

Теоретичні основи методу накладених сіток

В.Г. Мартиненко

Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»

Received: 14 March 2019 / Accepted: 22 March 2019

***Анотація.** Проблема коректного моделювання анізотропних властивостей композиційних матеріалів є по сьогоднішній день не до кінця розкритою. Це змушує інженерів та науковців значно спрощувати опис фізико-механічних параметрів при визначенні механічної поведінки твердих тіл, що деформуються. Особливо це проявляється для явища в'язкопружності. Внаслідок цього в програмних комплексах скінченно-елементного аналізу ці властивості моделюються спадковими функціями, які пропорціональні початковому тензору пружності, що у ряді випадків не є коректним припущенням. З метою усунення таких недоліків на базі методу скінченних елементів був запропонований метод накладених сіток, який дозволяє моделювати фізико-механічні властивості, зокрема в'язкопружні, враховуючи будь-який ступінь їхньої анізотропії. Цей метод дав можливість розв'язати цілу низку задач теорії анізотропної в'язкопружності, внаслідок чого були отримані коректні результати. В роботі наведено теоретичне обґрунтування даного методу, що засновується на розгляді функціоналу повної енергії деформованого тіла, для лінійних статичних та динамічних задач теорій пружності та в'язкопружності. Такий підхід до розгляду задачі встановив правила отримання параметрів напружено-деформованого стану тіл, що деформуються, у відповідності до особливостей методу накладених сіток та визначив можливі сценарії його застосування.*

***Ключові слова:** метод скінченних елементів, в'язкопружність, композиційний матеріал, функціонал Лагранжа*

Вступ

При моделюванні механічної поведінки композиційних елементів конструкцій і машин інженери та науковці стикаються з рядом проблем, пов'язаних із необхідністю врахування анізотропії фізичних властивостей композитів. Якщо для випадку їхньої пружної поведінки вже існує достатньо розроблений математичний апарат, про що свідчать роботи [1-4], то для більш складних властивостей, таких як пластичність, повзучість, в'язкопружність, спостерігається брак загальних методик їхнього моделювання.

Проте виникає ряд ситуацій, коли необхідність врахування загального ступеня анізотропії, наприклад, в'язкопружних властивостей потребує врахування. Так Shu та Onat в роботі [5] вперше підняли питання необхідності застосування моделі анізотропної в'язкопружності до розв'язання практичних задач та зробили постановку проблеми. Taylor зі співавторами [6] довели необхідність моделювання анізотропної в'язкопружності для біомеханічних задач. Nedjar в статті [7] представив метод для розв'язання нелінійних анізотропних в'язкопружних моделей з метою описання механічної поведінки волокнистих композитів. Lubarda та Asago в [8] застосували теорію анізотропної в'язкопружності до моделювання механіки біологічних мембран та представили розв'язок для випадку плоского напруженого стану. Santos та співавтори в [9] дослідили поширення хвиль в трансверсально ізотропних в'язкопружних тонких пластинах при розв'язанні еліптичних граничних задач, сформульованих в просторово-частотному полі із застосуванням скінченно-елементної процедури Галеркіна.

Bretin та Wahab в [10] продемонстрували застосовність функцій Гріна до розв'язання анізотропної в'язкопружної моделі матеріалу. Hwu та Chen в [11] застосували граничний метод до розгляду анізотропно в'язкопружних плоских тіл з дефектами. Bai та Tsavkin в [12] представили просторово-часовий скінченно-різницький алгоритм для моделювання трансверсально ізотропного тіла з вертикальною віссю симетрії.

Проте усі запропоновані алгоритми не можуть бути поширені для будь-якої геометричної форми об'єктів та розмірностей задачі. Для розв'язання такої проблеми в роботі [13] для програмних комплексів скінченно-елементного аналізу був запропонований спосіб врахування анізотропних в'язкопружних властивостей,

названий методом накладених сіток (МНС). Цей метод був апробований на різних розрахункових моделях [14, 15] та застосований до розв'язання реальних задач механіки композиційних матеріалів [16]. Таким чином, МНС пройшов детальну перевірку, але в той же час існує певний брак його теоретичного обґрунтування. Саме тому в даній роботі розглядаються теоретичні аспекти методу накладених сіток, які дозволять не лише застосовувати його у якості технічного інструмента, а й реалізувати замкнений алгоритм розрахунків механіки анізотропних тіл, що деформуються.

