

УДК 621.771

Скібінський О.І. к.т.н, доц.; Гуцул В.І., к.т.н, доц.; Гнатюк А.А. асп.  
Кіровоградський національний технічний університет, м. Кіровоград, Україна

## ДО ВИЗНАЧЕННЯ ПРОФІЛЮ ІНСТРУМЕНТУ ДЛЯ ОБРОБКИ РОТОРА ГЕРОТОРНОЇ ПЕРЕДАЧІ В УМОВАХ ОБКАТУ

Skibinskiy O., Gutsul I., Gnatuk A.  
Kirovograd National Technical University, Kirovograd, Ukraine (andrej.gnatyuk.28@mail.ru)

### DEFINITION OF TOOL PROFILE FOR TOOLING ROTOR OF GEROTOR TRANSMISSION IN CONDITIONS ROUNDING

Статтю присвячено проблемам проектування інструментів для обробки циклоїдальної поверхні роторів героторних передач. Такими інструментами зокрема є черв'ячні фрези та черв'ячні шліфувальні круги. Попри те, що наведені інструменти є відомими в світі, практично відсутня інформація щодо методики їх проектування. Головним чином це математичний апарат, який би дозволяв будувати профіль наведених інструментів. В результаті проведеного аналізу зачеплення ротор-інструментальна рейка та графоаналітичного синтезу була сформульована та вирішена задача про існування дискримінанти (огинаючої) сімейства положень ротора, та отримані її рівняння, які мають переваги перед чисельними та графоаналітичними методами побудови і відрізняються відносною простотою для користувача. Результати досліджень можуть бути використані в якості інженерної методики при проектуванні та виготовленні черв'ячних фрез та шліфувальних кругів для обробки роторів героторних передач в умовах обкату.

Ключові слова: героторна передача, черв'ячна фреза, профіль інструментальної рейки, огинаюча

#### Вступ

Героторні передачі (позацентроїдні епіциклоїдальні передачі внутрішнього зачеплення) вирізняються серед інших собі подібних передач використанням спеціального профілю – еквідистанти до вкороченої епіциклоїди. Саме такий профіль і належить внутрішньому колесу із зовнішніми зуб'ями - ротору. Разом із зовнішнім статором він утворює зачеплення, в якому різниця в кількості зуб'їв рівна одиниці. Для виготовлення циклоїдального профілю ротора використовується різний за складністю інструмент, зокрема черв'ячні фрези та черв'ячні шліфувальні круги. Ці інструменти працюють за методом обкату. Профілі даних інструментів хоч і формуються за відомими принципами побудови контуру інструментальної рейки, для їх побудови необхідно виконати складні чисельні розрахунки. В іншому випадку користуються графоаналітичним методом. При цьому точність побудови профілю буде залежати від дискретності сімейства положень ротора, відносно якого будується огинаюча, тобто профіль інструментальної рейки. Цей метод є також трудомістким та складним і вимагає багато часу навіть з використанням CAD - систем. Тому спрощення методики профілювання черв'ячних фрез та кругів для обробки роторів, окреслених еквідистантами до вкорочених епіциклоїд є важливим завданням і вимагає нового математичного апарату.

Аналіз останніх досліджень та публікацій дає змогу розглянути спроби вирішення даної проблеми. Найбільш детально методика профілювання черв'ячних фрез для обробки ротора позацентроїдної епіциклоїдальної передачі внутрішнього зачеплення приводиться в праці Шаннікова [1]. Методика основана на графоаналітичному синтезі профілю фрези, якому притаманні вищевказані недоліки. Даному питанню також присвячена робота [2], в якій наводяться рекомендації по виготовленню збірних черв'ячних фрез для обробки роторів промислових перфораторів, а також висвітлюється питання їх профілювання. Результатом досліджень стали декілька систем рівнянь, котрі окремо описують випуклі та увігнуті ділянки профілю.

#### Мета

Метою дослідження є аналітичне визначення профілю черв'ячних інструментів для обробки роторів героторних передач в умовах обкату та отримання єдиних рівнянь, які б спрощували інженерну методику проектування даних інструментів.

#### Дослідження

Алгоритм проведення дослідження буде здійснюватись поступовим вирішенням таких задач:

- Виконати графоаналітичний синтез зачеплення ротора та інструментальної рейки;
- Визначити основні вхідні параметри для розрахунку, представити сімейство положень ротора у вигляді системи рівнянь;

- Вирішити задачу про існування дискримінанти (огинаючої) даного сімейства, отримати її рівняння, в доступній для користувача формі;
- Використовуючи отримані формули, побудувати в CAD – системі тривимірні моделі інструментів.

