УДК 532.54.013.2

Гнатів[1] Р.М., к.т.н., доц., Яхно[2] О.М., д.т.н., проф.
1-НУ «Львівська політехніка», м. Львів, Україна
2-НТУУ «Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна

ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ ПРИ РОЗВЯЗКУ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ РУХУ РІДИНИ В ТРУБАХ

Hnativ[1] R., Yakhno[2] O.
1- National University «Politechnika Lwowska», Lwów, Ukraina
2- National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine

VARIATIONAL PRINCIPLES IN THE SOLUTION OF UNSTEADY PROBLEMS OF FLUID MOTION IN PIPES

Проведено аналіз наукових робіт про нестаціонарний рух рідини. Сформульовано загальний варіаційний принцип для розв'язку задач неусталеної осесиметричної течії стисливої рідини в трубах. В роботі використано варіаційний принцип для лінеарилізованих рівнянь Нав'є-Стокса в циліндричних координатах. Він відрізняється від відомих варіаційних принципів тим, що застосовується у випадку, коли граничні умови на торцях задані в напруженнях.
Запропоновано залежності, що враховують внутрішній розподіл енергії потоку та вплив інерційного напору за неусталеної течії реальної рідини в циліндричному трубопроводі.
Ключові слова: неусталений; нестаціонарний; рух рідини; структура потоку; варіаційний принцип.

Вступ

Варіаційні принципи в прикладній механіці і гідродинаміці мають різноманітне застосування. Вони разом з прямими методами і методом кінцевих елементів є засобом чисельного розв'язку задач. В той же час вони можуть бути застосовані і для отримання деяких загальних теоретичних результатів.

Варіаційні принципи для лінійних початково-крайових задач спочатку були сформульовані для рівнянь теорії пружності і хвильового рівняння [1-4]. Принципово новим при цьому є той факт, що відповідні функціонали виражаються через інтеграли-згортки по часу. Для рівнянь гідродинаміки варіаційні принципи для початково-крайових задач вивели порівняно недавно. В роботі [5] розглянуті варіаційні принципи для нестисливої рідини, а в роботі [6] – для в'язкого теплопровідного газу.

Мета

Удосконалення методики розрахунку структур неусталених потоків рідини в круглих трубопроводах.

Дослідження

У роботі сформульований загальний варіаційний принцип для однієї часткової задачі гідродинаміки, а саме, для нестаціонарної осесиметричної течії стисливої в'язкої рідини в трубах. Спочатку цей варіаційний принцип застосовується для виведення спрощеної математичної моделі. Для цього, використовуючи метод збурень із відповідного функціоналу, виводиться спрощений функціонал. Із нього отримують диференціальні рівняння, початкові і граничні умови даної моделі. Використовуючи два функціонали можна вивести загальні закони взаємності для точної і спрощеної моделі.

В роботі використано варіаційний принцип для лінеарилізованих рівнянь Нав'є-Стокса в циліндричних координатах. Він відрізняється від відомих варіаційних принципів тим, що застосовується у випадку, коли граничні умови на торцях задані в напруженнях.

Осесиметричний рух стисливої рідини в круглих трубах можна описати диференціальними рівняннями Нав'є-Стокса:

$$\left.\begin{aligned} &\rho\frac{\partial v_Z}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 v_Z+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial z},\\ &\rho\frac{\partial v_r}{\partial t}=-\frac{\partial p}{\partial r}+\mu\left(\nabla^2 v_r+\frac{v_r}{r^2}\right)+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial r},\\ &\rho c^2\theta-\frac{\partial p}{\partial t}=0, \end{aligned}\right] \qquad (1)$$

де

$$\theta = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{2}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{3}$$

v_z, v_r –складові швидкості в напрямку осей z,r; p - тиск; ρ – густина рідини; μ - коефіцієнт в’язкості;c–швидкість звуку в рідині; t – час.

