УДК 539.3

Рудаков К.М., д.т.н., проф.
НТУУ «Київський політехнічний інститут» м. Київ, Україна

МОДЕЛЮВАННЯ ВЕЛИКИХ ДЕФОРМАЦІЙ. ПОВІДОМЛЕННЯ 7. ЧОТИРИ ТИПИ ДЕФОРМАЦІЙ, ФОРМУЛЮВАННЯ TOTAL LAGRANGIAN

Rudakov K.
National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine (mmi@kpi.ua)

MODELING OF LARGE STRAINS. MESSAGE 7. FOUR TYPES OF STRAINS, TOTAL LAGRANGIAN FORMULATION

У Повідомленнях 1 - 4 було розглянуто, як ідею мультиплікативного розкладання Лі градієнта пружно-пластичних деформацій Коші-Гріна можна застосувати для узагальненого розкладання на випадок одночасної присутності чотирьох типів деформацій: температурної, пружної, пластичних і повзучості; а також встановлені допустимі форми рівнянь стану. У Повідомленні 5 проаналізована проблема вибору відлікової конфігурації для пружних деформацій у випадку термопружності: "розвантаженої" або "початкової". У Повідомленні 6 обґрунтовано варіант ефективного алгоритму для розв'язування крайових задач термопружно-пластичності з великими деформаціями при формулюванні Total Lagrangian.

Мета цього Повідомлення – обґрунтувати варіант ефективного алгоритму для розв'язування крайових задач термопружно-пластичності та повзучості з великими деформаціями при формулюванні Total Lagrangian.

Застосовували обґрунтовану на основі другого закону термодинаміки теорію повзучості при великих деформаціях, мультиплікативний розклад градієнта деформацій Коші-Гріна, формулювання Total Lagrangian та підхід, коли пружні, пластичні деформації й деформації повзучості визначаються відносно "розвантаженого" стану. Матеріал – ізотропний метал.

Обґрунтували ефективний скінченно-елементний алгоритм обчислення напружень та великих деформацій в твердому тілі з ізотропного матеріалу при повзучості, у формулюванні Total Lagrangian. З його використанням та алгоритму Повідомлення 6 запропонували ефективний алгоритм розв'язування крайових задач у випадку одночасної присутності чотирьох типів деформацій. Цей алгоритм запрограмований в авторській скінченно-елементній програмі ОКА-3D.

Розроблений алгоритм є узагальненням ефективних алгоритмів термопружно-пластичності та повзучості, запропонованих автором в 1989 році для малих деформацій.

Ключові слова: великі деформації; термопружність, пластичність, повзучість; формулювання Total Lagrangian; мультиплікативне розкладання; алгоритм; метод скінченних елементів.

Вступ

Моделювання значних деформацій матеріалу, які одночасно містять деформації різного типу (температурні, пружні, пластичні, повзучості), є складною проблемою. Такий комплекс деформацій може виникати, зокрема, в околі вершини в'язкої тріщини в аварійних режимах роботи енергетичного агрегату з невиявленою заздалегідь тріщиною.

У серії Повідомлень [1 – 6] розглядалися проблеми, характерні для моделювання великих деформацій.

Зокрема, в [1] розглянуто, в який спосіб ідею мультиплікативного розкладу Лі [7] градієнта пружно-пластичних деформацій Коші-Гріна $[X]$ можна застосувати для узагальненого розкладу на випадок одночасної наявності чотирьох типів деформацій: температурних, пружних, пластичних та повзучості. В [4] з другого закону термодинаміки отримані теоретичні обмеження щодо зв'язків швидкостей необоротних деформацій з напруженнями. А в [5, 6] теоретично та на числових прикладах показано, що при моделюванні процесу деформування з великими термопружними (в [5]) або термопружно-пластичними (в [6]) деформаціями при застосуванні міри деформацій Гріна-Лагранжа вірним є підхід, коли пружні (або пружні та пластичні) деформації визначаються відносно "розвантаженого", а не "початкового" стану. Крім того, в [6] запропоновано варіант ефективного алгоритму визначення в тілі напружень та всіх типів деформацій при моделюванні процесу термопружно-пластичного деформування з великими деформаціями при застосуванні методу скінченних елементів при формулюванні Total Lagrangian. Він є узагальненням алгоритму, запропонованого автором в 1989 році [8] для малих деформацій

Також у [6] зазначено, що "… є значна кількість практично важливих задач, для яких можна застосувати формулювання Total Lagrangian (TL), коли історія деформування не впливає на поточний стан. Але (з

DOI: http://dx.doi.org/10.20535/2305-9001.2016.76.66198

публікацій) при TL-формулюванні зазвичай використовують логарифмічні деформації (як й при формулюванні Update Lagrangian), що приводить до значного збільшення кількості дій при обчисленні напружень та деформацій в точках тіла [9 – 11], а якщо рекомендують використовувати деформації Гріна-Лагранжа, то це проводиться без належних обґрунтувань моделі матеріалу або при відсутності температурних деформацій [12]" (тут змінені номера посилань на публікації). До цього додамо, що логарифмічні деформації бажано застосовувати лише при відсутності великих поворотів елементів матеріалу, інакше замість відносно простих алгоритмів типу описаних у [9, 10] потрібно застосовувати алгоритми типу [11, 13] зі значною кількістю додаткових дій для кожної актуальної точки тіла.

Мета цього (заключного) Повідомлення – запропонувати теоретично обґрунтований варіант ефективного алгоритму визначення напружень при моделюванні процесу деформування з великими деформаціями чотирьох типів: температурних, пружних, пластичних та повзучості, із застосуванням формулювання Total Lagrangian, мультиплікативного розкладу та підходу, коли пружні, пластичні деформації та деформації повзучості визначаються відносно "розвантаженого" стану через деформації Гріна-Лагранжа.

Подібні повністю теоретично обґрунтовані алгоритми автору невідомі.

Буде застосовуватися тільки декартова система координат. Матеріал – ізотропний метал. За принципом зручності будемо застосовувати записи в матричній та/або індексній формах.

Тензори Гріна-Лагранжа різних типів деформацій

У випадку наявності температурних, пружних, пластичних деформацій та деформацій повзучості мультиплікативний розклад матриці градієнтів деформацій $[X]$ (див. [1], формулу (20)):

$$[X]=[X^e][X^c][X^p][X^\theta]\,. \tag{1}$$

Компоненти матриці $[X]$ визначаються виразом $\delta^{mn}+\partial u^m/\partial a^n$; $m,n=1,2,3$, де u^m – переміщення, a^n – координати вихідного базису. Верхнім індексом e відмічаються пружні, c – повзучості, p – пластичні, θ – температурні компоненти. Згідно з груповими властивостями операторів відображення процес трансформації елементарного об'єму матеріалу тіла, що деформується, в часі може бути описаний операторами неперервних відображень, які реалізуються (і читаються) з кінця запису [14, 15]. Саме так побудоване мультиплікативне представлення процесу деформування (1): як би спочатку відбувається температурне деформування, потім – пластичне, ще пізніше – реалізувалася повзучість, і лише потім – пружне деформування. Це така модель (абстракція), не більш того.

У виразі (1) матриця $[X^\theta]$ з властивостями

$$[X^\theta]=\vartheta[I];\quad \vartheta=\vartheta(\theta)=1+\bar{\alpha}_\theta(\theta-\theta_0)\,;\quad J^\theta=\det[X^\theta]=\vartheta^3>0 \tag{2}$$

описує тільки температурний градієнт і містить просторові похідні від температурних переміщень [1, 2, 5]. Тут θ й θ_0 – температури (поточна та початкова); $\bar{\alpha}_\theta$ – коефіцієнт температурного подовження, який може бути функцією температури [2]; $[I]$ – одинична матриця.

Щодо введення мір деформації в послідовно розглядуваних процесах деформування, в [5, 6] на прикладі термопружності та термопружно-пластичності показано, що потрібно використовувати саме проміжні модифіковані ("розвантажені") стани. При наявності чотирьох типів деформацій це будуть такі вирази матриць з компонентами правого тензора деформацій Гріна-Лагранжа:

$$[\in^\theta]=0.5([X^\theta]^T[X^\theta]-[I])=0.5([C^\theta]-[I])=0.5(\vartheta^2-1)[I]\,; \tag{3}$$

$$[\in^p]=0.5([X^{p\theta}]^T[X^{p\theta}]-[X^\theta]^T[X^\theta])=0.5([C^{p\theta}]-[C^\theta])\,; \tag{4}$$

$$[\in^c]=0.5([X^{cp\theta}]^T[X^{cp\theta}]-[X^{p\theta}]^T[X^{p\theta}])=0.5([C^{cp\theta}]-[C^{p\theta}])\,; \tag{5}$$

$$[\in^e]=0.5([X]^T[X]-[X^{cp\theta}]^T[X^{cp\theta}])=0.5([C]-[C^{cp\theta}])\,; \tag{6}$$

$$[\in]=0.5([X]^T[X]-[I])=0.5([C]-[I])\,. \tag{7}$$

Тут введені матриці $[C^\theta]=[X^\theta]^T[X^\theta]$, $[X^{p\theta}]=[X^p][X^\theta]$, $[C^{p\theta}]=[X^{p\theta}]^T[X^{p\theta}]$, $[X^{cp\theta}]=[X^c][X^p][X^\theta]$, $[C^{cp\theta}]=[X^{cp\theta}]^T[X^{cp\theta}]$, $[C]=[X]^T[X]$.

Важливе, що при такому підході маємо адитивну властивість: сума різних типів деформацій дорівнює повної деформації Гріна-Лагранжа:

$$[\in^e]+[\in^c]+[\in^p]+[\in^\theta]=0.5(([C]-[C^{cp\theta}])+([C^{cp\theta}]-[C^{p\theta}])+([C^{p\theta}]-[C^\theta])+([C^\theta]-[I]))=0.5([C]-[I])=[\in]\,. \tag{8}$$

Згідно з (3) й (7) "початковим станом" температурної та повної деформації обирається недеформований стан; для пластичних деформацій (4) – проміжний модифікований "розвантажений" стан, в якому вже реалізовані температурні деформації, і так далі. Чотири формули (3) – (6) відповідають ідеології мультиплікативної моделі процесу деформування, а формули (7) цей підхід не стосується.