Подібно до того, як профілюються черв'ячні фрези та круги для евольвентних коліс, профіль інструментальної рейки утворюється коченням центроїди оброблюваного колеса (в даному випадку ротора) по прямій без ковзання. В різні моменти часу колесо знаходиться в певному кутовому положенні. Якщо розбити часовий інтервал кочення на більш короткі проміжки, то отримаємо сімейство положень колеса (Рис. 1). Огинаюча даного сімейства і утворює профіль інструмента, придатного для обробки в умовах обкату.

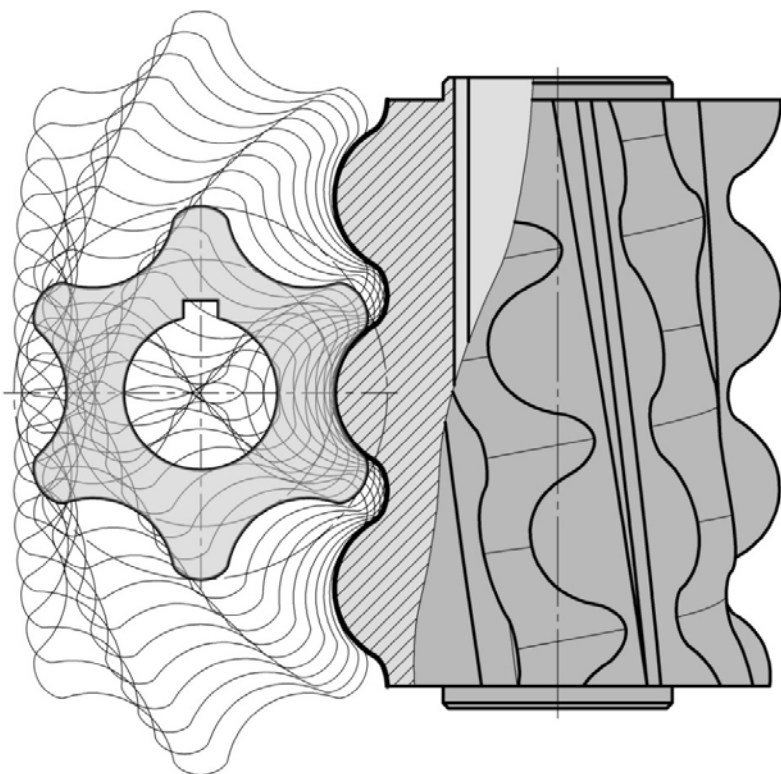


Рис. 1. Схема утворення профілю черв'ячної фрези для обробки ротора героторної передачі

Для більш детального розуміння процесу формоутворення профілю рейки складемо розрахункову схему і введемо позначення (Рис. 2) Маємо дві системи координат – рухому  $(x', \zeta'; y', \eta')$ , яка пов'язана з колесом 1, та нерухому  $(x, \zeta; y, \eta)$ , яка пов'язана із рейкою 2. Саме в нерухомій системі координат і буде визначатись профіль інструмента 5. Профіль ротора є еквідистанта 4 до вкороченої епіциклоїди 3, віддалена на відстань радіуса цівки статора  $r_{ц}$ . Особливості проектування та розрахунку героторної передачі тут не приводяться, їх можна зустріти в спеціальній технічній літературі [1, 3, 4].

В початковому положенні центр центроїди ротора з радіусом (коло вершин ротора) співпадає з початком відріку  $O$  нерухомої системи координат. Поліс зачеплення деталі з інструментом відповідає точці  $A$ . Далі центроїда починає рух кочення по прямій. Коли центр ротора опиниться в положенні  $O'$ , а поліс зачеплення в

положенні  $B$ , рухома система координат повернеться на кут  $t$ , пропорційний дузі  $\widehat{AB}$ , при цьому  $\widehat{AB} = AB = OO'$ . Разом із системою координат поворот здійснюватиме і епіциклоїда разом зі своєю еквідистантою. Тоді координати епіциклоїди, що здійснила поворот на кут  $t$  і змістилась на відстань  $AB$  в нерухомій системі координат будуть мати вигляд:

$$X(\phi; t) = x(\phi) \cdot \cos t + y(\phi) \cdot \sin t; \quad (1)$$

$$Y(\phi; t) = y(\phi) \cdot \cos t - x(\phi) \cdot \sin t + R_{\text{Бер}} t; \quad (2)$$

де  $x(\phi)$ ,  $y(\phi)$  – параметричні рівняння вкороченої епіциклоїди в рухомій системі координат [5]:

$$x(\phi) = R_{цц} \cos(\phi/z_2) - e \cdot \cos \phi; \quad (3)$$

$$y(\phi) = R_{цц} \sin(\phi/z_2) - e \cdot \sin \phi; \quad (4)$$

$z_2 = z_1 + 1$  – число зубців статора;

$z_1$  – число зубців ротора;

$e$  – ексцентриситет героторної передачі;

$R_{цц}$  – радіус центрів цівок статора;

$\phi$  – параметр побудови епіциклоїди.