1. Передумови розробки методу накладених сіток

Полімерні армовані композиційні матеріали (ПАКМ) мають певну спрямовану схему армування, тому їхні механічні властивості залежать від напрямку навантаження, що прикладається. Результатом цього є анізотропія пружних та в'язкопружних властивостей, що виражені тензорними співвідношеннями у покомпонентному вигляді [17, 18]

$$\sigma_{ij}(t) = \int_0^t \sum_{kl} C_{ijkl}(t-\xi, T) \frac{d\varepsilon_{kl}(\xi)}{d\xi} d\xi, \quad (1)$$

де $C_{ijkl}(t, T)$ – залежні від часу та температури компоненти тензора релаксації в'язкопружного матеріалу;
 $\sigma_{ij}(t)$ – компоненти тензора напружень;
 $\varepsilon_{kl}(t)$ – компоненти тензора деформацій;
 $i, j, k, l = 1..3$.

Для ПАКМ з ортогональною структурою армування в'язкопружні властивості є ортотропними. Тоді фізичні співвідношення (1) в нотації Фойгта набудуть наступного вигляду

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}(t) \\ \sigma_{22}(t) \\ \sigma_{33}(t) \\ \sigma_{23}(t) \\ \sigma_{13}(t) \\ \sigma_{12}(t) \end{Bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{11}(\xi)/d\xi \\ d\varepsilon_{22}(\xi)/d\xi \\ d\varepsilon_{33}(\xi)/d\xi \\ d\varepsilon_{23}(\xi)/d\xi \\ d\varepsilon_{13}(\xi)/d\xi \\ d\varepsilon_{12}(\xi)/d\xi \end{Bmatrix} d\xi. \quad (2)$$

Для полімерного матеріалу, який можна найчастіше вважати ізотропним, співвідношення (2) спрощується таким чином, що у тензорі релаксації залишається тільки 2 невідомих компоненти. Тоді можливо виділити шарову та девіаторну частини тензора релаксації, що є дуже корисним, оскільки для полімерних матеріалів характерна в'язкість саме формозмінної (девіаторної) частини при збереженні об'ємної (шарової) частини відносно постійною за часом [19]. Тоді тензорний вигляд таких співвідношень записується наступним чином

$$\hat{\sigma}(t) = \int_0^t 2\hat{G}(t-\xi) \frac{d\hat{\varepsilon}(\xi)}{d\xi} d\xi + \hat{I} \int_0^t K(t-\xi) \frac{d\Delta(\xi)}{d\xi} d\xi, \quad (3)$$

де $\hat{\sigma}(t)$ – тензор напружень другого рангу;

$\hat{G}(t)$, $K(t)$ – зсувна та об'ємна частини тензора релаксації, залежні зазвичай і від температури;

$\hat{\varepsilon}(t)$, $\Delta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ та \hat{I} – девіаторна та шарова деформації та одиничний тензор відповідно, що записуються в формі

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \Delta & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \Delta & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \Delta \end{bmatrix}; \quad \hat{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Варто відмітити, що часто співвідношення (3) приймаються за базові й для випадків анізотропних матеріалів, оскільки наразі не існує універсального алгоритму розв'язання задачі анізотропної в'язкопружності із визначальними співвідношеннями (2).

З іншого боку, враховуючи можливість представлення модуля релаксації за допомогою експоненціального ряду Проні, його залежність від часу можна узагальнити для компонент тензора релаксації фізичних співвідношень (1) у тривимірному випадку

$$C_{ijkl}(t) = C_{ijkl} + \sum_m \mu_{ijkl}^m \exp\left(-\frac{t}{\tau_{ijkl}^m}\right), \quad (5)$$

де C_{ijkl} – коефіцієнти пружного тензора жорсткості;

m – число членів рядів Проні;

μ_{ijkl}^m – коефіцієнти в'язкості при членах рядів Проні;

τ_{ijkl}^m – часи релаксації в членах рядів Проні.

З використанням відомого способу переформатування фізичного співвідношення (1), представленого у [20], воно може еквівалентно представлено у формі

$$\sigma_{ij}(t) = \sum_{kl} \{C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(t) - \int_0^t \sum_m [k_{ijkl}^m \exp(-\frac{t-\xi}{\tau_{ijkl}^m})] \varepsilon_{kl}(\xi) d\xi\}, \quad (6)$$

де $k_{ijkl}^m = \frac{\mu_{ijkl}^m}{\tau_{ijkl}^m}$ – узагальнені коефіцієнти в'язкості при членах рядів Проні (сумування у діленні не передбачається).

Й нарешті отримаємо

$$\sigma_{ij}(t) = \sum_{kl} C_{ijkl} \{ \varepsilon_{kl}(t) - \int_0^t \sum_m [a_{ijkl}^m \exp(-\frac{t-\xi}{\tau_{ijkl}^m})] \varepsilon_{kl}(\xi) d\xi \}, \quad (7)$$

де $a_{ijkl}^m = \frac{k_{ijkl}^m}{C_{ijkl}}$ – множники при членах рядів Проні (сумування у діленні не передбачається).