Проінтегруємо диференціальні рівняння (1) за наступних граничних умов на стінці труби:

$$v_r = 0, \;\; v_z = 0 \;\text{ при }\; r = d \tag{4}$$

і на кінцях труби

$$-p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\theta = \sigma_z^*, \mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \tau_{rz}^*, \tag{5}$$

при $z = 0$

$$-p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\theta = \sigma_z^{**}, \mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = \tau_{rz}^{**},$$

при $z = L$

та початкових умовах:

$$v_r = v_r^0, v_z = v_z^0, p = p^0 \;\text{ при }\; t = 0. \tag{6}$$

Позначимо інтеграли-згортки по часу через

$$q * f = \int_0^t q\left(z, r, t_1\right) f\left(z, r, t - t_1\right) dt_1, \tag{7}$$

і розглянемо функціонал:

$$\begin{gathered}
I = \int_0^L \int_0^d \{\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} * v_z + \frac{\partial v_r}{\partial t} * v_r - \frac{1}{c^2\rho^2}\frac{\partial p}{\partial t} * p\right) - p * \theta - \frac{1}{2}\mu\theta * \theta + \\
+\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} * \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} v_r * v_r + \frac{\partial v_Z}{\partial z} * \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) * \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \\
+\frac{1}{2}\rho[v_z(z,r,0)v_z(z,r,t) + v_r(z,r,0)v_r(z,r,t)] - \frac{1}{c^2\rho^2} p(z,r,0)p(z,r,t) - \\
-\rho[v_z^0(z,r)v_z(z,r,t) + v_r^0(z,r)v_r(z,r,t)] + \frac{2}{c^2\rho^2} p^0(z,r)p(z,r,t)\} rdrdz + \\
+\int_0^d [\sigma_z^*(r,t) * v_z(0,r,t) - \sigma_z^{**}(r,t) * v_z(L,r,t) + \\
+\tau_{rz}^*(r,t) * v_r(0,r,t) - \tau_{rz}^{**}(r,t) * v_r(L,r,t)] rdr.
\end{gathered} \tag{8}$$

Умовою стаціонарності функціоналу (8) у випадку, коли варійовані функції v_z , v_r , p задовольняють граничні умови (4) на стінці труби, є рівняння (1), граничні умови (5) на кінцях труби і початкові умови (6). Утворюючи першу варіацію функціоналу (8), перетворюючи її за допомогою формули Остроградського і враховуючи, що

$$\delta v_z = 0, \;\; \delta v_r = 0, \;\; при \;\; r = d, \tag{9}$$

отримаємо:

$$\delta I=\int_0^L\int_0^d\Big\langle(\rho\frac{\partial v_z}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial z}-\mu\nabla^2 v_z-\frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial z})*\partial v_z+$$
$$+(\rho\frac{\partial v_r}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial r}-\mu(\nabla^2 v_r-\frac{v_r}{r^2})-\frac{1}{3}\mu\frac{\partial\theta}{\partial z})*\partial v_z-\frac{1}{\rho c^2}(\rho c^2\theta+\frac{\partial p}{\partial t})*\delta p+$$
$$+\rho\{[v_z(z,r,0)-v_z^0]\delta v_z(z,r,t)+[v_r(z,r,0)-v_r^0]\delta v_r(z,r,t)-$$
$$-\frac{1}{\rho c^2}[p(z,r,0)-p^0]\delta p(z,r,t)\}\Big\rangle rdrdz-$$

$$-\int_0^d\{[(-p+2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu\theta)|_{z=0}-\sigma_z^*]*\delta v_z(0,r,t)-\left[(-p+2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu\theta)|_{z=L}-\sigma_z^{**}\right]*$$
$$*\delta v_z(L,r,t)+[\mu(\frac{\partial v_r}{\partial t}+\frac{\partial v_z}{\partial r})|_{z=0}-\tau_{rz}^*]*\delta v_r(0,r,t)- \qquad (10)$$
$$-[\mu(\frac{\partial v_r}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial r})|_{z=L}-\tau_{rz}^{**}]*\delta v_r(L,r,t)\}rdr.$$

Із співвідношення (10) зрозуміло, що умовами стаціонарності функціоналу I є рівняння (1) і умови (5), (6).