Додаток  $R_{\text{Бер}} t$  в формулі (2) виражає довжину дуги  $\widehat{AB}$ . Оскільки кожному конкретному значенню  $t$  відповідає певне положення рухомої системи координат та пов'язаних з нею кривих, то цей кут можна трактувати як параметр сімейства кривих, відносно яких будується профіль інструмента.

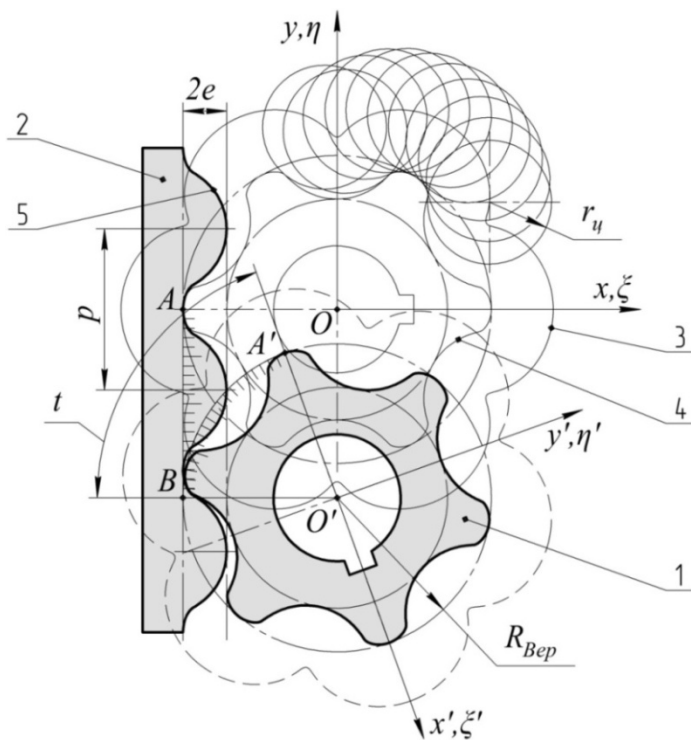


Рис. 2. Розрахункова схема зачеплення інструмент – оброблене колесо з позначенням основних параметрів

Кожна з епіциклоїд має одну точку, яка одночасно належить профілю інструментальної рейки. Умова існування дискримінанти (огинаючої) сімейства кривих виражається наступною залежністю з диференціальної геометрії [1,5,6]:

$$\frac{\partial X}{\partial t} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \phi} - \frac{\partial X}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} = 0; \quad (5)$$

Дане рівняння необхідно привести до вигляду  $t = f(\phi)$ . Ця залежність виражає взаємозв'язок параметра побудови  $\phi$ , що визначає положення точки на епіциклоїді, та параметру  $t$ , що визначає епіциклоїду із множини сімейства. Знаходимо часткові похідні по параметрам  $\phi$  і  $t$ :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = y(\phi) \cdot \cos t - x(\phi) \cdot \sin t; \quad (6)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \phi} = x'(\phi) \cdot \cos t + y'(\phi) \cdot \sin t; \quad (7)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = R_{Бер} - y(\phi) \cdot \sin t - x(\phi) \cdot \cos t; \quad (8)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \phi} = y'(\phi) \cdot \cos t - x'(\phi) \cdot \sin t; \quad (9)$$

Підставляємо знайдені складові в рівняння (5) і виконуємо спрощення:

$$x(\phi)x'(\phi) + y(\phi)y'(\phi) - R_{Бер}x'(\phi)\cos t - R_{Бер}y'(\phi)\sin t = 0; \quad (10)$$

Отримане рівняння необхідно розв'язати відносно  $t$ . Розділимо його на  $\sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2}$ :

$$\frac{R_{Бер}x'(\phi)\cos t}{\sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2}} + \frac{R_{Бер}y'(\phi)\sin t}{\sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2}} = \frac{x(\phi)x'(\phi) + y(\phi)y'(\phi)}{\sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2}}; \quad (11)$$