Примітка 1. У статті [1] використовувався дещо інший порядок розташування типів деформацій, ніж у формулі (1), а саме $[X]=[X^e][X^p][X^c][X^\theta]$. Щодо самої ідеї мультиплікативного розкладу, порядок може бути довільним. Як буде видно з подальших викладок, при формулюванні Total Lagrangian порядок розташування того чи іншого типу деформацій у (1) теж не має значення. Тому в [1] помилки немає.

Примітка 2. При побудові алгоритму потрібно врахувати реальні (фізичні) швидкості реалізації деформацій. Згідно з (2) і (3), температурні деформації відповідають поточному значенню температури. Крім того, температурні деформації відбуваються практично миттєво (за декілька циклів коливань атомів), ніяк не залежать від інших, тобто реалізуються в повному обсязі лише згідно зі зміною температури, тому їх потрібно моделювати першими. Пружні деформації розповсюджуються зі швидкістю пружної хвилі, тобто дуже швидко (тисячі м/с), але, на відміну від температурних, залежать від необоротних деформацій. Пластичні деформації реалізуються повільніше пружних, але настільки швидко, що зазвичай їх вважають миттєвими порівняно з деформаціями повзучості [16]. Тому деформації повзучості потрібно моделювати після пластичних деформацій. Пружні деформації визначають напруження, на які впливають необоротні деформації, тому їх потрібно моделювати останніми.

Базові співвідношення між приростами необоротних деформацій та напруженнями

Відзначимо, що, згідно з допустимим з точки зору другого закону термодинаміки співвідношенням (58) і (59) з [4], з врахуванням припущення відсутності вихровій складової деформацій повзучості [4]

$$\underset{\sim}{d}^{p}_{mn} = \dot{\lambda}^{p} \frac{\partial g}{\partial(\Xi^{mn})_{s}}; \quad \underset{\sim}{w}^{p}_{mn} = \dot{\lambda}^{p} \frac{\partial g}{\partial(\Xi^{mn})_{w}}; \quad \underset{\sim}{d}^{c}_{mn} = \dot{\lambda}^{c} \frac{\partial f}{\partial(\Xi^{mn})_{s}}; \quad \underset{\sim}{w}^{c}_{mn} = \dot{\lambda}^{c} \frac{\partial f}{\partial(\Xi^{mn})_{w}} = 0; \quad m,n = 1,2,3. \tag{9}$$

Тобто компоненти $\underset{\sim}{L}^{p}_{mn} = \underset{\sim}{d}^{p}_{mn} + \underset{\sim}{w}^{p}_{mn}$ та $\underset{\sim}{L}^{c}_{mn} = \underset{\sim}{d}^{c}_{mn} + \underset{\sim}{w}^{c}_{mn}$ відповідних матриць приведених швидкостей деформацій $[\underset{\sim}{L}^{p}] = [\underset{\sim}{d}^{p}] + [\underset{\sim}{w}^{p}]$ та $[\underset{\sim}{L}^{c}] = [\underset{\sim}{d}^{c}] + [\underset{\sim}{w}^{c}]$ пов'язані з компонентами напружень Менделя Ξ^{mn} [17], причому в (9) $(\Xi^{mn})_{s} = 0.5(\Xi^{mn} + (\Xi^{mn})^{T})$, а $(\Xi^{mn})_{w} = 0.5(\Xi^{mn} - (\Xi^{mn})^{T})$, тому $(\Xi^{mn})_{s} + (\Xi^{mn})_{w} = \Xi^{mn}$. Сумарно

$$\underset{\sim}{L}^{p}_{mn} = \dot{\lambda}^{p} \frac{\partial g}{\partial \Xi^{mn}}; \quad \underset{\sim}{L}^{c}_{mn} = \dot{\lambda}^{c} \frac{\partial f}{\partial \Xi^{mn}}; \quad m,n = 1,2,3. \tag{10}$$

Примітка 3. Як буде видно далі, припущення відсутності вихровій складової деформацій повзучості не є обов'язковим (останній вираз у (9)), оскільки на другий вираз (10) воно ніяк не впливає.

Щодо практичного застосування допустимих співвідношень (10) зазначимо, що при переході до нескінченно малих деформацій та поворотів $\underset{\sim}{L}^{p}_{mn} dt \to d\varepsilon^{p}_{mn} = de^{p}_{mn}$; $\underset{\sim}{L}^{c}_{mn} dt \to d\varepsilon^{c}_{mn} = de^{c}_{mn}$; $\Xi^{mn} \to \sigma^{mn}$. Тут рівність прирощень тензора та девіатора нескінченно малих необоротних деформацій $d\varepsilon^{p}_{mn} = de^{p}_{mn}$ й $d\varepsilon^{cp}_{mn} = de^{c}_{mn}$ постулює незмінність об'єму за рахунок необоротних деформацій, а σ^{mn} є компонентами тензора напружень Ейлера-Коші. Крім того, з урахуванням незмінності об'єму від необоротних деформацій постулюються зв'язки прирощень необоротних деформацій не з тензорами напружень, а з їх девіаторами (важливо, що при цьому головні осі напружень та прирощень необоротних деформацій не змінюються); для ізотропних матеріалів з ізотропним зміцненням це вирази $de^{p}_{mn} = d\lambda^{p} S^{mn}$ й $de^{c}_{mn} = d\lambda^{c} S^{mn}$ $[18-21]$.

Тому і з напружень у виразах (10) потрібно видалити об'ємну складову.

У статті [6] було показано, як для ізотропного матеріалу від першого виразу (10) отримати вираз (в різних варіантах запису)

$$[d \in^{p}] = d\lambda^{p} [\underset{\sim}{S}]_{0}; \quad \{d \in^{p}\} = d\lambda^{p} \{\underset{\sim}{S}\}_{0}; \quad d \in^{p}_{ij} = d\lambda^{p} (\underset{\sim}{S}^{ij})_{0}. \tag{11}$$

З подібності виразів (10) абсолютно аналогічно можемо отримати, що для ізотропного матеріалу

$$[d \in^{c}] = d\lambda^{c} [\underset{\sim}{S}]_{0}; \quad \{d \in^{c}\} = d\lambda^{c} \{\underset{\sim}{S}\}_{0}; \quad d \in^{c}_{ij} = d\lambda^{c} (\underset{\sim}{S}^{ij})_{0}. \tag{12}$$

Тут $d\lambda^{p} = \dot{\lambda}^{p} dt$, $d\lambda^{c} = \dot{\lambda}^{c} dt$; матриця $[\underset{\sim}{S}]_{0}$ (або вектор $\{\underset{\sim}{S}\}_{0}$) містять компоненти $(\underset{\sim}{S}^{ij})_{0}$ девіатора другого тензора напружень Піола-Кірхгофа (ТН2ПК), який є енергетично спряженим з тензором деформацій Гріна-Лагранжа.

З формул (11) і (12) зазвичай операцією згортання отримують вирази

$$d\lambda^{p} = \frac{3}{2} \frac{d \overline{\in}^{p}_{u}}{(\underset{\sim}{\sigma}_{u})_{0}}; \quad d\lambda^{c} = \frac{3}{2} \frac{d \overline{\in}^{c}_{u}}{(\underset{\sim}{\sigma}_{u})_{0}}, \tag{13}$$

в яких $d \overline{\in}^{p}_{u} = d\chi = \sqrt{2d \in^{p}_{i} \, d \in^{p}_{i} / 3}$ й $d \overline{\in}^{c}_{u} = \sqrt{2d \in^{c}_{i} \, d \in^{c}_{i} / 3}$ – інтенсивності приростів пластичних деформацій (приріст $d\chi$ параметра Одквіста χ) й деформацій повзучості відповідно. Але цих формул для обчислення напружень та деформацій недостатньо, оскільки в них всі величини є невідомими. Потрібні додаткові співвідношення.

З врахуванням формул закону Гука $\{\underset{\sim}{\sigma}\}_{0} = [\underset{\sim}{D}]\{\in^{e}\}$ [5] і властивості суперпозиції (8), тобто (в іншій формі запису) $\{\in\} = \{\in^{e}\} + \{\in^{c}\} + \{\in^{p}\} + \{\in^{\theta}\}$, введемо вектор напружень (зі властивостями ТН2ПК), компоненти якого в методі скінченних елементів (МСЕ) на момент поточного часу $t + \Delta t$ в актуальній точці скінченного елемента можна обчислити відразу після отримання значень вузлових переміщень (див. формули (7), (8) та пункти г) … і) загального алгоритму цього Повідомлення):

$$\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0^{\#} = [\underset{\sim}{D}]^{\,t+\Delta t}\{\in\}^{\#}, \tag{14}$$

де позначено

$$^{t+\Delta t}\{\in\}^{\#} = {}^{t+\Delta t}\{\in\} - {}^{t+\Delta t}\{\in^{\theta}\} - {}^{t}\{\in^{p}\} - {}^{t}\{\in^{c}\}\,. \tag{15}$$

В (14) і (15) наповнення всіх векторів деформацій є таким: $\{\in\} = \{\in_{11}, \in_{22}, \in_{33}, \in_{12}, \in_{23}, \in_{31}\}^{T}$, а матриця модулів пружності для ізотропного матеріалу (металу) дається виразами (20) з [6].