Для виведення спрощених математичних моделей, при описі руху стисливої рідини в трубі, необхідно використати додаткові припущення про порядки розглянутих величин і відповідно спростити функціонал (8). Для цього доцільно перейти до безрозмірних координат ξ , η , τ і безрозмірних змінних u_ξ , u_η , q наступним чином:

$$z=L\xi,\ r=d\eta,\quad t=\frac{d}{\varepsilon c}\tau;$$
$$v_z=Uu_\xi,\quad v_r=\varepsilon Uu_\eta,\quad p=c\rho Uq; \qquad (11)$$
$$\mu=\varepsilon c\rho u\chi;\ \ \varepsilon=\frac{d}{L}.$$

У цих залежностях U – нормуюча швидкість. Відношення ε є малим числом і розглядається як малий параметр.

Відповідно рахуємо, що задані початкові швидкості, тиски, а також напруження мають вигляд:

$$v_z^0=Uu_\xi^0,\quad v_r^0=\varepsilon Uu_\eta^0,\quad p^0=c\rho Uq^0; \qquad (12)$$

і

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_z^*=c\rho Us_z^*,\ \ \tau_{rz}^*=\varepsilon c\rho Ut_{rz}^*\quad при\quad \xi=0;\\ \sigma_z^{**}=c\rho Us_z^{**},\ \ \tau_{rz}^{**}=\varepsilon c\rho Ut_{rz}^{**}\quad при\quad \xi=1.\end{array}\right] \qquad (13)$$

Для виведення спрощеної теорії використаємо варіаційний метод, описаний в роботах [7-8]. Перейдемо в функціоналі до нових безрозмірних змінних і констант за співвідношеннями (11) – (13). Тоді функціонал I може бути представлений у вигляді суми:

$$I=\sum_{k=0}^{4}\varepsilon^{k-1}I_k, \qquad (14)$$

де перший член в сумі має вигляд:

$$I_0=\frac{1}{2}\rho d^3U^2\{\int_0^1\int_0^1[\frac{\partial u_\xi}{\partial\tau}*u_\xi-\frac{\partial q}{\partial\tau}*q-2q*(\frac{\partial u_\eta}{\partial\eta}+\frac{1}{\eta}u_\eta+\frac{\partial u_\xi}{\partial\xi})+\chi\frac{\partial u_\xi}{\partial\eta}*\frac{\partial u_\xi}{\partial\eta}+$$
$$+u_\xi(\xi,\eta,0)u_\xi(\xi,\eta,\tau)-2q(\xi,\eta,0)q(\xi,\eta,\tau)-2u_\xi^0u_\xi(\xi,\eta,\tau)+4q^0q(\xi,\eta,\tau)]\eta d\eta d\xi+ \qquad (15)$$
$$+2\int_0^1[s_z^*(\eta,\tau)*u_\xi(0,\eta,\tau)-s_z^{**}(\eta,\tau)*u_\xi(1,\eta,\tau)]\eta d\eta\}.$$

Тут інтеграли-згортки взяті в безрозмірному параметрі часу τ і мають вигляд:

$$g*f=\int_0^{\tau}g(\xi,\eta,\tau_1)f(\xi,\eta,\tau-\tau_1)d\tau_1. \quad (16)$$

Якщо використати метод малого параметра і в сумі (14) зберегти тільки перший член, то в першому наближенні функціонал (8) замінюють функціоналом (15).