Введемо додаткову функцію  $\beta(\phi)$ :

$$\cos(\beta(\phi)) = \frac{y'(\phi)}{\sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2}}, \quad \sin(\beta(\phi)) = \frac{x'(\phi)}{\sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2}}, \quad \operatorname{tg}(\beta(\phi)) = \frac{x'(\phi)}{y'(\phi)}; \quad (12)$$

Підставляючи (12) у (11) отримуємо рівність:

$$R_{Бер} \sin(\beta(\phi)) \cos t + R_{Бер} \cos(\beta(\phi)) \sin t = \frac{x(\phi)x'(\phi) + y(\phi)y'(\phi)}{\sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2}}; \quad (13)$$

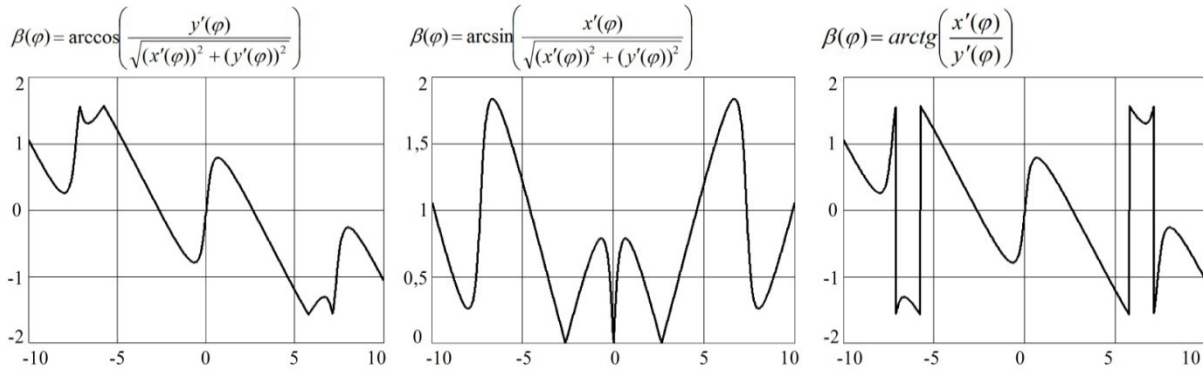
Останнє рівняння можна представити у вигляді:

$$\sin(\beta(\phi) + t) = \frac{x(\phi)x'(\phi) + y(\phi)y'(\phi)}{R_{Бер}\sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2}}; \quad (14)$$

Звідси знаходимо  $t$ :

$$t(\phi) = \arcsin \left( \frac{x(\phi)x'(\phi) + y(\phi)y'(\phi)}{R_{Бер}\sqrt{(x'(\phi))^2 + (y'(\phi))^2}} \right) - \beta(\phi); \quad (15)$$

Визначимо тепер більш чітко функцію  $\beta = \beta(\phi)$ . Відмітимо, що у відповідності з (12) величина  $\beta$  визначає кут між нормаллю вкороченої епіциклоїди і додатним напрямом вісі абсцис. В якості  $\beta(\phi)$  не можна брати один з формальних розв'язків одного з рівнянь (12). На рис.3 показані графіки таких функцій. Як бачимо у всіх випадках порушуються умови неперервності і гладкості функції.

Рис. 3. Функція  $\beta(\varphi)$  при різних вихідних співвідношеннях

Функція  $\beta(\varphi)$  може бути знайдена наступним чином. Випишемо всі розв'язки, наприклад, 3-го рівняння (12):

$$\beta(\varphi) = k \cdot \arctg\left(\frac{x'(\varphi)}{y'(\varphi)}\right) = k \cdot \arctg\left(-\frac{R_{\text{цм}} \sin(\varphi/z_2) - e \cdot z_2 \cdot \sin \varphi}{R_{\text{цм}} \cos(\varphi/z_2) - e \cdot z_2 \cdot \cos \varphi}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots; \quad (16)$$

Значення параметра  $k$  необхідно підбирати так, щоб функція  $\beta(\varphi)$  залишалася неперервною і виконувалися перші два рівняння (12). Даний підхід є досить громіздким, оскільки різним значенням  $\varphi$  будуть відповідати різні значення  $k$ .