Окрім того, температурна залежність в'язкопружного матеріалу для тривимірного випадку може бути також узагальнена для компонентів тензора релаксації

$$C_{ijkl}(t, (T_{ref})_{ijkl}) = C_{ijkl}((\alpha_T)_{ijkl} t, T), \quad (8)$$

де $(T_{ref})_{ijkl}$ – відносні температури, у загальному випадку різні для різних напрямків;
 $(\alpha_T)_{ijkl}$ – зсувні функції, у загальному випадку різного вигляду або із різними коефіцієнтами для різних напрямків.

Якщо розглянути матеріал, в якому в'язкопружні властивості пропорційні пружним, то деякі коефіцієнти з співвідношень (7) та (8) спростяться

$$\begin{cases} a_{ijkl}^m = a_m; \\ \tau_{ijkl}^m = \tau_m; \\ (T_{ref})_{ijkl} = T_{ref}; \\ (\alpha_T)_{ijkl} = \alpha_T. \end{cases} \quad (9)$$

Як вже було відмічено раніше, для випадку ізотропного в'язкопружного матеріалу фізичні співвідношення у тензорній формі мають вигляд (3).

Зсувна та об'ємна частини тензорів релаксації в (3) також представляються рядами Проні

$$\begin{cases} \hat{G}(t) = \hat{G}_0 [a_\infty^G + \sum_{n_G} a_{n_G}^G \exp(-\frac{t}{\tau_{n_G}^G})]; \\ K(t) = K_0 [a_\infty^K + \sum_{n_K} a_{n_K}^K \exp(-\frac{t}{\tau_{n_K}^K})], \end{cases} \quad (10)$$

де \hat{G}_0 – пружний зсувний тензор;

K_0 – пружний об'ємний модуль;

n_G, n_K – індекси сумування, що відповідають числу членів рядів Проні;

$a_{n_G}^G, a_{n_K}^K, a_\infty^G, a_\infty^K$ – множники при членах рядів Проні;

$\tau_{n_G}^G, \tau_{n_K}^K$ – часи релаксації.

Така форма завдання в'язкопружних властивостей дійсна й для **ANSYS® Mechanical** [21]. Але не дивлячись на той факт, що в'язкопружні властивості матеріалу в цьому програмному продукті є ізотропними, пружні характеристики все одно можуть задаватись анізотропними. Ця ситуація відповідає випадку співвідношень (7), що враховують спрощення (9) та розглядають компоненти C_{ijkl} у якості компонентів пружного тензору жорсткості із залежностями від технічних пружних констант, які є типовими для ортотропного матеріалу. Таким чином **ANSYS® Mechanical** не надає можливостей врахування загального випадку анізотропії в'язкопружності, що стало причиною розробки на базі методу скінченних елементів засобу, що дозволяв би враховувати такий ефект.

2. Сутність методу накладених сіток

Представимо реологічну модель в'язкопружного матеріалу в одновимірному випадку у вигляді узагальненої моделі Максвелла, як це показано у синьому прямокутнику на рис. 1, а. Якщо паралельно скомбінувати таку модель із аналогом пружної моделі, позначеним зеленою лінією, отримаємо нову комбіновану реологічну модель.

В цій моделі два пружні елементи із жорсткостями K та k_e можуть бути еквівалентно замінені одним пружним елементом із жорсткістю $K_e = K + k_e$.

За аналогією із таким комбінуванням реологічних моделей для методу скінченних елементів був запропонований метод накладених сіток. Він полягає в тому, що в одному і тому ж місці створюються два ідентичних об'єми. Далі вони послідовно розбиваються скінченно-елементними сітками – кожен об'єм зі своїми властивостями. Оскільки алгоритм побудови скінченно-елементної (СЕ) сітки однаково діє для ідентичних об'ємів із однаковими налаштуваннями скінченно-елементного розбиття, то вузли та елементи обох сіток просторово співпадають один з одним. На наступному кроці потрібно об'єднати всі вузли. Таким чином, отримані вузли відповідають двом групам елементів одночасно, їхня кількість після злиття стає вдвічі меншою, а кількість елементів залишається незмінною. Враховуючи це, об'єднана скінченно-елементна модель буде деформуватись спільно, а кожний із шарів СЕ сіток буде вносити власний вклад у енергетичний потенціал. Це означає, що елементи кожної групи матеріалу будуть знаходитись в індивідуальному напруженому стані в одному і тому ж полі переміщення. Отримане внаслідок цього тензорне поле напружень в моделі є сумою тензорів напружень для кожної групи елементів. Схематично методика показана на рис. 1, б.