Утворивши першу варіацію функціоналу (15) за умов (9), знайдемо:

$$\delta I_0=\rho d^3U^2\int_0^1\int_0^1\{[\frac{\partial u_\xi}{\partial\tau}-\chi(\frac{\partial^2 u_\xi}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\eta}\frac{\partial u_\xi}{\partial\eta})+\frac{\partial q}{\partial\xi}]*\delta u_\xi+\frac{\partial q}{\partial\eta}*\delta u_\eta-(\frac{\partial u_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial u_\eta}{\partial\eta}+\frac{u_\eta}{\eta}+\frac{\partial q}{\partial\tau})*\delta q+$$

$$+[u_\xi(\xi,\eta,0)-u_\xi^0]\delta u_\xi(\xi,\eta,\tau)-2[q(\xi,\eta,0)-q^0]\delta q(\xi,\eta,\tau)\}\cdot\eta d\eta d\xi-\int_0^1[q(0,\eta,\tau)-s_z^*(\eta,\tau)]*$$

$$*\delta u_\xi(0,\eta,\tau)-[q(1,\eta,\tau)-s_z^{**}(\eta,\tau)]*\delta u_\xi(1,\eta,\tau)]\eta d\eta. \quad (17)$$

Із співвідношення (17) очевидно, що умовами стаціонарності функціоналу (15) за умови (4) є диференціальні рівняння:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u_z}{\partial\tau}-\chi(\dfrac{\partial^2 u_\xi}{\partial\eta^2}+\dfrac{1}{\eta}\dfrac{\partial u_\xi}{\partial\eta})+\dfrac{\partial q}{\partial\xi}=0,\\ \dfrac{\partial q}{\partial\eta}=0,\\ \dfrac{\partial u_\xi}{\partial\xi}+\dfrac{\partial u_\eta}{\partial\eta}+\dfrac{u_\eta}{\eta}+\dfrac{\partial q}{\partial\tau}=0;\end{array}\right] \quad (18)$$

Рівняння (18) має граничні умови:

$$\begin{array}{l}q-s_z^*=0,\quad при\quad \xi=0,\\ q-s_z^{**}=0,\quad при\quad \xi=1\end{array} \quad (19)$$

і початкові:

$$u_\xi=u_\xi^0,\quad q=q^0,\quad при\quad \tau=0. \quad (20)$$

Висновки

Запропоновано удосконалену методику розрахунку неусталених потоків рідини. Вона дозволяє використовувати варіаційні принципи при розв’язку нестаціонарних задач течії рідини в трубах.

Отримано залежності, що враховують внутрішній розподіл енергії потоку та вплив інерційного напору за течії реальної рідини в циліндричному трубопроводі.

Аннотация. *Проведен анализ научных работ о нестационарном движении жидкости. Сформулирован общий вариационный принцип для решения задач неустановившегося осесимметричного течения сжимаемой жидкости в трубах. В работе использован вариационный принцип для линеаризованных уравнений Навье-Стокса в цилиндрических координатах. Он отличается от известных вариационных принципов тем, что применяется в случае, когда граничные условия на торцах заданы в напряжениях.*

Предложены зависимости, учитывающие внутреннее распределение энергии потока и влияние инерционного напора при неустановившемся течении реальной жидкости в цилиндрическом трубопроводе.

Ключевые слова: неустановившейся; нестационарный; движение жидкости; структура потока; вариационный принцип.

Abstract. *The analysis of scientific works on the unsteady motion of the fluid. General variational principle for solving problems neutralino axisymmetric flow of compressible liquid in pipes. We used the variational principle for linearity Navier-Stokes equations in cylindrical coordinates. It differs from the known variational principles that apply in the case when the boundary conditions at the ends are set in the voltage.*

First, this variational principle is used to derive a simplified mathematical model. For this, using the perturbation method from the corresponding functionality, displays a simplified functional. It is obtained from the differential equation, initial and boundary conditions of this model. Using two functionals is possible to deduce the General laws of reciprocity for accurate and simplified model.

The proposed dependence, taking into account the internal distribution of energy flow and the influence of the inertial pressure on neutralino the expiration of a real fluid in a cylindrical pipe.

Keywords: unstable; unsteady; fluid flow; flow structure; variational principle.