Розглянемо інший, більш раціональний варіант визначення функції  $\beta(\varphi)$ . Застосовуючи формулу:

$$\text{tg}(x + y) = \frac{\text{tg}x + \text{tg}y}{1 - \text{tg}x \cdot \text{tg}y}; \quad (17)$$

можемо записати:

$$\begin{aligned} \text{tg}\left(\beta(\varphi) + \frac{\varphi}{z_2}\right) &= \frac{\text{tg}(\beta(\varphi)) + \text{tg}(\varphi/z_2)}{1 - \text{tg}(\beta(\varphi)) \cdot \text{tg}(\varphi/z_2)} = \frac{\frac{-R_{\text{цм}} \sin(\varphi/z_2) + e \cdot z_2 \sin(\varphi)}{R_{\text{цм}} \cos(\varphi/z_2) - e \cdot z_2 \cos(\varphi)} + \frac{\sin(\varphi/z_2)}{\cos(\varphi/z_2)}}{1 - \frac{-R_{\text{цм}} \sin(\varphi/z_2) + e \cdot z_2 \sin(\varphi)}{R_{\text{цм}} \cos(\varphi/z_2) - e \cdot z_2 \cos(\varphi)} \cdot \frac{\sin(\varphi/z_2)}{\cos(\varphi/z_2)}}; \\ &= \frac{\frac{e \cdot z_2 \sin(\varphi \cdot z_1/z_2)}{R_{\text{цм}} \cos(\varphi/z_2)^2 - e \cdot z_2 \cos(\varphi/z_2) \cdot \cos(\varphi/z_2)}}{\frac{R_{\text{цм}} - e \cdot z_2 \cos(\varphi \cdot z_1/z_2)}{R_{\text{цм}} \cos(\varphi/z_2)^2 - e \cdot z_2 \cos(\varphi/z_2) \cdot \cos(\varphi/z_2)}} = \frac{e \cdot z_2 \sin(\varphi \cdot z_1/z_2)}{R_{\text{цм}} - e \cdot z_2 \cos(\varphi \cdot z_1/z_2)} \end{aligned} \quad (18)$$

Шукану функцію  $\beta(\varphi)$  можна представити у вигляді:

$$\beta(\varphi) = \arctg\left(\frac{e \cdot z_2 \sin(\varphi \cdot z_1/z_2)}{R_{\text{цм}} - e \cdot z_2 \cos(\varphi \cdot z_1/z_2)}\right) - \frac{\varphi}{z_2}; \quad (19)$$

Графік отриманої функції (рис. 4) помітно відрізняється від попередніх на рис. 3., і має вигляд плавно спадаючої кривої синусоїдальної форми, без порушень геометрії. Так як  $R_{\text{цм}} > e \cdot z_2$ , то при будь-якому  $\varphi$  знаменник правої частини (18) відмінний від нуля. Звідси випливає, що аргумент тангенса лівої частини (18) не виходить за межі інтервалу  $(-\pi/2; \pi/2)$  і функція  $\beta(\varphi)$ , яка визначається за формулою (19), є неперервною.

$$\beta(\varphi) = \arctg\left(\frac{e \cdot z_2 \sin\left(\frac{z_1 \varphi}{z_2}\right)}{R_{\text{цм}} - e \cdot z_2 \cos\left(\frac{z_1 \varphi}{z_2}\right)}\right) - \frac{\varphi}{z_2}$$

Відмітимо, що знайдена функція  $\beta(\varphi)$  містить лінійну складову  $-\varphi/z_2$ . Значення самої функції коливаються навколо цієї складової (рис.4). Підставивши відповідні вирази у формулу (15) і зробивши деякі перетворення, отримуємо зв'язок  $\varphi$  і  $t$ :

$$t(\phi) = \arcsin \left( \frac{R_{ци} \cdot \sin(\phi \cdot z_1/z_2) \cdot e \cdot z_1}{R_{Бер} \sqrt{R_{ци}^2 + (e \cdot z_2)^2} - 2 \cdot R_{ци} \cdot R_{Бер} \cdot \cos(\phi \cdot z_1/z_2)} \right) - \left( \arctg \left( \frac{e \cdot z_2 \sin(\phi \cdot z_1/z_2)}{R_{ци} - e \cdot z_2 \cos(\phi \cdot z_1/z_2)} \right) - \frac{\phi}{z_2} \right) ; \quad (20)$$

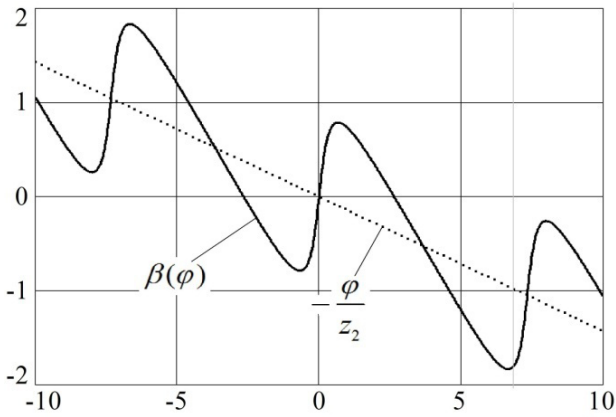


Рис. 4. Функція  $\beta(\varphi)$  після перетворення

Використовуючи формули (1) і (2), огинаюча сімейства вкорочених епіциклоїд буде мати вигляд:

$$X(\varphi) = x(\varphi) \cdot \cos(t(\varphi)) + y(\varphi) \cdot \sin(t(\varphi)) ; \quad (21)$$

$$Y(\varphi) = y(\varphi) \cdot \cos(t(\varphi)) - x(\varphi) \cdot \sin(t(\varphi)) + R_{Бер}(t(\varphi)) ; \quad (22)$$

