра шестигранной ячейки сот – 6мм, толщина стенки – 0.023 мм, для контактирующих граней – 0.046 мм (рис.1б).

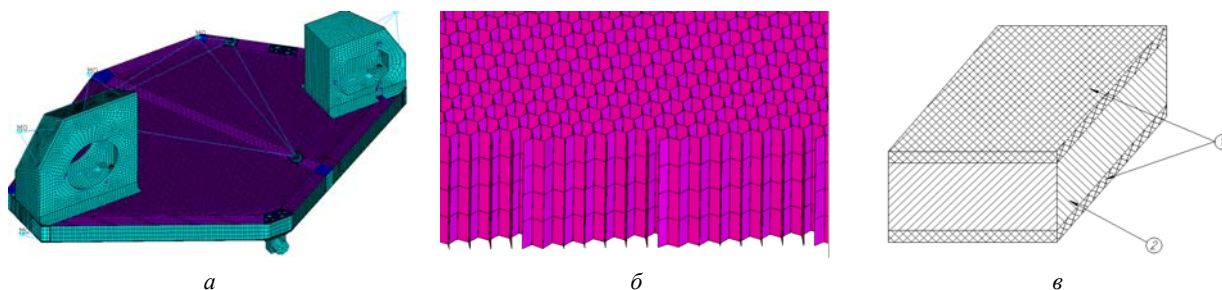


Рис. 1. Имитационные модель силовой платформы КА (а) с сотовым наполнителем (б) и прототип-аналог конструкции трехслойной сотованели прямоугольной формы с композитными пластинами (1) и сотовым (2) наполнителем (в)

Основными факторами, определяющими тепловой баланс КА, который движется на низкой околоземной орбите-это тепловые потоки: – прямого и отраженного от поверхности Земли теплового излучения Солнца; – тепловое излучение, которое выделяет Земля; – выделение тепловой энергии от работы бортовых приборов [11, 12].

Нестационарный температурный режим КА обусловлен двумя основными видами теплообмена: теплопроводностью (передачей теплоты от более нагретой части тела к менее нагретой) и излучением (переносом теплоты от нагретого тела с помощью электромагнитных волн) [13]. Температура поверхности сотованелей КА на низких околоземных орбитах может изменяться в пределах -80 °С... $+80$ °С. Поверхность КА будет охлаждаться при заходе в тень Земли и нагреваться во время нахождения непосредственно под солнечным облучением [13, 14].

Для анализа терморазмеростабильности композитной сотованели КА (рис.1а, б) выбрана имитационная модель прототипа-аналога сотованели силовой платформы КА, состоящая из двух композитных пластин соединенных ячейстым наполнителем из алюминиевой фольги (рис.1в).

Цель исследования

Имитационное моделирование термического нагружения сотованели КА и численный анализ ее терморазмеростабильности на околоземных орбитах для обеспечения их функционального применения в космосе.

Постановка задачи

Имитационная модель прототипа-аналога сотованели КА выполнена в виде трехслойной конструкции прямоугольной формы с линейными размерами 710 мм х 445 мм без технологических отверстий (рис.1в). Ее структуру по толщине обеспечивают: – верхняя и нижняя обшивка из углепластиковых пластин толщиной 0.8 мм каждая и схемой армирования ($0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ$); – сотовый наполнитель из алюминиевой фольги 5056-6-23 толщиной 76 мм.

Исходя из экспериментальных данных физико-механических характеристик монослоя углепластиковых лент определены по методике Хорошуна [15] величины эквивалентных термоупругих характеристик для 64 слойных пластин: – модулей упругости $E_X = 175000$ МПа, $E_Y = E_Z = 9610$ МПа; – модулей сдвига $G_{XY} = 24540$ МПа, $G_{YZ} = G_{XZ} = 4100$ МПа; – коэффициентов Пуассона $\mu_{XY} = 0.315$, $\mu_{YZ} = \mu_{XZ} = 0.222$; – коэффициентов температурного линейного расширения $\alpha_X = 0.142 \times 10^{-6}$ град $^{-1}$, $\alpha_Y = \alpha_Z = 0.878 \times 10^{-6}$ град $^{-1}$.