Коли стануть відомими компоненти $\{d\in^{p}\}$ й $\{d\in^{c}\}$, тоді шуканий вектор напружень:

$$^{t+\Delta t}\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 = \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0^{\#} - [\underset{\sim}{D}](\{d\in^{p}\} + \{d\in^{c}\})\,. \tag{16}$$

Зазвичай експериментально визначений факт відсутності зміни елементарного об’єму за рахунок необоротних деформацій формалізують виразом

$$\delta_{mn}(\in_{mn}^{p} + \in_{mn}^{c}) = 0\,. \tag{17}$$

Другий варіант – це вираз $\det X_{mn}^{p} = \det X_{mn}^{c} = 1$, який використовують при застосуванні мультиплікативного розкладу. Оскільки з першого варіанта не слідує другий, та навпаки, то виникає питання: який з них є ближчим до істини? Враховуючи Примітку 1, з [1] можемо виписати, що вказані детермінанти $\det X_{mn}^{p} = \det\left[\delta_{mn} + \dfrac{\partial(u^{m})^{p}}{\partial(r^{n})^{\theta}}\right]$; $\det X_{mn}^{c} = \det\left[\delta_{mn} + \dfrac{\partial(u^{m})^{c}}{\partial(r^{n})^{p\theta}}\right]$, де $(r^{n})^{\theta}$ та $(r^{n})^{p\theta}$ є компонентами радіус-вектора до актуальної точки в просторах, де вже реалізовані температурні та температурні й пластичні деформації відповідно; $(u^{m})^{p}$ та $(u^{m})^{c}$ є компонентами векторів переміщень, викликаних реалізацією пластичних деформацій та деформацій повзучості. Тобто відповідь на питання не є очевидною.

Як і в [1], будемо вважати, що повинна виконуватися умова (17), тому й для невеликих значень *прирощень* необоротних деформацій $d\in_{mn}^{p}$ та $d\in_{mn}^{c}$ буде виконуватися умова

$$\delta_{mn}(d\in_{mn}^{p} + d\in_{mn}^{c}) = 0\,. \tag{18}$$

Якщо в (16) скласти перші три компоненти, то з урахуванням (18) отримаємо, що $\delta_{ij}({}^{t+\Delta t}(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0) = 3\,{}^{t+\Delta t}(\underset{\sim}{\sigma}_V)_0 = \delta_{ij}(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0^{\#} = 3(\underset{\sim}{\sigma}_V)_0^{\#}$; $i, j = 1, 2, 3$, тобто маємо рівність середніх (гідростатичних, об’ємних) напружень

$$^{t+\Delta t}(\underset{\sim}{\sigma}_V)_0 = (\underset{\sim}{\sigma}_V)_0^{\#}\,. \tag{19}$$

У випадку пружної ізотропії матеріалу, з використанням значень компонент матриці $[\underset{\sim}{D}]$ та виразу (18), маємо, що

$$[\underset{\sim}{D}](\{d\in^{p}\} + \{d\in^{c}\}) = 2\underset{\sim}{G}\cdot(\{d\in^{p}\} + \{d\in^{c}\})\,, \tag{20}$$

тому замість (16) маємо право використовувати вираз

$$^{t+\Delta t}\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 = \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0^{\#} - 2\underset{\sim}{G}\cdot(\{d\in^{p}\} + \{d\in^{c}\})\,. \tag{21}$$

Введемо вектори з гідростатичною складовою $(\underset{\sim}{\sigma}_V)_0^{\#} = \delta_{ij}(\underset{\sim}{\sigma}_{ij})_0 / 3$ та девіатор $\{\underset{\sim}{S}\}_0^{\#}$:

$$\{\underset{\sim}{\sigma}_V\}_0^{\#} = (\underset{\sim}{\sigma}_V)_0^{\#}\{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^{T}; \quad \{\underset{\sim}{S}\}_0^{\#} = \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0^{\#} - \{\underset{\sim}{\sigma}_V\}_0^{\#}\,. \tag{22}$$

Тепер з (21) і (19) маємо, що

$$^{t+\Delta t}\{\underset{\sim}{S}\}_0 = \{\underset{\sim}{S}\}_0^{\#} - 2\underset{\sim}{G}\cdot(\{d\in^{p}\} + \{d\in^{c}\})\,. \tag{23}$$

Співвідношень (11) – (13) і (23) між компонентами прирощень необоротних деформацій та напружень достатньо для побудови алгоритмів знаходження характеристик напружено-деформованого стану ізотропного матеріалу (металу) в актуальній точці тіла.

Спочатку є сенс визначитися з деформаціями пластичності як такими, що реалізуються значно швидше (вважається, що миттєво), ніж деформації повзучості. Для цього у (23) достатньо задати $\{d\in^{c}\} = \{0\}$ та використати запропонований у статті [6] алгоритм для знаходження $\{d\in^{p}\}$ та $^{t+\Delta t}\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0$, який є узагальненням алгоритму, запропонованого автором ще в статті [8], але для нескінченно малих деформацій.

Примітка 4. Є питання про взаємовплив деформацій пластичності і повзучості на процеси повзучості і пластичності відповідно. Ця проблема не має однозначного вирішення, але, на (давню) думку Ю.М. Работнова, за малого рівня деформацій впливом пластичних деформацій на процес повзучості можна зневажити, а от навпаки – ні. Тут розглядаються великі деформації. Для врахування впливу деформацій повзучості на пластичність, у припущенні про навантаження, близьке до простого, будемо складати деформації повзучості та накопичену пластичну деформацію. При використанні виразу типу (33) з [6] це відбувається автоматично, а типу (39) з [6] – необхідно значення параметра Одквіста $^{t+\Delta t}\chi$ збирати зі всіх необоротних деформацій:

$$^{t+\Delta t}\chi = \int d\chi = \int(d\in_u^{p} + d\in_u^{c}) \approx \sum(d\in_u^{p} + d\in_u^{c}) = \left(\sum{}^{t}(d\in_u^{p} + d\in_u^{c})\right) + d\chi = {}^{t}\chi + d\chi\,. \tag{24}$$

Будемо припускати, що впливом великих пластичних деформацій на процес повзучості знехтувати теж не можна, тому і в рівняннях повзучості теж будемо використовувати сумарну необоротну деформацію.

Примітка 5. Ще будемо враховувати, що в реальних конструкціях, у яких процеси повзучості є важливими, величини власне деформацій повзучості зазвичай не бувають великими [16, 20]. Тому можливе застосування для деформацій повзучості простих похідних за часом.

Знаходження напружень та деформацій при врахуванні повзучості матеріалу за технічною теорією повзучості

Оскільки на етапі навантаження за рахунок повзучості напруження змінюються, то проведемо інтегрування (12), тобто $d\in_{ij}^{c}=d\lambda^{c}(\underset{\sim}{S}^{ij})_0$, від часу t до часу $t+\Delta t$. Згідно з теоремою про середнє при інтегруванні:

$$\int_{^{t}(\in_{ij}^{c})}^{^{t+\Delta t}(\in_{ij}^{c})} d\in_{ij}^{c}=\Delta\in_{ij}^{c}=\int_{^{t}(\lambda^{c})}^{^{t+\Delta t}(\lambda^{c})}(\underset{\sim}{S}^{ij})_0\,d\lambda^{c}=<(\underset{\sim}{S}^{ij})_0>\cdot\int_{^{t}(\lambda^{c})}^{^{t+\Delta t}(\lambda^{c})}d\lambda^{c}=<(\underset{\sim}{S}_{ij})_0>\cdot\Delta\lambda^{c}\,. \tag{25}$$

Тут і далі дужки < > вказують на деяке проміжне значення на етапі навантаження. З виразу (25) маємо:

$$\Delta\lambda^{c}=\frac{3}{2}\frac{\Delta\overline{\in}_{u}^{c}}{<(\underset{\sim}{\sigma}_{u})_0>}\;;\quad \{\Delta\in^{c}\}=\frac{3}{2}\frac{\Delta\overline{\in}_{u}^{c}}{<(\underset{\sim}{\sigma}_{u})_0>}<\{\underset{\sim}{S}\}_0>, \tag{26}$$

де $\Delta\overline{\in}_{u}^{c}=\sqrt{2\Delta\in_{ij}^{c}\,\Delta\in_{ij}^{c}/3}$ – інтенсивність приростів компонент тензора деформацій повзучості за часовий крок Δt; $<(\underset{\sim}{\sigma}_{u})_0>=\sqrt{3<(\underset{\sim}{S}^{ij})_0><(\underset{\sim}{S}^{ij})_0>/2}$. В (26) всі величини ще невідомі.

Третій закон теорії повзучості (кінетичне рівняння повзучості) у варіанті теорій зміцнення (13.47) книги [22] для великих деформацій запишемо аналогічно, тільки введемо в нього можливий вплив середнього напруження (як і у формулі (22.55) книги [22]), а також врахуємо Примітку 4 використанням сумарної необоротної деформації $\in_{u}^{cp}$ та Примітку 5:

$$\dot{\in}_{u}^{c}=d\overline{\varepsilon}_{u}^{c}/dt=\Phi((\underset{\sim}{\sigma}_{u})_0,(\underset{\sim}{\sigma}_{V})_0,\in_{u}^{cp},\theta)\,. \tag{27}$$

Помножимо вираз (27) на dt і проведемо інтегрування на часовому відрізку від t до $t+\Delta t$:

$$\int_{^{t}(\in_{u}^{c})}^{^{t+\Delta t}(\in_{u}^{c})}d\overline{\varepsilon}_{u}^{c}={}^{t+\Delta t}(\in_{u}^{c})-{}^{t}(\in_{u}^{c})=\Delta\in_{u}^{c}=\int_{t}^{t+\Delta t}\Phi((\underset{\sim}{\sigma}_{u})_0,(\underset{\sim}{\sigma}_{V})_0,\in_{u}^{cp},\theta)dt\,. \tag{28}$$

При пропорційному навантаженні $\Delta\in_{u}^{c}=\Delta\overline{\in}_{u}^{c}$.