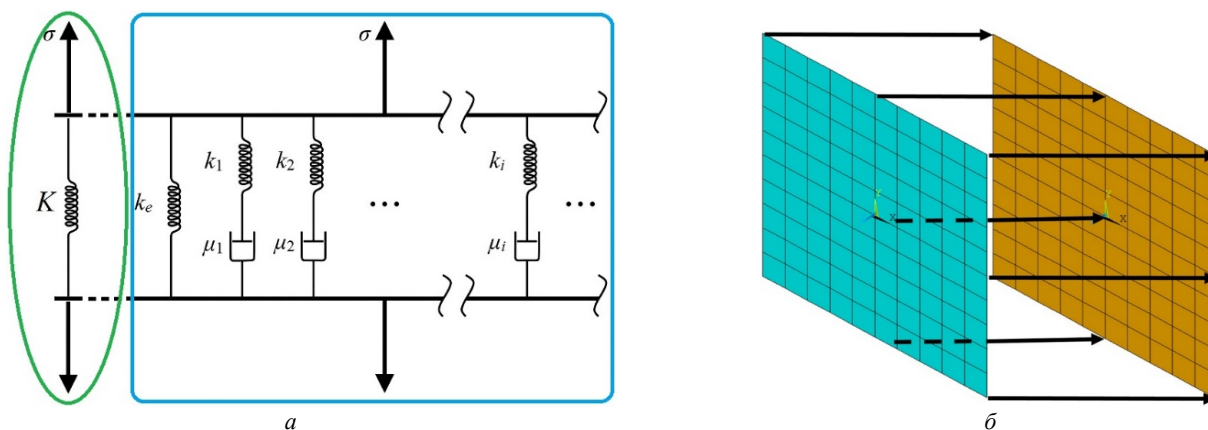


Рис. 1. Ілюстрація методу накладених сіток: а – комбінована реологічна модель; б – злиття співпадаючих сіток

Методика була побудована за допомогою програмного комплексу скінченно-елементного аналізу ANSYS® Academic Research Mechanical, Release 17.2 [21], який був спеціально розроблений для проведення скінченно-елементних аналізів механіки твердого тіла, що деформується, [22] та безкоштовно поширюється компанією ANSYS, Inc. за допомогою мережі Інтернет на їхньому офіційному сайті [23] із обговореними умовами використання цього продукту та посилань на його правовласників [24]. Варто відмітити, що актуальна версія продукту ANSYS® Academic Research Mechanical може змінюватись при створенні його авторами нової версії.

3. Формулювання методу накладених сіток для задачі пружності

В даному розділі буде зроблене теоретичне обґрунтування МНС для лінійної статичної задачі пружності, що потім може бути узагальнено для інших явищ механіки анізотропного твердого тіла, що деформується.

Нехай геометричні співвідношення у тривимірному евклідовому просторі із координатами x_1, x_2, x_3 будуть записані у вигляді

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u}, \quad (11)$$

де $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор деформацій із компонентами, ідентичними компонентам вектору деформацій в (2);

\mathbf{u} – вектор переміщень;

\mathbf{D} – матриця диференціальних операторів із коефіцієнтами, що забезпечують виконання співвідношень Коши.

Фізичні співвідношення для випадку лінійного пружного тіла спрощуються до вигляду

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (12)$$

де $\boldsymbol{\sigma}$ – вектор напружень із компонентами, ідентичними компонентам вектору напружень в (2);

\mathbf{C} – матриця пружності із компонентами, ідентичними компонентам пружного тензору жорсткості в співвідношенні (5).

Тоді функціонал Лагранжа для тривимірного пружного тіла запишеться наступним чином

$$W = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D}) \mathbf{u} dV - \int_V \mathbf{f}^T \mathbf{u} dV - \int_{S_u} \mathbf{p}^T \mathbf{u} dS, \quad (13)$$

де W – потенціальна енергія пружної деформації;

V – об'єм, що займається пружним тілом;

S_u – частина зовнішньої поверхні тіла, на якій відсутні деформації;

\mathbf{f} – вектор об’ємних навантажень;

\mathbf{p} – вектор поверхневих навантажень.

Відомо, що для знаходження дійсного напружено-деформованого стану тіла цей функціонал треба мінімізувати. Саме на подібній процедурі мінімізації засновуються сучасні скінченно-елементні програмні комплекси [25].