Расчетные значения эквивалентных упругих констант прототипа-аналога сотованели КА заданных размеров как упругого монослоя в осях ортотропии определены численно: – модули упругости $E_X = E_Y = 1$ МПа, $E_Z = 407$ МПа; – модули сдвига $G_{XY} = 0.00001$ МПа, $G_{YZ} = 59,65$ МПа, $G_{XZ} = 87,86$ МПа; – коэффициенты Пуассона $\mu_{XY} = 0.49$, $\mu_{YZ} = \mu_{XZ} = 0.001$; – коэффициенты температурного линейного расширения $\alpha_X = \alpha_Y = \alpha_Z = 0.125 \times 10^{-6}$ град $^{-1}$. Указанные величины механических характеристик упругого монослоя рассматриваемой сотованели из алюминиевой фольги 5056-6-23 коррелируют с данными работы [16]. Среднее значение коэффициентов теплопроводности модели сотованели КА составляло 0,073 Вт/м К [17] при температуре поверхности пластин 50 °С.

Условия физического моделирования процессов теплообмена в КА и оценки термических деформаций на этапе проектирования технически ограничены. При создании структурных элементов технических систем КА математическое моделирование теплофизических и термомеханических процессов становится определяющим и требует подтверждения результатов расчетов стендовыми испытаниями при наземной отработке [3].

Тепловые потоки, которые определяют термическую нагрузку КА на околоземной орбите Земли, обусловлены [11, 12]: – прямым солнечным излучением; – солнечным излучением, отраженным от планеты; – собственным тепловым излучением планеты; – собственным тепловым излучением систем КА.

Для численного анализа терморазмеростабильности имитационной модели сотованели КА проведено формирование расчетных схем, учитывающих при определении ее термонапряженного состояния следующие гипотезы и предположения:

1. Величины термических деформаций сотованели КА зависят от градиентов температур, обусловленных нагревом /охлаждением внешней поверхности КА при квазиустановившемся тепловом состоянии оборудования вблизи внутренней поверхности сотованели;
2. Градиенты температур по толщине сотованели КА являются доминирующими и определяют ее терморазмеростабильность;
3. Начальная температура сотованели обусловлена тепловым режимом оборудования КА (используются терморегулирующие покрытия, тепловые экраны, теплопроводники, термосопротивления, тепловые трубы) и равна $T_o \approx 30^\circ\text{C}$;
4. Торцовые поверхности сотованели КА адиабатически изолированы;
5. Для эксплуатационных режимов КА температура внешней поверхности сотованели однородна и обусловлена тепловым режимом ее нагрева и охлаждения. Амплитуда температур может изменяться в интервале от -80°C до $+80^\circ\text{C}$ для четырех расчетных вариантов (РВ): – РВ1 и РВ2, КА находится на освещенной стороне околоземной орбиты, нагрев происходит во время нахождения непосредственно под облучением Солнца и Земли; – РВ3 и РВ4: КА находится в тени Земли, охлаждение происходит в процессе облучения в тени планеты;
6. Влияние радиационного воздействия на изменение физико-механических характеристик материалов сотованели не учитывается;
7. Теплофизические и термомеханические свойства материалов сотованели КА не зависят от температуры.

Методы и алгоритмы

В основу математической модели термонапряженного состояния конструктивно-ортотропной сотованели КА в условиях термического нагружения от начальной T_o до неоднородной температуры T положено допущение о том, что деформации ε_{ij} частиц ее материалов связаны с перемещениями u_i соотношениями Коши [17]

$$\varepsilon_{ij} = (\partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j) / 2; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Термические ε_{ij}^t и упругие деформации ε_{ij}^e

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^t; \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2)$$

связаны с напряжениями σ_{mn} соотношениями Дюгамеля-Неймана, обобщенных для анизотропных материалов [17]

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijmn} \sigma_{mn} + \alpha_{ii}^T \delta_{ij} (T - T_o); \quad i, j = 1, 3; m, n = 1, 3, \quad (3)$$

где α_{ii}^T – осевые коэффициенты температурного расширения в базисе декартовых координат, δ_{ij} – символ Кронекера, $T_o \approx 30^\circ\text{C}$ – начальное распределение температуры.