Використовуючи теорему про середнє, отримаємо з (28), що

$$\Delta\in_{u}^{c}=<\Phi((\underset{\sim}{\sigma}_{u})_0,(\underset{\sim}{\sigma}_{V})_0,\in_{u}^{cp},\theta)>\cdot\Delta t\,; \tag{29}$$

$$\Delta\in_{u}^{c}/\Delta t=<\dot{\in}_{u}^{c}>=<\Phi((\underset{\sim}{\sigma}_{u})_0,(\underset{\sim}{\sigma}_{V})_0,\in_{u}^{cp},\theta)>. \tag{30}$$

Функція повзучості Φ визначається на основі експериментів. Для обчислення середньої за часовий крок Δt швидкості повзучості $<\dot{\in}_{u}^{c}>=<\Phi((\underset{\sim}{\sigma}_{u})_0,(\underset{\sim}{\sigma}_{V})_0,\in_{u}^{cp},\theta)>$ повернемося до рівняння (27). Розклавши функцію повзучості Φ у ряд Тейлора в околі t на часовому відрізку $\omega\Delta t$, де $0<\omega\le 1$, і обмежившись лінійними членами розкладу, для (29) отримаємо:

$$\Delta\in_{u}^{c}=\left[A+\omega\cdot{}^{t}(\partial\Phi/\partial(\underset{\sim}{\sigma}_{u})_0)(\Delta\underset{\sim}{\sigma}_{u})_0+\omega\cdot{}^{t}(\partial\Phi/\partial\in_{u}^{cp})\Delta\in_{u}^{c}\right]\cdot\Delta t\,, \tag{31}$$

де позначена незмінна частина (оскільки $(\Delta\underset{\sim}{\sigma}_{V})_0=(\Delta\underset{\sim}{\sigma}_{V})_0^{\#}$ згідно з (19))

$$A={}^{t}(\dot{\in}_{u}^{c})+\omega\cdot\left[{}^{t}(\partial\Phi/\partial(\underset{\sim}{\sigma}_{V})_0)(\Delta\underset{\sim}{\sigma}_{V})_0+{}^{t}(\partial\Phi/\partial\theta)\Delta\theta\right], \tag{32}$$

а швидкість інтенсивності деформацій повзучості на момент часу t визначається виразом

$${}^{t}(\dot{\in}_{u}^{c})={}^{t}(\Delta\in_{u}^{c})/{}^{t}\Delta t\,, \tag{33}$$

де ${}^{t}\Delta t$ – попередній часовий крок.

Точна рівність у (31) буде лише при деякому значенні $0<\omega\le 1$. Воно є невідомим, але його можна підібрати в чисельних експериментах. З огляду на відомі вагові схеми розв’язування крайових задач нестаціонарної теплопровідності, можна очікувати задовільні результати при $\omega\approx 0.5$.

У випадку застосування відносно малого часового кроку всі прирости можна вважати нескінченно малими, тобто переходити від позначень приростів Δ до позначення диференціалів d. Та навпаки. Оскільки процеси повзучості зазвичай описують через прирости, то й для величин змін пластичних деформацій теж далі будемо писати скінченні прирости: $\{\Delta\in^{p}\}$ замість $\{d\in^{p}\}$.

Тепер зазначимо, що у виразі (31) врахували незмінність пластичних деформацій при повзучості: $\Delta\in_{u}^{cp}\,\Delta t=(\Delta\in_{u}^{c}+\Delta\in_{u}^{p})\Delta t=\Delta\in_{u}^{c}\,\Delta t$. Дійсно, на етапі навантаження, після застосування алгоритму статті [6] при

$\{d \in^c\} = \{0\}$ компоненти $\{d \in^p\}$ стають відомими, а розвиток пластичних деформацій в актуальній точці тіла миттєво "понижує" напруження з $\{\underset{\sim}{S}\}_0^{\#}$ до $\{\underset{\sim}{S}\}_0$, лише після цього починають розвиватися деформації повзучості, які вже не зможуть змінити $\{d \in^p\}$, але змінять $\{\underset{\sim}{S}\}_0$.

В (31) є дві невідомі величини: $\Delta \in_u^c$ й $(\Delta \underset{\sim}{\sigma}_u)_0$ (ваговий коефіцієнт ω призначається, а не обчислюється). Для їх визначення необхідно мати ще один вираз. Позначимо:

$$\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0^{+} = \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0^{\#} - 2\underset{\sim}{G}\{d \in^p\}\,; \quad \{\underset{\sim}{S}\}_0^{+} = \{\underset{\sim}{S}\}_0^{\#} - 2\underset{\sim}{G}\{d \in^p\}\,, \tag{34}$$

тоді з (21) і (23), враховуючи заміну нескінченно малих приростів деформацій повзучості $\{d \in^c\}$ за етап на малі, але скінченні значення $\{\Delta \in^c\}$:

$${}^{t+\Delta t}\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 = \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0^{+} - 2\underset{\sim}{G}\{\Delta \in^c\}\,; \quad {}^{t+\Delta t}\{\underset{\sim}{S}\}_0 = \{\underset{\sim}{S}\}_0^{+} - 2\underset{\sim}{G}\{\Delta \in^c\}\,. \tag{35}$$

Для отримання $\{\Delta\underset{\sim}{S}\}_0 = {}^{t+\Delta t}\{\underset{\sim}{S}\}_0 - {}^{t}\{\underset{\sim}{S}\}_0$ віднімемо з другого виразу (35) вектор ${}^{t}\{\underset{\sim}{S}\}_0$:

$$\{\Delta\underset{\sim}{S}\}_0 = \{\underset{\sim}{S}\}_0^{+} - 2\underset{\sim}{G}\{\Delta \in^c\} - {}^{t}\{\underset{\sim}{S}\}_0 = \{\Delta\underset{\sim}{S}\}_0^{+} - 2\underset{\sim}{G}\{\Delta \in^c\}\,, \tag{36}$$

де ввели вектор

$$\{\Delta\underset{\sim}{S}\}_0^{+} = \{\underset{\sim}{S}\}_0^{+} - {}^{t}\{\underset{\sim}{S}\}_0\,. \tag{37}$$

Для співвідношення (26), використовуючи (36), запишемо

$$<\{\underset{\sim}{S}\}_0> = {}^{t}\{\underset{\sim}{S}\}_0 + \omega\{\Delta\underset{\sim}{S}\}_0 = {}^{t}\{\underset{\sim}{S}\}_0 + \omega\{\Delta\underset{\sim}{S}\}_0^{+} - \omega 2\underset{\sim}{G}\{\Delta \in^c\}\,. \tag{38}$$

Другий вираз (26) постулює співвісність векторів $\{\Delta \in^c\}$ й $<\{\underset{\sim}{S}\}_0>$, тому (38) вказує на співвісність цим двом векторам і вектора

$$\{\underset{\sim}{\breve{S}}\}_0 = {}^{t}\{\underset{\sim}{S}\}_0 + \omega\{\Delta\underset{\sim}{S}\}_0^{+}\,. \tag{39}$$

Для співвісних векторів справедливими є пропорції

$$<\{\underset{\sim}{S}\}_0> = r\cdot\{\underset{\sim}{\breve{S}}\}_0\,; \quad <(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0> = r\cdot(\underset{\sim}{\breve{\sigma}}_u)_0\,, \tag{40}$$

де $r < 1$, а $(\underset{\sim}{\breve{\sigma}}_u)_0 = \sqrt{3(\underset{\sim}{\breve{S}}^{ij})_0(\underset{\sim}{\breve{S}}^{ij})_0/2}$. З (38) з урахуванням (39) і (40)

$$\{\Delta \in^c\} = \frac{1-r}{\omega\, 2\underset{\sim}{G}}\{\underset{\sim}{\breve{S}}\}_0\,. \tag{41}$$

Після проведення операції згортання виразу (41) і зворотного застосування другої пропорції з (40) отримаємо, що $\omega\, 3\underset{\sim}{G}\,\Delta \overline{\in}_u^c = (\underset{\sim}{\breve{\sigma}}_u)_0 - <(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0>$, або відносно $<(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0>$:

$$<(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0> = (\underset{\sim}{\breve{\sigma}}_u)_0 - \omega\, 3\underset{\sim}{G}\,\Delta \overline{\in}_u^c\,. \tag{42}$$

Оскільки в усіх *технічних* теоріях повзучості під інтенсивністю напружень розуміють *рівень* діючих напружень, то $(\Delta\underset{\sim}{\sigma}_u)_0$ в (31) – зміна *рівня* напружень. Тому $(\Delta\underset{\sim}{\sigma}_u)_0$ можна обчислити (із застосуванням (42)) з виразу

$$\omega(\Delta\underset{\sim}{\sigma}_u)_0 = <(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0> - {}^{t}(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0 = (\underset{\sim}{\breve{\sigma}}_u)_0 - \omega\, 3\underset{\sim}{G}\,\Delta \overline{\in}_u^c - {}^{t}(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0\,. \tag{43}$$

Відповідно до (43), величина $(\Delta\underset{\sim}{\sigma}_u)_0$ може бути як більше нуля (додаткове навантаження), так і менше (часткове розвантаження), але незалежно від цього йде зростання деформацій повзучості, тобто $\Delta\overline{\in}_u^c > 0$, що і відбувається в реальних матеріалах.

Підставивши (43) в (31) і виразивши (31) відносно $\Delta \in_u^c$, отримаємо, що при пропорційному навантаженні ($\Delta \in_u^c = \Delta \overline{\in}_u^c$)

$${}^{t+\Delta t}(\Delta \in_u^c) = \frac{A + {}^{t}(\partial\Phi/\partial(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0)[(\underset{\sim}{\breve{\sigma}}_u)_0 - {}^{t}((\underset{\sim}{\sigma}_u)_0)]}{1 + [3\underset{\sim}{G}\cdot{}^{t}(\partial\Phi/\partial(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0) - {}^{t}(\partial\Phi/\partial \in_u^{cp})]\omega\Delta t}\cdot\Delta t\,. \tag{44}$$

Примітка 6. Технічна теорія повзучості, що застосовується, обґрунтована при пропорційному (простому) навантаженні. Крім того, автору невідомі теорії повзучості, обгрунтовані при непропорційному навантаженні. Тому прирівнювання $\Delta \in_u^c = \Delta \overline{\in}_u^c$ будемо вважати єдино можливим варіантом, як й то, що $(\Delta\underset{\sim}{\sigma}_u)_0$ в (31) – зміна *рівня* напружень.