Отримана крива не є циклоїдою, як може здатися на перший погляд (рис.5, а). Фактичний профіль інструментальної рейки є еквідистанта до даної кривої, або огинаюча сімейства еквідистант до вкорочених епіциклоїд (рис. 5, б). Вона отримується шляхом підстановки  $\xi(\varphi)$ ,  $\eta(\varphi)$  у формули (21) (22) замість  $x(\varphi)$ ,  $y(\varphi)$ , де  $\xi(\varphi)$ ,  $\eta(\varphi)$  – параметричні рівняння еквідистанти до вкороченої епіциклоїди [5,7]. Після підстановки формули приймають вигляд:

$$X_1(\varphi) = \xi(\varphi) \cdot \cos(t(\varphi)) + \eta(\varphi) \cdot \sin(t(\varphi)) ; \quad (23)$$

$$Y_1(\varphi) = \eta(\varphi) \cdot \cos(t(\varphi)) - \xi(\varphi) \cdot \sin(t(\varphi)) + R_{Бер}(t(\varphi)) ; \quad (24)$$

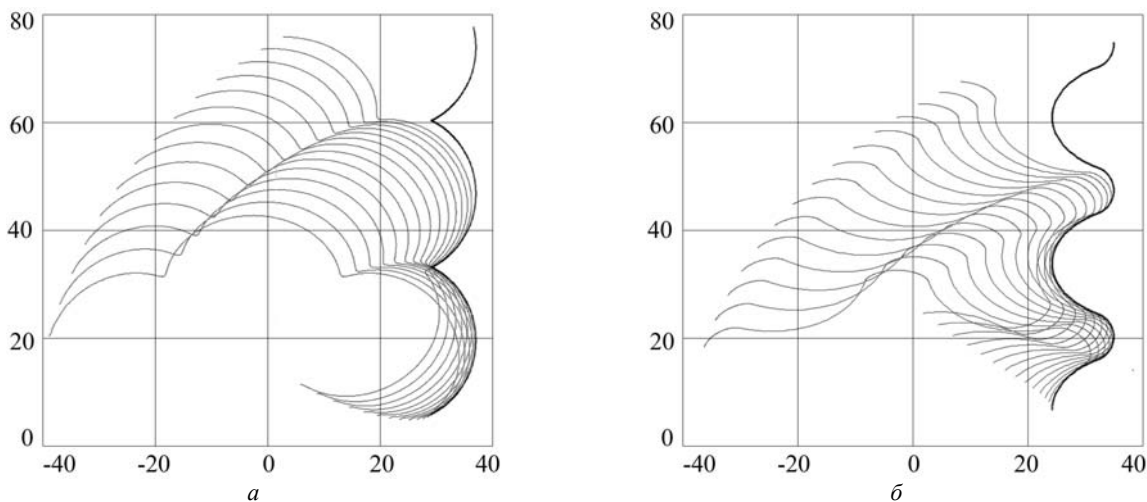


Рис. 5. Приклад побудови огинаючої сімейства вкорочених епіциклоїд та їх еквідистант (а - сімейство вкорочених епіциклоїд і його огинаюча; б - сімейство еквідистант вкорочених епіциклоїд і його огинаюча)

Для проектування черв'ячного інструменту в CAD – системі, достатньо побудувати ділянку огинаючої, обмежену кроком  $p$  інструментальної рейки. Зі схеми (рис. 2) крок буде визначатись за формулою:

$$p = \frac{2\pi R_{Бер}}{z_1} ; \quad (25)$$

Область визначення аргументу  $\varphi$  для побудови контуру інструментальної рейки, обмеженої кроком  $p$  буде лежати в межах:

$$\varphi \in [0; 2\pi \cdot z_2/z_1] ; \quad (26)$$

На рис. 6 показана схема формоутворення черв'ячної фрези в CAD – системі Solid Works.