Для определения температур T сотованели КА при нагреве / охлаждении используется уравнение теплового баланса [11]

$$\text{div } q = 0, \quad q_{ij} = \lambda_{ij} \delta_{ij} \text{grad}(T); \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4)$$

где q_{ij} – удельная плотность теплового потока, λ_{ij} – осевые коэффициенты теплопроводности в базисе декартовых координат. Граничные условия первого рода на внутренней S_{T1} и внешней S_{T2} поверхностях теплообмена сотованели КА априори являются известными

$$T_i \Big|_{S_{T1}} \approx 30^\circ\text{C}; \quad T_i \Big|_{S_{T2}} = [-80...+80]^\circ\text{C}. \quad (5)$$

Термонапряженное состояние сотованели КА для произвольных режимов ее нагрева удовлетворяет уравнению статического равновесия [18]

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_j = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^t, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

где ρ – плотность материала, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, F_j – объемные силы, при заданных главных граничных условиях

$$u_i \Big|_{S_{i1}} = \tilde{u}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Для исследуемых величин температурных градиентов сотованели КА ограничения по ее терморазмеростабильности сформулированы для контролируемых величин прогиба, составляющих не более 0.1 мм/м [3, 5].

Для решения связанных задач теплопроводности и термоупругости использован метод конечных элементов [19] и программная реализация численных алгоритмов выполненных в расчетном коде ANSYS 12.1 [20]. Пластины и сотовый наполнитель сотованели КА, разбивались на гексагональные двадцатиузловые конечные элементы. Неоднородные тела дискретной модели сотованели КА были связаны условиями идеального термического и жесткостного контакта по соприкасающимся поверхностям. Для получения сетчато-независимого численного решения данных задач проводился анализ точности результатов на моделях сотованели КА с различной степенью дискретизации.

Результаты численных экспериментов

Численные расчеты термомеханического состояния сотованели КА (рис. 1в) проведены на основе решения (4), (6) в ANSYS 12.1 четырех расчетных вариантов (РВ1, РВ2, РВ3, РВ4) ее термического нагружения, заданных граничными условиями (5), (7). Они выбраны для априорных величин температурного напора $\Delta T = T_2 - T_1$ между внешними чными условиями поверхностями пластин сотованели: – при нагреве КА на окоземной орбите РВ1 ($\Delta T = 10^\circ\text{C}$, $T_2 = 40^\circ\text{C}$) и РВ2 ($\Delta T = 50^\circ\text{C}$, $T_2 = 80^\circ\text{C}$); – при охлаждении КА на окоземной орбите РВ3 ($\Delta T = -10^\circ\text{C}$, $T_2 = 20^\circ\text{C}$) и РВ4 ($\Delta T = -50^\circ\text{C}$, $T_2 = -80^\circ\text{C}$).

Распределение деформаций и напряжений сотованели КА в зависимости от градиентов температур представлено на рис. 2–5.

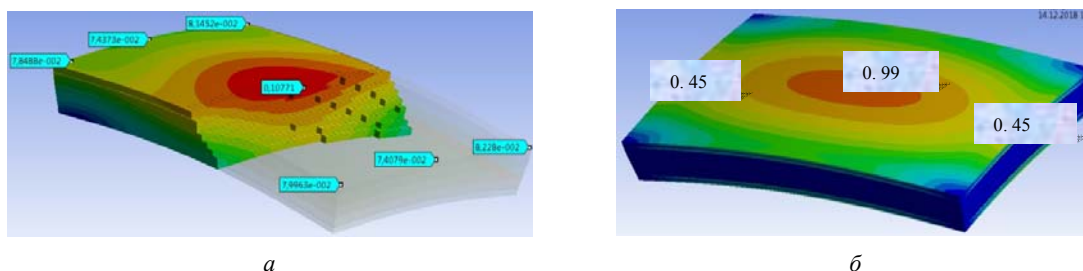


Рис. 2. Поля суммарных перемещений, $\times 10^{-3}$, м (а) и эквивалентных за Мизесом напряжений, МПа (б) сотованели КА для расчетного варианта РВ1 термического нагружения