Оскільки на перших двох стадіях повзучості ізотропних матеріалів (металів) завжди ${}^{t}(\partial\Phi/\partial \in_u^{cp}) < 0$, а ${}^{t}(\partial\Phi/\partial(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0) > 0$, то знаменник в (44) не може бути менше одиниці. При значному падінні рівня навантажень другий доданок в чисельнику (44) може стати від'ємним, але оскільки $\overline{A}$ як основна компонента містить швидкість повзучості на початок етапу навантаження ${}^{t}(\dot{\in}_u^c)$, то і в цьому випадку залишиться ${}^{t+\Delta t}(\Delta \in_u^c) > 0$.

Очевидно, що випадок $\omega = 0$ (явна схема інтегрування) зберігає незмінною досягнуту швидкість повзучості на всьому етапі навантаження незалежно від зміни навантаження, що відбулося (в конструкційних матеріалах це трапиться не може). Але формула (44) не суперечить навіть цьому випадку, оскільки при $\omega = 0$ в чисельнику відповідно до (39) $(\breve{\sigma}_u)_0 - {}^t((\sigma_u)_0) = 0$, знаменник дорівнює одиниці, з (32) $A = {}^t(\dot{\in}_u^c)$, тоді ${}^{t+\Delta t}(\Delta \in_u^c) = {}^t(\dot{\in}_u^c)\Delta t$, що випливає і з (42). Очевидно, що потрібно призначати $\omega > 0$.

Вектор $\{\Delta \in^c\}$ виражається з (26), використовуючи (40) і отримане в (44) ${}^{t+\Delta t}(\Delta \in_u^c) = {}^{t+\Delta t}(\Delta \overline{\in}_u^c)$, після чого можна визначити повну деформацію повзучості:

$$ {}^{t+\Delta t}(\Delta\lambda^c) = \frac{3}{2}\frac{{}^{t+\Delta t}(\Delta \in_u^c)}{(\breve{\sigma}_u)_0}; \quad \{\Delta \in^c\} = {}^{t+\Delta t}(\Delta\lambda^c)\{\breve{S}\}_0; \quad {}^{t+\Delta t}\{\in^c\} = {}^t\{\in^c\} + \{\Delta \in^c\}. \tag{45} $$

Підставивши значення $\{\Delta \in^c\}$ в (35), отримаємо величини напружень *в точці* тіла *без ітерацій* на основі вибраної (величиною ω) вагової схеми інтегрування рівнянь повзучості:

$$ {}^{t+\Delta t}\{\sigma\}_0 = \{S\}_0^+ - 2G\{\Delta \in^c\} + \{\sigma_V\}_0^\# . \tag{46} $$

Напруження Ейлера-Коші обчислюються згідно з формулою (тут $J = \det[X]$)

$$ {}^{t+\Delta t}[\sigma] = \frac{1}{J}[X]^{t+\Delta t}[\sigma]_0[X]^T . \tag{47} $$

Описана схема інтегрування рівнянь повзучості дозволяє, призначивши ω, з досить великою точністю простежувати процес знакопостійної повзучості в актуальних точках тіла, тобто й в усьому тілі. Фактично цей алгоритм був запропонований автором для нескінченно малих деформацій в 1989 році при $\omega = 0.5$ [23], а потім був узагальнений на випадок $0 < \omega \le 1$ в [24, 25]. Крім того, було виявлено [24, 25, 22] обмеження на часовий крок зверху, яке дозволяє отримати розв'язок, що збігається до вірного.

Повний алгоритм визначення напружень в актуальних точках тіла для крайових задач з великими деформаціями різного типу, із застосуванням мультиплікативного розкладу градієнта деформацій й правого тензора деформацій Гріна-Лагранжа (формулювання Total Lagrangian). Ізотропний матеріал з ізотропним зміцненням, декартові координати

З урахуванням [6], для реалізації в МСЕ маємо ефективний алгоритм визначення напружень при наявності чотирьох типів деформацій (температурних, пружних, пластичних та повзучості):

а) цикл по скінченним елементам (СЕ) моделі тіла;

б) вибирання значень переміщень вузлів СЕ $\{q\}_e$ із загального вектора $\{q\}$ переміщень вузлів всього тіла;

в) цикл по точкам СЕ, в яких потрібно провести розрахунки;

г) обчислення значень похідних $\dfrac{\partial u^i}{\partial a^k} = \sum_{m=1}^{M_e}\left(p_{km} \cdot (q_i)_m\right)$, де компоненти матриці диференціювання СЕ $p_{im} = \partial\varphi_m^e(\eta_j)/\partial x^i$, $m = 1,...,M_e$; M_e – кількість вузлів у СЕ з номером e; $\varphi_m^e(\eta_j)$ – базисні функції СЕ; η_j – локальні координати в СЕ; a^i – глобальні координати; u^i – переміщення (див. Розділ 24 книги [22]);

д) обчислення компонент $X_{ik} = \nabla_k(a^i + u^i) = \delta_{ik} + \partial u^i/\partial a^k$ матриці градієнта деформацій $[X]$, а також якобіана $J = \det[X]$;

е) обчислення за формулою (7) повних деформацій: $[\in] = 0.5([X]^T[X] - [I])$;

ж) обчислення за формулами (2) і (3) температурних деформацій: $[\in^\theta] = 0.5(\vartheta^2 - 1)[I]$, де $\vartheta = 1 + \overline{\alpha}_\theta(\theta - \theta_0)$;

з) обчислення компонент матриці $[D]$ пружних характеристик матеріалу (вирази (20) з [6]);

і) обчислення компонент $\{\sigma\}_0^*$, $(\sigma_V)_0^*$, $\{S\}_0^*$ та значення $(\sigma_u)_0^*$ згідно з (19), (23), (27) і (31) з [6], з додатковим урахуванням вже накопичених деформацій повзучості: $\{\sigma\}_0^* = [D]({}^{t+\Delta t}\{\in\} - {}^{t+\Delta t}\{\in^\theta\} - {}^t\{\in^p\} - {}^t\{\in^c\})$; $(\sigma_V)_0^* = \delta_{ij}(\sigma^{ij})_0^*/3$; $\{\sigma_V\}_0^* = (\sigma_V)_0^*\{1,1,1,0,0,0\}^T$; $\{S\}_0^* = \{\sigma\}_0^* - \{\sigma_V\}_0^*$; $(\sigma_u)_0^* = \sqrt{1.5(S^{imn})_0^*(S^{mn})_0^*}$;

к) при застосуванні "миттєвої термомеханічної поверхні", вираженої через "активні" деформації:

- обчислення компонент $\{\in^a\}$ згідно з (34) з [6], тобто $\{\in^a\} = \{\in\} - \{\in^\theta\}$, а також інтенсивності деформацій $\in_u^a$;
- обчислення, відповідно до (33) з [6], значення $(\sigma_u)_0 = K(\in_u^a, \theta, (\sigma_V)_0)$ з урахуванням (24) з [6], тобто $(\sigma_V)_0 = (\sigma_V)_0^*$;
- перевірка "активності навантаження": чи $(\sigma_u)_0^* > (\sigma_u)_0$? Якщо "ні", то перехід на пункт о), інакше – перехід на пункт м);

л) при застосуванні "миттєвої термомеханічної поверхні", вираженої через параметр Одквіста:

- обчислення, згідно з (39) з [6], значення $(\sigma_u)_0 = H({}^t\chi, \theta, (\sigma_V)_0)$ з урахуванням $(\sigma_V)_0 = (\sigma_V)_0^*$ й (24);

- перевірка "активності навантаження": чи $(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0^* > (\underset{\sim}{\sigma}_u)_0$? Якщо "ні", то перехід на пункт о);
- обчислення $d\chi$ згідно з (48), (49) або (50) з [6] в залежності від моделі матеріалу (ідеально-пластичний, з лінійним або нелінійним зміцненням);
- обчислення, згідно з (39) з [6], значення $(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0 = H({}^t\chi + d\chi,\, \theta,\, (\underset{\sim}{\sigma}_V)_0)$ з урахуванням $(\underset{\sim}{\sigma}_V)_0 = (\underset{\sim}{\sigma}_V)_0^*$;

м) обчислення, згідно з (32) з [6], величини масштабного коефіцієнта $r = (\underset{\sim}{\sigma}_u)_0 / (\underset{\sim}{\sigma}_u)_0^*$;

н) обчислення $\{\underset{\sim}{S}\}_0$, $\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0$, $\{d\in^p\}$ й ${}^{t+\Delta t}\{\in^p\}$ згідно з (29), (36) і (37) з [6], тобто: $\{\underset{\sim}{S}\}_0 = r\cdot\{\underset{\sim}{S}\}_0^*$; $\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 = \{\underset{\sim}{S}\}_0 + \{\underset{\sim}{\sigma}_V\}_0^*$; $\{d\in^p\} = \dfrac{1-r}{2\underset{\sim}{G}}\{\underset{\sim}{S}\}_0^*$ й ${}^{t+\Delta t}\{\in^p\} = {}^t\{\in^p\} + \{d\in^p\}$, а також обчислення $d\lambda^p = \dfrac{3}{2}\dfrac{d\chi}{(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0}$. Перехід на пункт п);

о) нових пластичних деформацій немає: $\{d\in^p\} = \{0\}$, тому ${}^{t+\Delta t}\chi = {}^t\chi$, $\{\underset{\sim}{S}\}_0 = \{\underset{\sim}{S}\}_0^*$, $\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 = \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0^*$, $d\lambda^p = 0$ та ${}^{t+\Delta t}\{\in^p\} = {}^t\{\in^p\}$;

п) якщо деформації повзучості не враховуються, то перехід на пункт в) для нової точки СЕ;