Згідно з процедурою дискретизації вектор переміщень представляється у вигляді лінійної суперпозиції добутку вузлових переміщень скінченно-елементної моделі та ортогональних між собою функцій форм

$$\mathbf{u} = \mathbf{n}\mathbf{U}, \quad (14)$$

де \mathbf{n} – вектор функцій форм;

\mathbf{U} – матриця вузлових переміщень.

Застосовуючи проекцію (14) до функціонала (13) отримуємо

$$W = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{U}^T (\mathbf{n}^T \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{n}) \mathbf{U} dV - \int_V (\mathbf{f}^T \mathbf{n}) \mathbf{U} dV - \int_{S_u} (\mathbf{p}^T \mathbf{n}) \mathbf{U} dS. \quad (15)$$

Розглянемо M скінченно-елементних сіток, кожній з яких відповідає свій функціонал енергії пружної деформації

$$W_m = \int_{V_m} \frac{1}{2} \mathbf{U}_m^T (\mathbf{n}^T \mathbf{D}^T \mathbf{C}_m \mathbf{D} \mathbf{n}) \mathbf{U}_m dV_m - \int_{V_m} (\mathbf{f}_m^T \mathbf{n}) \mathbf{U}_m dV - \int_{S_{u_m}} (\mathbf{p}_m^T \mathbf{n}) \mathbf{U}_m dS, \quad (16)$$

де $m = 1..M$;

V_m – об’єм тіла, що відповідає m -ій скінченно-елементній сітці;

S_{u_m} – частина зовнішньої поверхні відповідного m -ій скінченно-елементній сітці тіла, на якій відсутні деформації;

W_m – потенціальна енергія пружної деформації m -ої скінченно-елементної сітки;

\mathbf{U}_m – матриця вузлових переміщень m -ої скінченно-елементної сітки;

\mathbf{f}_m – вектор об’ємних навантажень m -ої скінченно-елементної сітки;

\mathbf{p}_m – вектор поверхневих навантажень m -ої скінченно-елементної сітки;

\mathbf{C}_m – матриця пружності m -ої скінченно-елементної сітки.

Нехай M відповідає кількості значущих компонентів в матриці жорсткості \mathbf{C} . Запишемо матриці \mathbf{C}_m за наступними правилами

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} C_{1111} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & C_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (17)$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \dots \quad \mathbf{C}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що, по-перше, такі матриці із урахуванням додатності їхніх компонентів є додатньо визначеними та, по-друге, для них виконується правило

$$\sum_{m=1}^M \mathbf{C}_m = \mathbf{C}. \quad (18)$$

Прийmemo тепер, що усі M скінченно-елементних сіток займають один і то же об’єм, обмежений однією й тією ж поверхнею, що є аналогом побудови таких сіток на базі одного об’єму в програмному комплексі скінченно-елементного аналізу. Це призведе до спрощень в системі (16), а саме

$$V_m = V; S_{u_m} = S_u. \quad (19)$$

Якщо сформулювати вимогу, щоби вузлові переміщення усіх скінченно-елементних сіток були рівними, що є аналогом злиття вузлів сіток в програмному комплексі скінченно-елементного аналізу, то це запишеться в наступному вигляді

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2 = \dots = \mathbf{U}_m = \dots = \mathbf{U}_M = \mathbf{U}. \quad (20)$$

Просумуємо усі вирази в системі (16), враховуючи вимоги (19) та (20)

$$\sum_{m=1}^M W_m = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{U}^T (\mathbf{n}^T \mathbf{D}^T \{ \sum_{m=1}^M \mathbf{C}_m \} \mathbf{D} \mathbf{n}) \mathbf{U} dV - \int_V (\{ \sum_{m=1}^M \mathbf{f}_m^T \} \mathbf{n}) \mathbf{U} dV - \int_{S_u} (\{ \sum_{m=1}^M \mathbf{p}_m^T \} \mathbf{n}) \mathbf{U} dS. \quad (21)$$

Беручи до уваги правило (18) та приймаючи, що

$$\sum_{m=1}^M \mathbf{f}_m = \mathbf{f}; \quad \sum_{m=1}^M \mathbf{p}_m = \mathbf{p}, \quad (22)$$

приходимо до виразу

$$\sum_{m=1}^M W_m = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{U}^T (\mathbf{n}^T \mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{n}) \mathbf{U} dV - \int_V (\mathbf{f}^T \mathbf{n}) \mathbf{U} dV - \int_{S_u} (\mathbf{p}^T \mathbf{n}) \mathbf{U} dS, \quad (23)$$

а порівнюючи його із формулою (15) отримаємо

$$\sum_{m=1}^M W_m = W. \quad (24)$$

Ця рівність означає, що сума потенціальних енергій усіх скінченно-елементних сіток із злитими вузлами та фізичними властивостями, описаними матрицями \mathbf{C}_m , є еквівалентною енергії однієї скінченно-елементної сітки із фізичними властивостями, описаними матрицею \mathbf{C} . Таким чином, мінімізація енергії тіла, що відображене комбінованою скінченно-елементною моделлю, також є еквівалентною мінімізації енергії тіла, що відображене однією скінченно-елементною сіткою.

