

УДК 539.3:624.046.3

Бекшаев С.Я.

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Одесса, Украина

ПОЛУИЗОГНУТЫЕ ФОРМЫ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ СЖАТОГО ТРЕХПРОЛЕТНОГО СТЕРЖНЯ

Bekshaev S.

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine (bekshaevs@yandex.ru)

SEMICURVED FORMS OF BUCKLING IN THE PROBLEM OF OPTIMIZATION OF COMPRESSED THREE-SPAN ROD

Разыскиваются такие положения внутренних шарнирных опор трехпролетного стержня, сжатого постоянной по длине продольной силой, при которых его критическая сила достигает максимума. Метод исследования использует преимущественно качественные результаты теории устойчивости стержневых систем, относящиеся к влиянию наложения и перераспределения связей на их критические силы. Устанавливается качественная характеристика этих положений в зависимости от значения жесткости крайней опоры, а также описываются характерные качественные особенности соответствующих форм потери устойчивости и соответствующих критических сил. В частности обнаружено, что при некоторых условиях максимальным критическим силам отвечают особые полуизогнутые формы потери устойчивости, отдельные фрагменты которых остаются недеформированными, а остальные участки изгибаются по формам, являющимся решениями более простых задач. Результаты работы позволяют глубже осознать влияние положения промежуточных опор трехпролетного стержня на его устойчивость и использовать это при проектировании и эксплуатации инженерных сооружений.

Ключевые слова: потеря устойчивости, сжатый стержень, трехпролетный стержень, упругая крайняя опора, критическая сила, полуизогнутая форма, оптимизация

Введение. Критические силы (далее – КрС) сжатых элементов инженерных конструкций являются важными характеристиками этих конструкций, часто определяющими их эксплуатационную надежность. Поэтому методы повышения КрС представляют большой практический и теоретический интерес. В то же время большинство руководств, популярных среди инженеров и научных работников, содержат преимущественно информацию о методах определения КрС и совершенно недостаточно освещают приемы управления КрС. Одной из задач этой области является задача максимального повышения КрС многопролетного шарнирно опертого стержня за счет варьирования положений промежуточных опор. Ее решение давно известно для абсолютно жестких опор [1], но, как показали недавние исследования [2 – 4], оно может быть непригодным, если хотя бы одна из крайних опор становится податливой, как, например, на рис.1 и 2. В [2] предложенная задача решена для двухпролетного стержня (рис.1). Установлено, что в некотором диапазоне значений

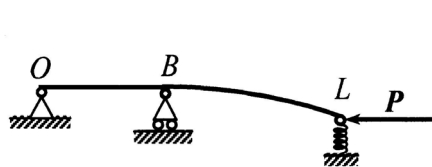


Рис. 1. Полуизогнутая форма

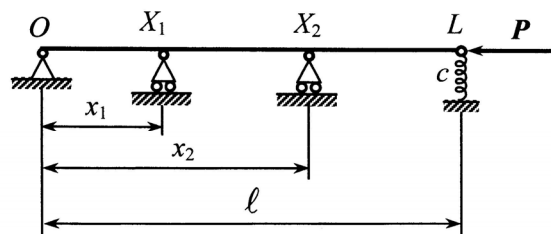


Рис. 2. Оптимизируемый стержень S

жесткости c крайней упругой опоры максимум КрС достигается при таком положении внутренней опоры, которому отвечает **полуизогнутая** форма потери устойчивости (рис. 1), имеющая недеформированный участок по одну сторону от этой опоры, а соответствующая КрС равна КрС однопролетного стержня BL , шарнирно опертого по концам на абсолютно жесткие опоры, и одновременно равна $c \cdot |BL|$.

Целью настоящей работы является определение таких положений X_1 и X_2 внутренних жестких шарнирных опор неразрезного трехпролетного стержня S длины ℓ (рис. 2), при которых его КрС $P(S)$ достигает максимума.

1. Принимаются следующие обозначения.

(MN) – однопролетный стержень, опертый по концам (в точках M и N) на абсолютно жесткие шарнирные опоры;

$[MN]$ и $(MN]$ – однопролетный стержень, жестко заделанный на левом конце M (соответственно на правом конце N) и опертый на абсолютно жесткий шарнир на противоположном конце;

$(MN, [MN]$ – однопролетный стержень, имеющий жесткую шарнирную опору (соответственно жесткую заделку) на конце M и податливую шарнирную опору на конце N ;

(MXN) , соответственно $(MXN, -$ двухпролетный стержень (неразрезной), образованный из (MN) , соответственно из $(MN, [MN]$, введением промежуточной жесткой шарнирной опоры в точке X ;

P_1^0, P_2^0, \dots – критические силы стержня (OL) , занумерованные в порядке возрастания;

A – узел (точка с нулевым прогибом) формы потери устойчивости (далее – формы) стержня (OL) , отвечающей его второй КрС P_2^0 ;

A_1 и A_2 – узлы формы стержня (OL) , отвечающие его третьей КрС P_3^0 ; a_1 и a_2 – соответственно расстояния узлов A_1 и A_2 от левой опоры O ;

R_j – реакция опоры X_j стержня S (положительная при действии вверх);

θ_j – угол поворота сечения X_j стержня S (положительный при повороте по часовой стрелке);

c_I и c_{III} – некоторые пограничные значения коэффициента жесткости податливой опоры L , равные соответственно $c_I = P_2^0/\ell$ и $c_{III} = P_3^0/(\ell - a_2)$ (значение c_{II} , $c_I \leq c_{II} \leq c_{III}$, будет определено ниже);

2. Далее систематически используются известные качественные результаты теории устойчивости стержневых систем о влиянии наложения связей на КрС [1]:

2.1. *КрС упругой системы, усиленной одной связью (жесткой либо упругой), не уменьшаются и не становятся больше следующей по номеру в спектре КрС системы до усиления.*

Отсюда следует, что если кратность КрС (число линейно независимых форм, отвечающих КрС) больше единицы, то эта КрС останется в спектре системы, усиленной одной связью.