р) обчислення, згідно з (37) і (39), компонент $\{\Delta\underset{\sim}{S}\}_0^+ = \{\underset{\sim}{S}\}_0 - {}^t(\{\underset{\sim}{S}\}_0)$, $\{\breve{\underset{\sim}{S}}\}_0 = {}^t(\{\underset{\sim}{S}\}_0) + \omega\{\Delta\underset{\sim}{S}\}_0^+$, а також значення $(\breve{\underset{\sim}{\sigma}}_u)_0 = \sqrt{3(\breve{\underset{\sim}{S}}_{ij})_0(\breve{\underset{\sim}{S}}_{ij})_0/2}$;

с) обчислення для (44) значень ${}^t(\partial\Phi/\partial(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0)$, ${}^t(\partial\Phi/\partial\in_u^{cp})$, ${}^t(\dot{\in}_u^c) = \Phi({}^t(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0, {}^t(\underset{\sim}{\sigma}_V)_0, {}^t\in_u^{cp}, {}^t\theta)$, ${}^t(\partial\Phi/\partial(\underset{\sim}{\sigma}_V)_0)$, ${}^t(\partial\Phi/\partial\theta)$ й A відповідно до виразу (32), використовуючи обчислені величини $(\Delta\underset{\sim}{\sigma}_V)_0 = (\underset{\sim}{\sigma}_V)_0^* - {}^t(\underset{\sim}{\sigma}_V)_0$, $\Delta\theta = \theta - {}^t\theta$ й назначені ω та Δt ;

т) обчислення, згідно з (44), значення ${}^{t+\Delta t}(\Delta\in_u^c)$;

у) обчислення ${}^{t+\Delta t}(\Delta\lambda^c)$, $\{\Delta\in^c\}$ та ${}^{t+\Delta t}\{\in^c\}$ згідно з формулами (45), а також перепризначення ${}^{t+\Delta t}\chi$ як ${}^{t+\Delta t}\chi + {}^{t+\Delta t}(\Delta\in_u^c)$;

ф) обчислення, згідно з (21) і (47), компонент напружень ${}^{t+\Delta t}\{\underset{\sim}{\sigma}\}_0 = \{\underset{\sim}{\sigma}\}_0^\# - 2\underset{\sim}{G}\cdot(\{d\in^p\} + \{\Delta\in^c\})$ й ${}^{t+\Delta t}[\sigma] = \dfrac{1}{J}[X]^{t+\Delta t}[\underset{\sim}{\sigma}]_0[X]^T$;

х) перехід на пункт в) для нової точки СЕ;

ц) перехід на пункт а) для нового СЕ моделі тіла.

Фактично кількість дій цього алгоритму майже така ж, як і при нескінченно малих деформаціях, оскільки додаються лише дії по обчисленню напружень Ейлера-Коші згідно з виразом (47), які потрібні лише після успішного завершення ітераційного процесу отримання розв’язку крайової задачі.

Про алгоритм для всього тіла

У [6] такий алгоритм описаний для випадку крайової задачі термопружно-пластичності. При врахуванні ще й деформацій повзучості алгоритм зберігається (формули (51) – (60)), але є одна відмінність: останній вираз серед формул (60) буде мати наступний вигляд

$$\gamma = \frac{2\underset{\sim}{G}}{1 + 2\underset{\sim}{G}(d\lambda^p + d\lambda^c)}\,, \tag{48}$$

тобто в знаменнику з’являється величина $d\lambda^c$, яка обчислена в пункті у) загального алгоритму як ${}^{t+\Delta t}(\Delta\lambda^c)$.

Приклад застосування технічної теорії повзучості – теорії зміцнення

У [22, 24, 25] такий приклад є, але для нескінченно малих деформацій. Оскільки при переході до великих деформацій використовуються інші міри деформацій та напружень, випишемо ці рівняння з відповідними замінами.

Застосували один з найпростіших варіантів теорії зміцнення для ізотропного матеріалу, який конкретизує запис формули (27) у вигляді:

$$\Phi = \dot{\in}_u^c = \alpha\cdot(\in_u^{cp})^{-\nu}(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0^n\,, \tag{49}$$

де $\alpha = \alpha(\theta)$, $\nu = \nu(\theta)$ та $n = n(\theta)$ – коефіцієнти наближення як можливі функції температури. При $\nu = 0$ вона переходить в технічну теорію течії:

$$\Phi = \dot{\in}_u^c = \alpha\cdot(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0^n\,. \tag{50}$$

Для формул (32) та (44) величини ${}^t(\dot{\in}_u^c)_0$, ${}^t(\partial\Phi/\partial(\underset{\sim}{\sigma}_V)_0)$, ${}^t(\partial\Phi/\partial(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0)$, ${}^t(\partial\Phi/\partial\in_u^{cp})$ й ${}^t(\partial\Phi/\partial\theta)$ обчислюються з виразу (49) на *початок* етапу навантаження як

$${}^t(\dot{\in}_u^c) = {}^t(\alpha\cdot(\in_u^{cp})^{-\nu}(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0^n)\,;\quad {}^t(\partial\Phi/\partial(\underset{\sim}{\sigma}_V)_0) = 0\,; \tag{51}$$

$$^{t}(\partial\Phi/\partial(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0) = {}^{t}(n\alpha\cdot(\in_u^{cp})^{-\nu}(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0^{n-1}) = {}^{t}(n\cdot(\dot{\in}_u^{c})(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0^{-1}); \tag{52}$$

$$^{t}(\partial\Phi/\partial\in_u^{cp}) = -{}^{t}(\nu\alpha\cdot(\in_u^{cp})^{-\nu-1}(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0^{n}) = -{}^{t}(\nu\cdot(\dot{\in}_u^{c})(\in_u^{cp})^{-1}); \tag{53}$$

$$^{t}(\partial\Phi/\partial\theta) = {}^{t}(\dot{\in}_u^{c})\,{}^{t}[\alpha'/\alpha + n'\ln(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0 - \nu'\ln(\in_u^{cp})], \tag{54}$$

де ${}^{t}\alpha = \alpha({}^{t}\theta)$, ${}^{t}\nu = \nu({}^{t}\theta)$ й ${}^{t}n = n({}^{t}\theta)$; а ${}^{t}\alpha' = {}^{t}(d\alpha(\theta)/d\theta)$ й ${}^{t}n' = {}^{t}(dn(\theta)/d\theta)$ – похідні означених величин.

Але при ${}^{t}(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0 = 0$ і (або) ${}^{t}(\in_u^{cp}) = 0$ застосовувати (51) … (54) неможливо, оскільки виникає операція ділення на нуль. На перший погляд, в чисельному алгоритмі достатньо задати деякі малі *довільні* початкові значення для ${}^{t}(\in_u^{cp})$ й ${}^{t}(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0$. Але виявилося, що від вибору ${}^{t}(\in_u^{cp})$ залежить, якою буде функція ${}^{t+\Delta t}(\Delta\in_u^{c})$ в часі: монотонно спадною, як прийнято (на початковій стадії) в технічній теорії повзучості, або (при занижених значеннях ${}^{t}(\in_u^{cp})$) спочатку зростаючою і лише після цього спадною. До речі, з точки зору фізичних основ процесу зміцнення при повзучості, що базуються на теорії дислокацій, процес повзучості відбувається саме так, як у другому випадку. Але в технічній теорії повзучості цей факт не враховується.

Наявність максимуму функції ${}^{t+\Delta t}(\Delta\in_u^{c}({}^{t}(\in_u^{cp})))$ дозволяє знайти гідний вихід зі становища. Підставивши в (32) і (44) вирази (51) … (54), взявши першу похідну за ${}^{t}(\in_u^{cp})$ і прирівнявши її до нуля, отримаємо, що функція ${}^{t+\Delta t}(\Delta\in_u^{c}({}^{t}(\in_u^{cp})))$ починає відразу спадати, якщо:

$$\Delta t \le {}^{t}\left(\frac{(\in_u^{cp})^{1+\nu}}{\omega\alpha(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0^{n}}\cdot\frac{B+\nu'\omega\Delta\theta}{B+[\nu+3\underset{\sim}{G}n(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0^{-1}(\in_u^{cp})]\nu'\omega\Delta\theta}\right), \tag{55}$$

де позначено $B = {}^{t}\left(\nu\{1+[\alpha'/\alpha + n'\ln(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0 - \nu'\ln(\varepsilon_u^{cp})]\omega\Delta\theta\}\right)$. Але (55) – нелінійне рівняння відносно ${}^{t}(\in_u^{cp})$, тому користуватися їм незручно.

Очевидно, що при $\nu' = 0$ або при ${}^{t}\left(\nu + 3\underset{\sim}{G}n(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0^{-1}(\in_u^{cp})\right) = 1$ другий множник у (55) дорівнює одиниці, і (55) різко спрощується:

$$\Delta t \le {}^{t}\left(\frac{(\in_u^{cp})^{1+\nu}}{\omega\alpha(\underset{\sim}{\sigma}_u)^{n}}\right) = {}^{t}\left(\frac{\in_u^{cp}}{\omega\cdot(\dot{\in}_u^{c})}\right). \tag{56}$$

Однак ${}^{t}\left(\nu + 3\underset{\sim}{G}n(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0^{-1}(\in_u^{cp})\right) = 1$ можливо лише при ${}^{t}(\in_u^{cp}) = {}^{t}\left(\dfrac{1-\nu}{n}\dfrac{(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0}{3\underset{\sim}{G}}\right)$. Оскільки на початку процесу повзучості ${}^{t}(\in_u^{cp}) \approx (\underset{\sim}{\sigma}_u)_0/3\underset{\sim}{G}$, то потрібно $1-\nu \approx n$, що не має місця ($n(\theta) > 1$). Тобто умова (56) є точною лише при $\nu' = 0$.