Бібліографічний список використаної літератури

1. *Chung D.* Large-eddy simulation and wall modelling of turbulent channel flow/ D. Chung, D. I. Pullin// J. Fluid Mech.- 2009.- V. 631.- P. 281-309.
2. *Бондаренко Н. И.* О неустановившемся движении сжимаемой жидкости в напорном трубопроводе/ Н. И. Бондаренко, Ю. И. Терентьев// Моск. гос. техн. ун-т. М.: 2009.- 54 с.- Деп. в ВИНИТИ РАН 15.10.2009, № 620-В2009.
3. *Рахматуллин Ш. И.* Влияние степени турбулентности и частоты турбулентных пульсаций на гидравлическое сопротивление круглой трубы/ Ш. И. Рахматуллин, Д. П. Ким// Нефт. х-во.- 2006, № 11.- С. 110-111.
4. *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах/ И.А. Чарный.- М.: Недра, 1975.- 296 с.
5. *Подгаец Р.М.* Вариационные принципы нестационарной задачи течения несжимаемой вязкой среды/ Р.М. Подгаец, Ю.И. Няшин// В сб. науч. тр. ППИ "Прочности и гидравлические характеристики машин и конструкций".- 1974.- №153.
6. *Бондаренко Ю.А.* Математические модели и численные методы для решения задач нестационарной газовой динамики / Ю.А. Бондаренко, В.В. Башуров, Ю.В. Янилкин// Обзор зарубежной литературы.– М. 2003. - (Препринт/ РФЯЦ ВНИИЭФ; №88-2003).
7. *Гнатів Р.М.* Розвязок задач неусталених рухів операційним методом на основі дисипативної моделі/ Р.М. Гнатів, М.Й. Микитин// Промислова гідравліка і пневматика.- 2011.-№3(33).- С.53-55.
8. *Гнатів Р.М.* Асимптотичний метод виведення дисипативної моделі неусталеного потоку рідини/ Р.М. Гнатів, М.Й. Микитин// Промислова гідравліка і пневматика.- 2012.-№1(35).- С.40-44.

References

1. *Chung D.* Large-eddy simulation and wall modelling of turbulent channel flow. D. Chung, D. I. Pullin. J. Fluid Mech. 2009. V. 631. P. 281-309.
2. *Bondarenko N. I.* O neustanovivshemsja dvizhenii szhimaemoj zhidkosti v napornom truboprovode. N. I. Bondarenko, Ju. I. Terent'ev. Mosk. gos. tehn. un-t. Moscow: 2009. 54 p. Dep. v VINITI RAN 15.10.2009, no 620-V2009.
3. *Rahmatullin Sh. I.* Vlijanie stepeni turbulentnosti i chastoty turbulentnyh pul'sacij na gidravlicheskoe soprotivlenie krugloj truby. Sh. I. Rahmatullin, D. P. Kim. Neft. h-vo. 2006, no 11. P. 110-111.
4. *Charnyj I.A.* Neustanovivsheesja dvizhenie real'noj zhidkosti v trubah. I.A. Charnyj. Moscow: Nedra, 1975.- 296 p.
5. *Podgaec R.M.* Variacionnye principy nestacionarnoj zadachi techenija neszhimaemoj vjazkoj sredy. R.M. Podgaec, Ju.I. Njashin. V sb. nauch. tr. PPI "Prochnosti i gidravlicheskie harakteristiki mashin i konstrukcij". 1974. No 153.
6. *Bondarenko Ju.A.* Matematicheskie modeli i chislennye metody dlja reshenija zadach nestacionarnoj gazovoj dinamiki. Ju.A. Bondarenko, V.V. Bashurov, Ju.V. Janilkin. Obzor zarubezhnoj literatury. Moscow. 2003. (Preprint. RFJaC VNIIJeF; no 88-2003).
7. *Gnativ R.M.* Rozvjazok zadach neustalenih ruhiv operacijnim metodom na osnovi disipativnoї modeli. R.M. Gnativ, M.J. Mikitin. Promislova gidravlika i pnevmatika. 2011. No 3(33). P. 53-55.
8. *Gnativ R.M.* Asimptotichnij metod vivedennja disipativnoї modeli neustalenogo potoku ridini. R.M. Gnativ, M.J. Mikitin. Promislova gidravlika i pnevmatika. 2012. No 1(35). P. 40-44.

Подана до редакції 02.07.2015