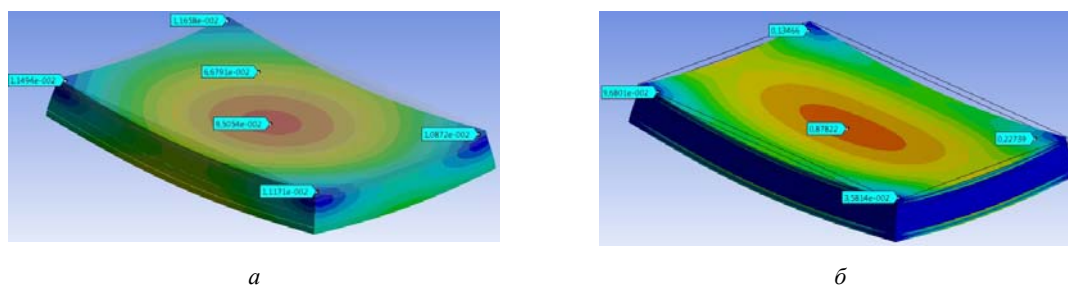


Рис. 3. Поля суммарных перемещений, $\times 10^{-3}$, м (а) и эквивалентных за Мизесом напряжений, МПа (б) сотованели КА для расчетного варианта РВ2 термического нагружения

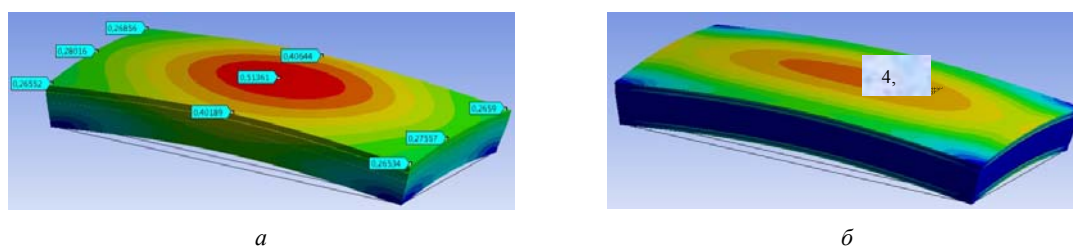


Рис. 4. Поля суммарных перемещений, $\times 10^{-3}$, м (а) и эквивалентных за Мизесом напряжений, МПа (б) сотованели КА для расчетного варианта РВ3 термического нагружения

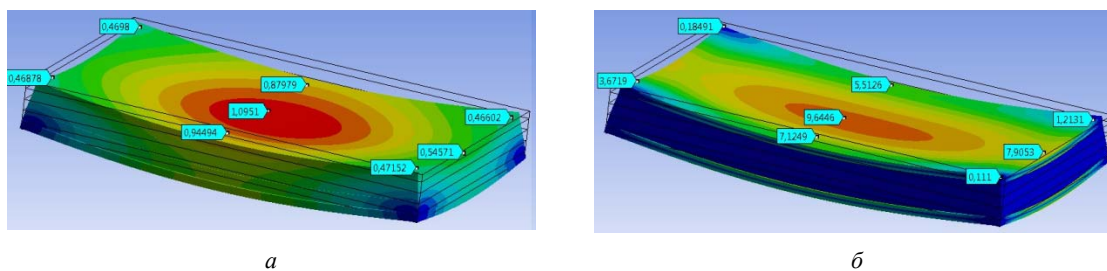


Рис. 5. Поля суммарных перемещений, $\times 10^{-3}$, м (а) и эквивалентных за Мизесом напряжений, МПа (б) сотованели КА для расчетного варианта РВ4 термического нагружения

Сравнительный анализ максимальных деформаций сотованели КА для рассмотренных выше условий термической нагрузки проведен с целью оценки ее терморазмеростабильности за вышеуказанным критерием.

Установлено, что максимальные продольные и поперечные перемещения сотованели КА составляют: – 33 мкм и 17 мкм для режима РВ1 (рис. 2а); – 85 мкм и 25 мкм для режима РВ2 (рис. 3а); – 235 мкм и 100 мкм для режима РВ3 (рис. 4а); – 640 мкм и 300 мкм для режима РВ4 (рис. 5а). Максимальные величины прогибов приведенные к геометрическим размерам сотованели КА равны 46 мкм, 56 мкм, 330 мкм, 900 мкм соответственно для режимов РВ1-РВ4, что в пересчете на погонный метр длины составляет 65 мкм, 79 мкм, 465 мкм, 1268 мкм.