Зі спрощеного виразу (56) маємо початкове значення

$$^{t}(\in_u^{cp}) \approx {}^{t}\left([\omega\alpha(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0^{n}\Delta t]^{1/(1+\nu)}\right), \tag{57}$$

що надає функції ${}^{t+\Delta t}(\Delta\in_u^{c})$ необхідну властивість лише спадати. Це дуже незручне обмеження, якщо ми хочемо збільшувати значення Δt на етапах навантаження, або якщо збільшилася інтенсивність напружень у точці, або несприятливо змінилися постійні наближення функції повзучості (адже вони є функціями температури): може трапитися, що накопичена до цього етапу деформація повзучості виявилася меншою, ніж необхідно для правильного підрахунку ${}^{t+\Delta t}(\Delta\in_u^{c})$ при бажаному (збільшеному або навіть зменшеному) часовому кроці Δt. Тому слід будувати адаптивну схему, тобто проводити перевірку відповідності і, за необхідності, – корегування часового кроку, що задається, відповідно до рівня накопиченої деформації повзучості, і завдяки цьому враховувати обмеження на часовий крок згори згідно з (55) або (56).

Отже, розв'язавши проблему призначення початкового значення ${}^{t}(\in_u^{cp})$, одночасно встановили дуже важливий факт *наявності обмеження для часового кроку згори при застосуванні технічної теорії зміцнення*, а також вивели відповідну формулу [24, 25, 22].

Але на першому етапі навантаження немає початкових напружень, а це означає нульове значення ${}^{t+\Delta t}(\Delta\in_u^{c})$. Інакше кажучи, перший етап навантаження не буде містити деформацій повзучості, тобто буде "миттєвим". Це узгоджується зі звичайними уявленнями. Тільки не слід забувати, що відлік часу процесу повзучості тоді почнеться з другого етапу навантаження. До речі, ніщо не заважає нам прийняти час першого етапу навантаження відносно малим.

Очевидно, що формулами (55) і (56) не можна користуватися при $(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0 = 0$, що може траплятися в деяких точках тіла в будь-який момент часу. Наприклад, при згині пластини завжди є "нейтральний" шар, в якому інтенсивність напружень $(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0$ дорівнює нулю або близька до нього. Щоб уникнути невизначених ситуацій, можна діяти двома шляхами:

- якщо в точці виявилося, що $(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0 = 0$, то штучно призначати $(\underset{\sim}{\sigma}_u)_0 = \delta$, де δ – деяке мале число;

- для всього матеріалу вводити деяку "межу повзучості", нижче якої деформації повзучості в точці не розглядати (*фізичної* "межі повзучості", скоріш за все, немає [16, 20]; а *умовна* "межа повзучості" буде залежати від прийнятого допуску на величину деформації, та й для встановлення її числових значень або функціональної залежності буде потрібно дуже багато часу на експерименти, до того ж їх знання не буде мати особливого практичного значення). При цьому згідно з (56) можливий крок Δt буде зменшуватися при збільшенні "межі повзучості", а також значні зони матеріалу можуть бути виключені з процесу повзучості. Очевидно, що цей варіант вимагає більшого обґрунтування, ніж попередній.

Про числовий приклад (тестування алгоритму)

Для малих деформацій тестування алгоритму було проведено в [24] на прикладі задачі про повзучість стрижня при його статичному розтягуванні, при значенні вагового коефіцієнта $\omega = 0.5$ та при використанні адаптивного алгоритму призначення часового кроку. Виявилося, що допустимий часовий крок швидко збільшується, а точність отриманих результатів порівняно з аналітичним розв’язком – у межах декількох відсотків.

Для випадку великих деформацій тестового прикладу знайти не вдалося, тому числових даних не приводимо. Зазначимо, що подібність алгоритмів – повна, тому немає сумніву в якості запропонованого для великих деформацій алгоритму. До того ж, як зазначено в [16] на стор. 47 (російською): "… к расчетам на ползучесть не следует предъявлять высоких требований точности …". Автори мали на увазі короткочасну повзучість, для якої величини деформацій повзучості можуть виходити за межи "нескінченно малих".

В [6] розглянули тестову задачу про визначення характеристик напружено-деформованого стану заневоленого між жорсткими стінками стрижня довжиною L та довільного перерізу, який з початкової температури θ_0 рівномірно прогрітий до температури θ. Ідеально-пластичний матеріал стрижня має модуль Юнга $\underset{\sim}{E}$, коефіцієнт Пуассона $\underset{\sim}{\mu}$, коефіцієнт температурного подовження $\overline{\alpha}_\theta$ та межу плинності $\underset{\sim}{\sigma}_T$. Якщо в цій задачі допустити розвиток деформацій повзучості, то, згідно із запропонованим алгоритмом, на першому етапі осьові напруження досягнуть межи плинності $\underset{\sim}{\sigma}_T$, а на наступних – будуть релаксувати за рахунок розвитку деформацій повзучості.

Висновки

Для крайової задачі з чотирма типами деформацій: температурними, пружними, пластичності та повзучості, застосування формулювання Total Lagrangian, мультиплікативного розкладу, закону пластичної течії та повзучості, отриманих із використанням другого закону термодинаміки (див. [4]), та підходу, коли пружні та необоротні деформації визначаються відносно "розвантаженого" стану, дозволило:

- отримати адитивну властивість великих деформацій різних типів: температурних, пружних та необоротних (пластичності та повзучості);
- запропонувати варіант ефективного алгоритму визначення в тілі величин напружень та деформацій всіх типів при моделюванні процесу деформування з великими деформаціями при застосуванні методу скінченних елементів. Він є узагальненням алгоритмів, запропонованих автором в 1989 році [8, 23] для малих деформацій.

Аннотация. *В Сообщениях 1 - 4 было рассмотрено, каким образом идею мультипликативного разложения Ли градиента упруго-пластичных деформаций Коши-Грина можно применить для обобщенного разложения на случай одновременного присутствия четырех типов деформаций: температурных, упругих, пластичных и ползучести, а также установлены допустимые формы уравнений состояния. В Сообщении 5 проанализирована проблема выбора отсчетной конфигурации для упругих деформаций в случае термоупругости: "разгруженной" или "начальной". В Сообщении 6 обоснован вариант эффективного алгоритма для решения краевых задач термоупруго-пластичности с большими деформациями при формулировании Total Lagrangian.*

Цель этого Сообщения – предложить вариант эффективного алгоритма для решения краевых задач термоупруго-пластичности и ползучести с большими деформациями при формулировании Total Lagrangian.

Применяли обоснованную вторым законом термодинамики теорию ползучести при больших деформациях, мультипликативное разложение градиента деформаций Коши-Грина, формулирование Total Lagrangian и подход, когда упругие, пластические деформации и деформации ползучести определяются относительно "разгруженного" состояния. Материал – изотропный металл.

Обосновали эффективный конечно-элементный алгоритм вычисления напряжений и больших деформаций в твердом теле из изотропного материала при ползучести, в формулировании Total Lagrangian. С его использованием и алгоритма Сообщения 6 предложили эффективный алгоритм решения краевых задач в случае одновременного присутствия четырех типов деформаций. Этот алгоритм запрограммирован в авторской конечно-элементной программе ОКА-3D. Разработанный эффективный алгоритм является обобщением алгоритмов, предложенных автором в 1989 году для малых деформаций.

Ключевые слова: большие деформации; термоупругость, пластичность, ползучесть; формулирование Total Lagrangian; мультипликативное разложение; алгоритм; метод конечных элементов.

Abstract. *It was considered in previous articles (Reports 1,2,3 and 4) how the idea of Lee's multiplicative decomposition of the elastic-plastic Cauchy-Green deformation gradient can be implemented to a generalized decomposition on the thermal, elastic, plastic and creep deformations gradient; and the admissible forms of the constitutive state equations were established. The objective of the 5-th Reports is to determine which type of the reference configuration 'unloaded' or 'initial' is more suitable in case of thermo-elasticity with respect to general hyper-elastic postulates.*
In the 6-th Reports variant of effective variant of algorithm for a solution of boundary problems of thermo-elastoplasticity with large strains is justified at Total Lagrangian formulation.
The purpose of this Message – to offer version of effective algorithm for the solution of thermoelasto-plasticity and creep boundary problems with the large strains at Total Lagrangian formulation.
Applied proved on the basis of the second law of thermodynamics creep theory, multiplicative decomposition of a gradient deformations Koshi-Green, Total Lagrangian formulation and the approach when elastic, plastic and creep strains are determined concerning the "unloaded" condition. A material – isotropic metal.
Have justified effective is finite-element algorithm of an evaluation of stresses and large strains in a solid body from an isotropic material at creep, in Total Lagrangian formulation. With its use and algorithm 6-th Reports have offered effective algorithm of a solution of boundary problems in case of simultaneous presence of four types of strains. This algorithm is programmed in author's finite-element program OKA-3D. The developed effective algorithm is generalisation of the algorithms offered by the author in 1989 for small strains.
Keywords: large strains; thermo-elasticity, plasticity, creep; Total Lagrangian formulation; multiplicative decomposition, algorithm, FEM.