Згідно із геометричними співвідношеннями (11) деформації кожної скінченно-елементної сітки ідентичні та визначаються спільними переміщеннями, тобто $\boldsymbol{\varepsilon}_m = \boldsymbol{\varepsilon}$, а напруження за фізичними співвідношеннями визначаються наступним чином

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \mathbf{C}_m \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (25)$$

Просумуємо усі вирази в системі (25)

$$\sum_{m=1}^M \boldsymbol{\sigma}_m = \{ \sum_{m=1}^M \mathbf{C}_m \} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (26)$$

Порівнюючи дане співвідношення із співвідношеннями (18) та (12) отримаємо

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{m=1}^M \boldsymbol{\sigma}_m. \quad (27)$$

Таким чином, сума напружених станів у всіх комбінованих скінченно-елементних сітках еквівалентна напруженому стану в єдиній скінченно-елементній сітці, а виходячи з (22) результуючі поверхневі та об'ємні навантаження також визначаються сумою таких навантажень на кожну зі скінченно-елементних сіток.

4. Формулювання методу накладених сіток для нестационарних задач

Функціонал повної енергії пружного тіла із врахуванням сил інерції та сил внутрішньої дисипації запишеться у вигляді

$$W = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{u}^T (\mathbf{D}^T \mathbf{C} \mathbf{D}) \mathbf{u} dV - \int_V \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} dV - \int_V \mathbf{f}^T \mathbf{u} dV - \int_{S_u} \mathbf{p}^T \mathbf{u} dS, \quad (28)$$

де $\mathbf{M} = \rho \mathbf{I}$ – матриця щільності;

$\mathbf{B} = b \mathbf{I}$ – матриця дисипації;

\mathbf{I} – одинична матриця;

ρ – щільність;

b – коефіцієнт дисипації;

$\dot{\mathbf{u}}$ – вектор швидкостей;

$\ddot{\mathbf{u}}$ – вектор прискорень.

Нескладно продемонструвати, що для членів, які відповідають інерційним та дисипативним силам, можливо провести ті ж розсуди, що й для члену, який відповідає пружним силам.

Тоді результуючі матриці щільності та дисипації для комбінованої скінченно-елементної моделі запишуться як сума аналогічних матриць кожної сітки моделі

$$\sum_{m=1}^M \mathbf{M}_m = \mathbf{M}, \quad \sum_{m=1}^M \mathbf{B}_m = \mathbf{B}. \quad (29)$$

У випадку лінійної в'язкопружної поведінки матеріалу залежність (12) за аналогією зі співвідношенням (1) запишеться у вигляді

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^t \mathbf{C}(t-\xi) \frac{d}{d\xi} \boldsymbol{\varepsilon} d\xi. \quad (30)$$

Порівнюючи вирази (13) та (30), можна записати потенціальну енергію в'язкопружного тіла у наступному вигляді

$$W = \int_V \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{D}^T \int_0^t \mathbf{C}(t - \xi) \mathbf{D} \frac{d}{d\xi} \mathbf{u} d\xi dV - \int_f \mathbf{f}^T \mathbf{u} dV - \int_{S_u} \mathbf{p}^T \mathbf{u} dS. \quad (31)$$

Інтегральна залежність в даному співвідношенні призводить до необхідності чисельного розв'язання інтегрального рівняння у вигляді ітеративної процедури. На кожній ітерації розв'язується задача, що аналогічна звичайній статичній задачі, але із матрицею \mathbf{C} , що відповідає конкретному моменту часу.

Очевидно, що таке ускладнення не може вплинути на можливість сумування матриць релаксації матеріалів в комбінованій скінченно-елементній моделі, тобто не порушить правила (18), яке в даному випадку буде виглядати наступним чином

$$\sum_{m=1}^M \mathbf{C}_m(t) = \mathbf{C}(t). \quad (32)$$

Як витікає з цього, МНС є теоретично обґрунтованим для розв'язання задач теорії в'язкопружності.

5. Обговорення результатів та їхнього застосування

Отримані в роботі результати свідчать про теоретичну обґрунтованість методу накладених сіток та дозволяють з певністю застосовувати його до розв'язання лінійних стаціонарних та нестаціонарних задач механіки твердого анізотропного тіла, що деформується.