Технические требования для сотованели КА по терморазмеростабильности за указанным критерием выполняются только для режимов термического нагружения РВ1 и РВ2 с температурным напором между внешними поверхностями пластин не более 10 °С.

Максимальные величины эквивалентных за Мизесом напряжений для режимов термического нагружения РВ1, РВ2 не превышают 0,99 МПа (рис. 2б, 3б) и возникают на уровне 4,95-9,64 МПа для РВ3, РВ4 (рис. 4б, 5б).

Выводы

1. Имитационная модель сотованели КА с эквивалентными жесткостными и термоупругими характеристиками армированных многослойных композитных пластин обшивки из углепластиковых лент и ячеистых структур алюминиевого заполнителя может быть эффективно применена для оценки терморазмеростабильности конструкций данного типа при термических нагружениях, возникающих на этапе эксплуатации КА.
2. Разработанная математическая модель может быть положена в основу методики инженерного расчета и оптимизации термомеханических и жесткостных характеристик сотованелей для различных режимов термического нагружения КА на околоземной орбите.
3. Терморазмеростабильность сотованели КА выполняется для режимов термического нагружения с температурным напором между внешними поверхностям углепластиковых пластин не более 10 °С.
4. Установленные в численных экспериментах величины эквивалентных за Мизесом напряжений могут быть использованы для проектирования прочностных характеристик клеевых соединений сотового заполнителя и композитных пластин.

Аналіз терморозміростабільності композитної сотованелі для умов термічного навантаження космічного апарату

М.Г. Кришук, В.М. Маслей, О.В. Масштабей

Анотація. Представлено результати чисельного визначення напружено-деформованого стану сотованелі космічного апарату при термічних навантаженнях різної інтенсивності на навколоземній орбіті. В якості імітаційної моделі досліджуваної конструкції обрана типова структура композитної сотованелі з відомим типом розташування осередків сот алюмінієвого заповнювача і схем армування шарів матеріалу з углепластикової стрічки для верхніх і нижніх пластин з відомими термомеханічними властивостями. Для вирішення задач термопружності використано метод скінченних елементів в математичних постановках для квазістатичного термомеханічного аналізу. Визначено розподіл величин еквівалентних за Мизесом напружень в структурних елементах сотованелі при термічних навантаженнях в діапазоні температур від -80°C до $+80^{\circ}\text{C}$. Знайдено повздовжні та поперечні прогини сотованелі КА від дії термічних навантажень різної інтенсивності на навколоземній орбіті. Встановлено граничну величину температурного натиску між зовнішніми поверхнями пластин, який забезпечує терморозміростабільність сотованелі космічного апарату.

Ключові слова: композиційні матеріали, багатошарові вууглепластикові пластини, сотованелі, термомеханічні характеристики, терморозміростабільність, скінченно-елементні апроксимації, математична модель, чисельні розрахунки, напружено-деформований стан.

The analysis of the thermodynamic stability of the composite honeycomb panel for the conditions of thermal loading of space apparatus

M. Kryshchuk, V. Maslyey, A. Mashtabey

Abstract. The results of the numerical determination of the stress-strain state of the composite honeycomb panel under thermal loads of varying intensity in a near-earth orbit are presented. As a simulation model of the structure under study, a typical structure of a composite cell panel with a known type of cell arrangement of honeycomb aluminum filler and reinforcement schemes for layers of carbon fiber material for upper and lower plates with known thermomechanical properties was chosen. To solve the problems of thermoelasticity, we used the finite element method in mathematical formulations for quasistatic thermomechanical analysis. The distribution of the values of von Mises equivalent stresses in the structural elements of the honeycomb panel under thermal loads in the temperature range from -80 to $+80^{\circ}\text{C}$ is determined. The longitudinal and transverse deflections of the honeycomb from the action of thermal loads of various intensities in the near-earth orbit are found. The limiting value of the temperature difference between the outer surfaces of the plates, which ensures the thermal stability of the composite honeycomb panel, has been established.