Бібліографічний список використаної літератури

1. *Рудаков К.М.*, Добронравов О.А. Моделювання великих деформацій. Повідомлення 1. Мультиплікативний розклад при наявності чотирьох типів деформацій // Вісник НТУУ "КПІ". Сер. Машинобудування, 2012. – № 64. – С.7–12.
2. *Рудаков К.М.*, Яковлєв А.І. Моделювання великих деформацій. Повідомлення 2. Температурні деформації // Вісник НТУУ "КПІ". Сер. Машинобудування, 2012. – № 65. – С. 10–18.
3. *Рудаков К.М.*, Добронравов О.А. Моделювання великих деформацій. Повідомлення 3. Теоретичні основи застосування логарифмічної міри деформації Генкі // Наукові вісті НТУУ "КПІ", 2012. – № 6. – С. 86–93.
4. *Рудаков К.М.*, Яковлєв А.І. Моделювання великих деформацій. Повідомлення 4. Загальні співвідношення термопластичності та повзучості при застосуванні логарифмічної міри деформації Генкі // Наукові вісті НТУУ "КПІ", 2013. – №2. – С. 110–118.
5. *Рудаков К.М.*, Яковлєв А.І. Моделювання великих деформацій. Повідомлення 5. Термопружність // Вісник НТУУ "КПІ". Сер. Машинобудування, 2015. – №1(73). – С. 43–51.
6. *Рудаков К.М.* Моделювання великих деформацій. Повідомлення 6. Термопружно-пластичний аналіз, формулювання Total Lagrangian // Наукові вісті НТУУ "КПІ", 2015. – №3(75). – С. 14–24.
7. *Lee E.H.* Elastic–plastic deformations at finite strains // J. Appl. Mech. (ASME), 1969. – 36. – P. 1–6.
8. *Рудаков К.Н.* Об эффективности алгоритмов определения напряжений и пластических деформаций при численном моделировании процессов термосилового нагружения элементов конструкций // Пробл. прочности. – 1992. – №9. – С. 18-24.
9. *Eterović A.L.*, Bathe K.J. A hyperelastic-based large strain elasto–plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures // Int. J. Numer. Meth. Engng, 1990. – **30**. – pp. 1099 – 1114.
10. *Bathe Klaus-Jürgen*. Finite Element Procedures. New Jersey: Prentice-Hall, 1996. – 1037 p.
11. *Montans F.J.,* Bathe K-J. Computational issues in large strain elasto-plasticity: an algorithm for mixed hardening and plastic spin // Int. J. Numer. Meth. Engng, 2005. – **63**. – pp. 159 –196.
12. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2000. – 262 с.
13. *Поздеев А.А.*, Трусов П.В., Няшин Ю.И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 232 с.
14. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. Общая теория: Пер. с фр. В.В. Федулова. – М.: Высш. шк., 1983. – 399 с.
15. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т.1. – М.: Наука, 1994. – 528 с.
16. *Работнов Ю.Н.* Милейко С.Т. Кратковременная ползучесть. – М.: Наука, 1970. – 222 с.
17. *Mandel J.* Thermodynamics and plasticity. In Foundations of Continuum Thermodynamics, Delgado J.J., Nina N.R., Whitelaw J.H. (eds). Macmillan: London, 1974. – P. 283–304.
18. *Hill R.* The Mathematical Theory of Plasticity. – Oxford: Clarendon Press, 1950. – 355 p.
19. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
20. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
21. *Бойл Дж.*, Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести: Пер. с англ. А.С. Кравчука. – М.: Мир, 1986. – 360 с.
22. *Рудаков К.Н.* Чисельні методи аналізу в динаміці та міцності конструкцій: Навч. посібник. – К.: НТУУ "КПІ", 2007. – 379 с.
23. *Рудаков К.Н.* Эффективный алгоритм расчета элементов конструкций на ползучесть в рамках метода конечных элементов // Пробл. прочности. – 1992. – №4. – С. 8-13.
24. *Рудаков К.М.* Ефективні алгоритми розв'язання тривимірних крайових задач механіки деформованого твердого тіла методом скінчених елементів // Автореф. дис… докт. техн. наук. – Київ.: НТУУ "КПІ", 1996. – 34 с.
25. *Рудаков К.Н.* Алгоритм решения краевых задач знакопостоянной ползучести МКЭ // Вестник НТУУ "КПИ". Машиностроение. – Вып. 33, 1998. – С. 252-267.

References

1. Rudakov, K.M. and Dobronravov, O.A. (2012), Modelyuvannya velykykh deformatsiy. Povidomlennya 1. Mul'typlikatyvnyy rozklad pry nayavnosti chotyr'okh typiv deformatsiy [Modelling of large strains. Message 1. Multiplicate decomposition in the presence of four types of strains], *Visn. Nats. tekhn. un-ta Ukrayiny "Kyiv. politekhn. in-t". Seriya mashynobuduvannya*, No. 64, pp.7–12.
2. Rudakov, K.M. and Jakovlev, A.I. (2012), Modelyuvannya velykykh deformatsiy. Povidomlennya 2. Temperaturni deformatsiyi [Modelling of large strains. Message 2. The temperature strains], *Visn. Nats. tekhn. un-ta Ukrayiny "Kyiv. politekhn. in-t". Seriya mashynobuduvannya*, No. 65, pp.10–18.
3. Rudakov, K.M. and Dobronravov, O.A. (2013), Modelyuvannya velykykh deformatsiy. Povidomlennya 3. Teoretychni osnovy zastosuvannya loharyfmichnoyi miry deformatsiyi Henki [Modelling of large strains. Message 3. Theoretical bases of use of a logarithmic measure of strains of Hencky], *Naukovi visti Nats. tekhn. un-ta Ukrayiny "Kyiv. politekhn. in-t"*, No. 6, pp. 86–93.
4. Rudakov, K.M. and Jakovlev, A.I. (2013), Modelyuvannya velykykh deformatsiy. Povidomlennya 4. Zahal'ni spivvidnoshennya termoplastychnosti ta povzuchosti pry zastosuvanni loharyfmichnoyi miry deformatsiyi Henki [Modelling of large strains. Message 4. The physical equations of thermoplasticity and creep at use of a logarithmic measure of strains of Hencky], *Naukovi visti Nats. tekhn. un-ta Ukrayiny "Kyiv. politekhn. in-t"*, No. 2, pp. 110–118.
5. Rudakov, K.M. and Iakovliev, A.I. (2015), Modelyuvannya velykykh deformatsiy. Povidomlennya 5. Termopruzhnist' [Modelling of large strains. Message 5. Thermoelasticity], *Visn. Nats. tekhn. un-ta Ukrayiny "Kyiv. politekhn. in-t". Seriya mashynobuduvannya*, No. 1(73), pp. 43–51.
6. Rudakov, K.M. (2015), Modelyuvannya velykykh deformatsiy. Povidomlennya 6. Termopruzhno-plastychnyy analiz, formulyuvannya [Total Lagrangian Modelling of large strains. Message 6. Thermoelasto-plastic analysis, Total Lagrangian formulation], *Visn. Nats. tekhn. un-ta Ukrayiny "Kyiv. politekhn. in-t". Seriya mashynobuduvannya*, No. 3(75), pp. 14–24.
7. Lee, E.H. (1969), *Elastic–plastic deformations at finite strains*. J. Appl. Mech. (ASME), No. 36, pp.1–6.
8. Rudakov, K.N. (1992), Ob jeffektivnosti algoritmov opredelenija naprjazhenij i plasticheskih deformacij pri chislennom modelirovanii processov termosilovogo nagruzhenija jelementov konstrukcij [Effectiveness of algorithms for determining stresses and plastic deformations in numerical modeling of processes of thermomechanical loading of structural members], *Probl. Prochnosti*, No. 9, pp. 18-24.
9. Eterović, A.L. and Bathe, K.J. (1990), *A hyperelastic-based large strain elasto–plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures*. Int. J. Numer. Meth. Engng., No. **30**, pp. 1099 –1114.
10. Bathe, Klaus-Jürgen (1996), *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, New Jersey.
11. Montans, F.J. and Bathe, K-J. (2005), *Computational issues in large strain elasto-plasticity: an algorithm for mixed hardening and plastic spin*. Int. J. Numer. Meth. Engng., No. 63**,** pp. 159 –196.
12. Korobejnikov, S.N. (2000), *Nelinejnoe deformirovanie tverdyh tel* [Nonlinear deformation of firm bodies], Izdatel'stvo SO RAN, Novosibirsk, Russia.
13. Pozdeev, A.A., Trusov, P.V. and Njashin, Ju.I. (1986), Bol'shie uprugoplasticheskie deformacii: teorija, algoritmy, prilozhenija [Large plasto-elastic strains: theory, algorithms, applications], Nauka, Moscow, Russia.
14. Germain, P. (1983), *Kurs mehaniki sploshnyh sred. Obshhaja teorija* [Course of mechanics of continuous environments. General theory] Translated from fr.by Fedulova, V.V., Vyssh. shk., Moskow, Russia.
15. Sedov, L.I. (1994), Mehanika sploshnoj sredy, T.1.[Mechanic of continua. T.1], Nauka, Moscow, Russia.
16. Rabotnov, Ju.N. Milejko, S.T. (1970), *Kratkovremennaja polzuchest'* [Transient creep], Nauka, Moskow, Russia.
17. Mandel, J. (1974), *Thermodynamics and plasticity*. In Foundations of Continuum Thermodynamics, In Delgado J.J., Nina N.R., Whitelaw J.H. (eds), London, Macmillan.
18. Hill, R. (1950), *The Mathematical Theory of Plasticity*. Clarendon Press, Oxford.
19. Rabotnov, Ju.N. (1966), *Polzuchest' jelementov konstrukcij* [Creep of devices of constructions], Nauka, Moskow, 752 p.
20. Rabotnov, Ju.N. (1988), *Mehanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformable solid body], Nauka, Moskow, 712 p.
21. Boyle, J.T. and Spence, J. (1983), Stress Analysis for Creep. Butterworths, London – Boston – Durban – Singapore – Sydney – Toronto – Wellington.
22. Rudakov, K.N. (2007), *Chysel'ni metody analizu v dynamitsi ta mitsnosti konstruktsiy: navch. posibnyk* [Numerical methods of the analysis in dynamics and strength of designs: Manual], NTUU "KPI", Kyiv, Ukraine.
23. Rudakov, K.N. (1992), Jeffektivnyj algoritm rascheta jelementov konstrukcij na polzuchest' v ramkah metoda konechnyh jelementov [Effective algorithm of calculation of devices of constructions on creep a finite element method], *Probl. Prochnosti*, No. 4, pp. 8–13.
24. Rudakov, K.M. (1996), Effective algorithms of a solution of three-dimensional boundary value problems of a mechanics of the deformed solid body a finite element method, Abstract of D. Sc. dissertation, Kyiv, Ukraine.
25. Rudakov, K.N. (1998), Algoritm reshenija kraevyh zadach znakopostojannoj polzuchesti MKJe [Algorithm of a solution of boundary value problems of of constant signs creep FEM], Vest. Nac. tehn. un-ta Ukrainy "Kyiv. politehn. in-t". Serija mashinostroenie, No. 33, pp. 252–267.

Подана до редакції 11.04.2016