Найбільш доречним є використання МНС до розв'язання нестаціонарних задач теорій в'язкопружності та повзучості, в яких ступінь анізотропії спадкових властивостей матеріалу ніяким чином не залежить від ступеня анізотропії пружних властивостей, що спричиняє складність розв'язання задачі та призводить до використання припущень, які не завжди є обґрунтовані фізично.

Окрім того, не виключено, що можливо розвивати дану технологію для зменшення розрахункового часу при розв'язанні задач механіки анізотропних тіл навіть при вже існуючих універсальних алгоритмах.

Запропонований МНС може бути реалізований як на етапі користувацького інтерфейсу, так й інтегрований у скінченно-елементний алгоритм, що спростить його використання в інженерній практиці. Підтвердженням цього виступає наведене в роботі обґрунтування.

Варто, однак, відмітити, що наведена схема стосується лінійних задач механіки твердого тіла, що деформується. Для застосування методу накладених сіток до розв'язання нелінійних задач потребується його додаткова модифікація та обґрунтування.

Висновки

Метод накладених сіток, що початково був побудований для програмних комплексів скінченно-елементного аналізу з метою розширення їхніх можливостей при моделюванні анізотропної в'язкопружності матеріалів, є не тільки практично, а й теоретично обґрунтованим.

Це дозволяє говорити про нього як про модернізацію методу скінченних елементів, яка у деяких випадках значно спрощує алгоритми розв'язання скінченно-елементної задачі, в особливості у випадках, коли треба задати матрицю релаксації в'язкопружного або повзучого матеріалу таким чином, щоби кожна з її компонент, виражена спадковою функцією, була у загальному вигляді незалежною від інших.

Таким чином, доведена наукова новизна та практична цінність цього методу, які можуть бути розширені при його застосуванні до моделювання інших фізико-механічних властивостей матеріалів при проведенні скінченно-елементних розрахунків.

Теоретические основы метода наложенных сеток

В.Г. Мартыненко

Аннотация. Проблема корректного моделирования анизотропных свойств композиционных материалов является по сегодняшний день не до конца раскрытой. Это заставляет инженеров и ученых значительно упрощать описание физико-механических параметров при определении механического поведения твердых деформируемых тел. Особенно это проявляется для явления вязкоупругости. В результате в программных комплексах конечно-элементного анализа эти свойства моделируются наследственными функциями, которые пропорциональны начальному тензору упругости, что в ряде случаев не является корректным предположением. С целью устранения таких недостатков на базе метода конечных элементов был предложен метод наложенных сеток, который позволяет моделировать физико-механические свойства, в частности вязкоупругие, учитывая любую степень их анизотропии. Этот метод дал возможность решить целый ряд задач теории анизотропной вязкоупругости, в результате чего были получены корректные результаты. В работе приведено теоретическое обоснование данного метода, которое основывается на рассмотрении функционала полной энергии деформированного тела, для линейных статических и динамических задач теорий упругости и вязкоупругости. Такой подход к рассмотрению задачи установил правила получения параметров напряженно-деформированного состояния деформируемых тел в соответствии с особенностями метода наложенных сеток и определил возможные сценарии его применения.

Ключевые слова: метод конечных элементов, вязкоупругость, композиционный материал, функционал Лагранжа

Theoretical Foundations of the Method of Superimposed Meshes

V.G. Martynenko

Abstract. *The problem of correct modeling of anisotropic properties of composite materials is not fully covered at the moment. This forces engineers and scientists to significantly simplify a description of physical and mechanical parameters when determining a mechanical behavior of solid deformable bodies, especially in case of the viscoelasticity phenomenon. As a result, commercial finite-element codes model these properties using hereditary functions that are proportional to the initial elasticity tensor, which in some cases is not a valid assumption. The proposed method of superimposed meshes eliminates such disadvantages. It allows to model physical and mechanical properties, in particular viscoelastic ones, taking into account any degree of their anisotropy. This method made it possible to solve a number of problems of the anisotropic viscoelasticity theory, which gave correct results. A theoretical substantiation of this method considers the total energy functional of a deformed body for linear static and dynamic problems of elasticity and viscoelasticity theories. Such an approach to a problem consideration established the rules for obtaining the parameters of the stress-strain state of deformable bodies in accordance with the features of the method of superimposed meshes and identified possible scenarios for its application.*

Keywords: *finite-element method, viscoelasticity, composite material, Lagrangian functional*