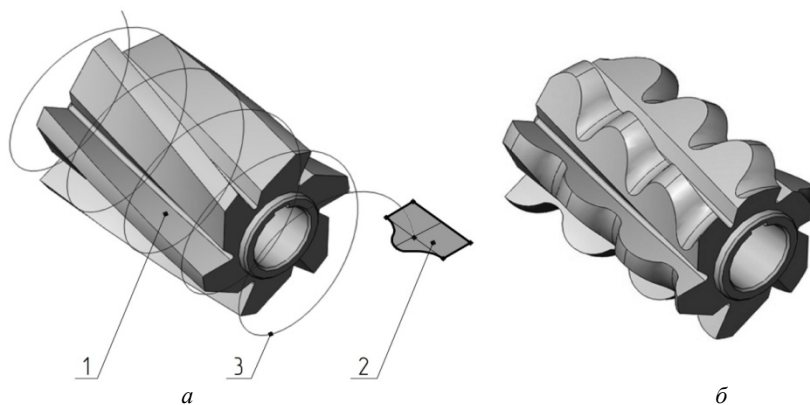


Рис. 6. Формоутворення черв'ячної фрези в CAD – системі Solid Works (а - схема формоутворення черв'ячної фрези; б - готова черв'ячна фреза)

Будуємо заготовку фрези 1, її діаметр та кількість зуб'їв обираються конструктивно. Будуємо контур 2 інструментальної рейки на проміжку (2б). Це так званий твірний контур, який і визначатиме профіль майбутньої фрези. Далі будуємо спіраль 3 з діаметром, рівним діаметру заготовки, та кроком, рівним кроку рейки  $p$ . Це так звана напрямна лінія, яка визначатиме шлях, вздовж якого вирізатиметься контур 2. Після цього за допомогою функції кінематичного вирізання отримуємо готову фрезу, придатну для подальшого виготовлення (без урахування затилування по задній поверхні). Фреза може бути використана при нарізанні зуб'їв роторів героторних передач на універсальних зубофрезерних верстатах. Окрім фрез, методика передбачає профілювання черв'ячних шліфувальних кругів (рис. 7). Круги спроектвані за даною методикою, здатні працювати на зубошліфувальних верстатах, які реалізують схеми обкату, з наявністю обертальних рухів інструменту та деталі ( $V_{inst}, V_{det}$ ), та рухів осьової і радіальної подач ( $S_O, S_{rad}$ ).

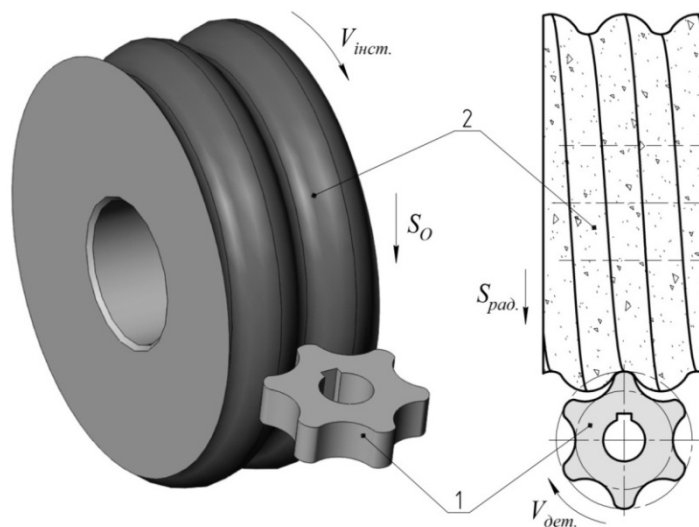


Рис. 7. Обробка черв'ячним шліфувальним кругом в умовах обкату

#### Висновки.

В результаті проведених досліджень вирішена задача про існування дискримінанти сімейства положень ротора героторної передачі, отримані рівняння, що визначають профіль інструментальної рейки для профілювання черв'ячних інструментів. Аналітичним способом отримане рівняння зв'язку параметру побудови та параметру сімейства положень, що дозволяє будувати профіль як неперервну криву. Отримані математичні моделі інструментів, наглядно показана методика їх проектування в CAD – системі. В цілому представлена методика розрахунку буде корисною інженерам на етапі проектування та підготовки виробництва, коли необхідно виготовити подібний складний інструмент.