Keywords: composite materials, multilayer carbon fiber plates, honeycomb, thermomechanical characteristics, thermal stability, finite element approximations, mathematical model, numerical calculations, stress-strain state

References

1. Панин В.Ф. Конструкции с сотовым наполнителем / В.Ф. Панин. – М.: Машиностроение, 1982. – 152 с.
2. Иванов А.А. Новое поколение сотовых наполнителей для авиационно-космической техники / А.А. Иванов, С.М. Кашин, В.И. Семенов. – М.: Энергоатомиздат, 2000. – 436 с.
3. Дегтярев А.В. Применение композиционных материалов при создании перспективных образцов ракетной техники / А.В. Дегтярев, В.А. Коваленко, А.В. Потапов // Авиационно-космическая техника и технология. – 2012. – № 2(89). – С. 34 – 38.
4. Формостабильные и интеллектуальные конструкции из композиционных материалов / Г.А. Молодцов, В.Е. Биткин, В.Ф. Симонов, Ф.Ф. Урмансов. – М.: Машиностроение, 2000. – 352 с.
5. Маслей В.Н. Методы проектирования изделий из полимерных композиционных материалов / В.Н. Маслей, А.С. Кулик // Космічна наука і технологія. - 2017. – Том. 23. – №5(108). – С. 44-48.
6. Маслей В.Н. Определение динамических характеристик многослойных углепластиковых пластин конструкции сканера высокого разрешения / В.Н. Маслей, Н.Г. Кришук // Mechanics and Advanced Technologies. - 2017. - Том 80, №2. - С. 45-51. <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2017.80.109689>
7. Masley V. Development of dimensionally stable structure of drawtube of optical device made of composite material / V. Masley, A. Kulyk, A. Sanin, S. Moskal'ov, V. Kavun, A. Schudro // European Commission funded International Workshop "Materials resistant to extreme conditions for future energy systems", 12-14 June. Kyiv – Ukraine. Book of abstracts. 2017. - 72 p.
8. Maslei V. N., Krishchuk N.G., Tsybenko A.S. Analysis of harmonic vibration characteristics for a composite honeycomb panel of the spacecraft scanner. Strength of Materials July 2018, Vol. 50, no. 4, pp 655–664.
9. Маслей В.Н. Анализ терморазмеростабильной несущей конструкции прибора полезной нагрузки космического аппарата / В.Н. Маслей, А.С. Кулик // Авиационно-космическая техника и технология, Харьков, - 2017. – 5/140. – с. 31-35.
10. Биткина Е.В., Денисов А.В., Биткин В.Е. Конструктивно-технологические методы создания размеростабильных космических композитных конструкций интегрального типа // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. - 2012. Том.14. №4(2). С. 555-560.
11. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике / Под ред. В.К.Кошкина. М.: Машиностроение, 1975. - 624 с.
12. Spacecraft thermal control handbook. Ed. D.G.Gilmor. Vol. 1. Fundamental Technologies. El Segundo, California: Aerospace Press, 2002, - 836 p.
13. Лукас Дж. Теплообмен и тепловой режим космических аппаратов / под ред. Н.А. Анфимова. М.: Мир, 1974. 544 с.
14. Залетаев В.М., Капинос Ю.В. Расчет теплообмена космического аппарата. М: Машиностроение, 1971, 207с.
15. Хорошун Л.П., Маслов Б.П. Методы автоматизированного расчета физико-механических постоянных композиционных материалов. – К: Наукова думка, 1980. – 143с.
16. Рудаков К.Н. К методике определения "эквивалентных" физико-механических характеристик сотового наполнителя композиционной плиты / К.Н. Рудаков, В.Н. Маслей // Mechanics and Advanced Technologies, 2018, Том 84, №3, – с. 75-85. <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2018.84.149780>
17. Фролов Г.А., Боровик Д.В., Колотило А.Д. и другие. Исследование установки для определения тепло- и температуропроводности при моделировании некоторых факторов космического пространства. Вестник двигателестроения. – №2, С. 9-15.
18. Бабенко А.Є. Теорія пружності. Частина 1. Підручник / А. Є. Бабенко, М.І. Бобир, С.Л. Бойко, О.О. Боронко – Київ: Основа, 2009. – 244 с.
19. Bathe K.J. Numerical methods in finite element analysis / K.J. Bathe, E.L. Wilson // Prentice Hall. – 1976
20. "ANSYS Structural Analysis Guide ANSYS Release 12.1." (2009) available at : www.ansys.com/