References

1. Карпинос Д.М. Композиционные материалы. Справочник. / Д.М. Карпинос. – К.: Наукова думка, 1985. – 588 с.
2. Lubin G. Handbook of Composites / G. Lubin. – Springer US, 1982. – 778 p.
3. Peters S.T. Handbook of composites / S.T. Peters. – Cambridge: Champan & Hall, 1998. – 1118 p.
4. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis / J.N. Reddy. – CRC Press, 2004. – 831 p.
5. Shu L.S. On anisotropic linear viscoelastic solids / L.S. Shu, E.T. Onat // Proc. Fourth Symp. Nav. Struct. Mech. –1967. – P. 203-215.
6. Taylor Z.A. On modelling of anisotropic viscoelasticity for soft tissue simulation: Numerical solution and GPU execution / Z.A. Taylor, O. Comas, M. Cheng et. al. // Med. Image Anal. – Vol. 13. – 2009. – P. 234-244, doi:10.1016/j.media.2008.10.001
7. Nedjar B. An anisotropic viscoelastic fibre-matrix model at finite strains: Continuum formulation and computational aspects / B. Nedjar // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – Vol. 196. – 2007. – P. 1745-1756. DOI: 10.1016/j.cma.2006.09.009
8. Lubarda V. Viscoelastic response of anisotropic biological membranes. Part II: Constitutive models / V. Lubarda, R. Asaro // Theor. Appl. Mech. – Vol. 41. – 2014. – P. 213-231. DOI: 10.2298/TAM1403213L
9. Santos J.E. Viscoelastic-stiffness tensor of anisotropic media from oscillatory numerical experiments / J.E. Santos, J.M. Carcione, S. Picotti // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – Vol. 200. – 2011. – p. 896–904, <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.11.008>
10. Bretin E. Some anisotropic viscoelastic Green functions / E. Bretin, A. Wahab // Contemp. Math. – Vol. 548. – 2011. – P. 129–148.
11. Hwu C. Analysis of defects in viscoelastic solids by a transformed boundary element method / C. Hwu, Y.C. Chen // Procedia Eng. – Vol. 10 – 2011. – P. 3038–3043.
12. Bai T. Time-domain finite-difference modeling for attenuative anisotropic media / T. Bai, I. Tsvankin // Geophysics. – Vol. 81. – 2016. – P. 163-176.
13. Martynenko V.G. An original technique for modeling of anisotropic viscoelasticity of orthotropic materials in finite element codes applied to the mechanics of plates and shells / V.G. Martynenko // Mechanics and Mechanical Engineering. – Vol. 21, No. 2. – P. 389-413.
14. Мартиненко В.Г. Метод моделювання анізотропних в'язкопружних властивостей композиційних елементів машин / В.Г. Мартиненко, Г.І. Львов // XII Міжнародна науково-практична конференція магістрантів та аспірантів Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»: тези доповідей у 3-х частинах, м. Харків, 17-20 квітня 2018 р. – Ч. 3 – Харків: НТУ «ХПІ», 2018. – С. 188-189.
15. Мартиненко В.Г. Застосування методу накладених сіток до розв'язання задач анізотропної в'язкопружності / В.Г. Мартиненко // Актуальні проблеми інженерної механіки: тези доповідей V міжнародної науково-практичної конференції, м. Одеса, 22-25 травня 2018 р. – Одеса: ОДАБА, 2018. – С. 156-158.
16. Мартиненко В.Г. Розробка методів розрахунку елементів конструкцій із в'язкопружних композиційних матеріалів : дис. канд. техн. наук : 05.02.09 / Мартиненко В.Г. – Харків, 2018. – 196 с.
17. Ferry J.D. Viscoelastic properties of polymers / J.D. Ferry. – John Wiley & Sons, 1980. – 641 p.
18. Christensen R.M. Theory of viscoelasticity. An introduction / R.M. Christensen. – New York: Academic Press, 2006. – 357 p.
19. Roylance D. Engineering viscoelasticity / D. Roylance. – Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2001. – 37 p.
20. Imaoka S. Analyzing viscoelastic materials / S. Imaoka // ANSYS Advantage. – Vol. 2, No. 4. – 2008. – P. 46-47.
21. ANSYS® Academic Research Mechanical, Release 17.2, Help System, Structural Analysis Guide, ANSYS, Inc.
22. ANSYS® Academic [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://www.ansys.com/academic>.
23. ANSYS® Free Student Product Downloads [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://www.ansys.com/academic/free-student-products>.
24. ANSYS® Academic Terms and Conditions [Електронний ресурс] – Режим доступу до ресурсу: <https://www.ansys.com/en-in/academic/terms-and-conditions>.
25. Sabonnadiere J.-K. Finite-element method in CAD / J.-K. Sabonnadiere, J.-L. Coulomb. – New York: Springer-Verlag, 1987 – 193 p.