*Анотація.* Стаття посвячена проблемам проектування інструментів для обробки циклоїдальної поверхні роторів героторних передач. Такими інструментами в частині являються червячні фрези і червячні шліфувальні круги. Незважаючи на те, що описані вище інструменти відомі в світі, практично відсутня інформація про методику їх проектування. Головним образом це математический апарат, котрий би дозволяв стріть профіль

инструментов. В результате проведенного анализа зацепления ротор-инструментальная рейка и графоаналитического синтеза была сформулирована и решена задача о существовании дискриминанты (огibaющей) семейства положений ротора, и полученные ее уравнения, которые имеют преимущества перед численными и графоаналитическими методами построения и отличаются относительной простотой для пользователя. Результаты исследований могут быть использованы в качестве инженерной методики при проектировании и изготовлении червячных фрез и шлифовальных кругов для обработки роторов героторных передач в условиях обката.

**Ключевые слова:** Героторные передача, червячная фреза, профиль инструментальной рейки, огibaющая

**Abstract.** The article is devoted to problems of designing tools for machining for processing the surface cycloidal rotor of gerotor gear. Such tools are in particular hobbing cutters and worm wheels. Despite the fact that the above described tools are known in the world, virtually no information about the method of designing. Mostly it mathematical apparatus that would allow us to build a profile of this tools. Based on the analysis for the rotary tool rake and graphic-analytical synthesis was formulated and solved the problem of the existence of discriminant (tangent curve) of family rotor position, and received its equations, which have advantages over numerical and graphical-analytical methods of construction and are relatively easy for the user. The research results can be used as an engineering methodology in the design and manufacture of hobbing cutters and grinding wheels for machining rotors gerotor gear under the conditions of rounding.

**Keywords:** gerotor gear, hobbing cutters, profile tool rack, tangent curve

#### Бібліографічний список використаної літератури

1. Шанников В.М. Планетарные редукторы с внецентроидным зацеплением / Шанников В.М. – Л.: Машгиз, 1948, 172 с.
2. Мацкевич А.В. Повышение эффективности червячного зубофрезерования роторов промышленных перфораторов / Мацкевич А.В. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Тульский государственный университет. – Тула, 2012.
3. Підгасцький М.М. Дослідження кривих, які визначають профіль інструмента для обробки цівкового колеса позацентральної епіциклоїдальної цівкової передачі / Підгасцький М.М., Скібінський О.І. Збірник наукових праць КДТУ. Техніка в сільськогосподарському виробництві, галузеве машинобудування, автоматизація. Вип. 13 – Кіровоград, 2003.
4. Фролова К.В. Механика промышленных роботов / Фролова К.В., Воробьева Е.И. Кн. 3: Основы конструирования – М.: Высшая школа, 1989, 380 с.
5. Скібінський О.І. Визначення умов існування спряженої огинаючої сімейства еквідистант до вкорочених епіциклоїд в циклоїдальній передачі внутрішнього зацеплення / Скібінський О.І., Гуцул В.І., Гнатюк А.А. – Вісник Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут" серія машинобудування, випуск №70 – Київ, 2014.
6. Бугров Я. С. Высшая математика / Я. С. Бугров, С. М. Никольский; 6-е изд., стереотип. — М.: Дрофа, 2004.
7. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике / Выгодский М.Я. – М.: Наука, 1975, 872 с.

#### References

1. Shannikov, V.M. (1948), *Planetarnye reduktory s vnecentroidnym zacepleniem* [Planetary reducers with outside centroid transmission], Mashgiz, Moscow, Russia.
2. Matskevich, A.V. (2012), *Povyshenie effektivnosti chervyachnogo zubofrezirovaniya rotorov promyshlennykh perforatorov* [Improving the efficiency of the hobbing rotors of industrial perforators], Tula State University, Tula, Russia.
3. Pidgaec'kiy, M.M. and Skibinskiy, O.I. (2003), "Research of curves that describe the profile of the tool for processing internal tooth of wheels of epicyclic transmission internal gear", *Scientific Bulletin of KDTU, Equipment in agricultural production, engineering industry, automation*, vol. 13, pp. 103-109.
4. Frolova, K.V. and Vorobjova, E.I. (1989), *Mehanika promyshlennykh robotov* [Mechanics of industrial robots], Book 3, Basic of designing, Higher school, Moscow, Russia.
5. Skibinskiy, O.I., Gutsul V.I. and Gnatyuk A.A. (2014), "Conditions determination of existence of tangent curve to family of equidistant curves of the shortened epicycloids in epicyclic transmission internal gear", *Journal of The National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", machinebuilding series*, vol. 70, pp. 159-165.
6. Bugrov, I.S. and Nikolskiy, S.M. (2004), *Vyss'haia matematika* [higher mathematics], 6 edition, Drofa, Russia.
7. Vygodskij, M. I. (1975), *Spravochnik po vysshey matematike* [Handbook of higher mathematics], Nauka, Moscow, Russia.

Подана до редакції 03.03.2016