2.2. *КрС остается КрС системы, усиленной связью, если связь наложена в обобщенном узле соответствующей формы, т.е. связь не препятствует ее реализации при той же сжимающей силе. При этом работа реакции связи на этой форме равна нулю и говорят, что связь ортогональна к форме.*

Отсюда следует, что основная (наименьшая по модулю) КрС не повышается после наложения связи, если связь наложена в обобщенном узле основной формы.

2.3. *Кратность КрС не уменьшается в результате наложения связи тогда и только тогда, когда связь наложена в обобщенных узлах каждой из соответствующих форм.*

Отсюда следует, что кратность основной КрС не изменяется в результате наложения связи тогда и только тогда, когда связь наложена в обобщенных узлах каждой из соответствующих форм.

2.4. *КрС в результате усиления одной связью может достичь максимума, равного ближайшей старшей по модулю КрС в спектре системы до усиления, только тогда, когда связь наложена в обобщенном узле каждой формы, отвечающей этой старшей КрС.*

2.5. Все КрС стержня (MN) простые (однократные); им отвечают формы с числом внутренних узлов, на единицу меньшим номера КрС в спектре.

2.6. Будет использован также следующий результат [5,6]: Если P – простая КрС многопролетного стержня, то $\partial P/\partial x_j = R_j\theta_j$ (при некоторой нормировке формы).

3. Как и для случая одной внутренней опоры, оптимальное положение внутренних опор зависит от значения c коэффициента жесткости податливой опоры.

3.1. Пусть $c \geq c_{III} = P_3^0/(\ell - a_2)$. Рассмотрим стержень (OL) , образованный из S удалением внутренних опор. Его спектр КрС состоит из спектра стержня (OL) , в котором все формы имеют нулевые поперечные смещения на опорах, и еще одной особой КрС, равной $P^* = c \cdot \ell$, которой отвечает прямолинейная форма. При $c \geq c_{III}$ выполняется неравенство $P^* > P_3^0$, означающее, что P_3^0 является третьей КрС стержня (OL) , которой отвечает форма с двумя узлами A_1 и A_2 . Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *При $c \geq c_{III}$ максимум $P(S)$ достигается при установке внутренних опор в узлах третьей*

форми стержня (OL) и равен $P_{\max}(S) = P_3^0$. При других положениях опор $P(S) < P_3^0$.

Для доказательства поместим опоры в A_1 и A_2 и разрежем стержень на этих опорах. Образовавшийся разрезной стержень имеет спектр, состоящий из спектров трех независимых однопролетных стержней (OA_1), (A_1A_2) и (A_2L), причем последний имеет особую КрС, равную $c(\ell - a_2) \geq c_{III}(\ell - a_2) = P_3^0$. Основная КрС каждого из этих стержней равна P_3^0 , поскольку узлы любой формы однопролетного шарнирно опертого стержня (OL) делят его на равноустойчивые участки. Поэтому P_3^0 является минимум трехкратной КрС разрезного стержня и остается КрС после наложения двух связей, устраняющих разрезы. Двумя связями поднять КрС выше третьей нельзя. Поэтому опоры в A_1 и A_2 , повышающие КрС стержня (OL до P_3^0 , дают максимум того, что могут дать две связи. Для других положений внутренних опор $P(S) < P_3^0$, т.к. эти положения не являются узлами третьей формы. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. При $c = c_{III}$ $P_{\max}(S) = P_3^0$ является двукратной. Одной из отвечающих ей форм является полуизогнутая, представленная на рис.1. При этом B совпадает с A_2 .

Теорема 2. При $c \leq c_1$ максимум $P(S)$ достигается при установке одной из опор на правом конце L стержня, а второй – в узле A второй формы стержня (OL), и равен $P_{\max} = P_2^0$. При $c < c_1$ для других положений опор $P(S) < P_2^0$. В случае равенства $c = c_1$ существует бесконечно много оптимальных положений опор, которые являются узлами линейных комбинаций второй формы стержня (OL) и прямолинейной формы стержня (OL , для которых $P_{\max} = P_2^0$).

Для доказательства отметим, что особая КрС стержня (OL , равная $P^* = c \cdot \ell \leq P_2^0$ теперь является второй в его спектре, а P_2^0 – третьей (при $c = c_1$ совпадающей со второй). Установка дополнительной опоры в L превращает (OL в (OL) и изменяет только особую КрС, увеличивая ее неограниченно. Еще одна опора повышает КрС (OL) до P_2^0 тогда и только тогда, когда она установлена в узле A второй формы стержня (OL). Для других положений дополнительных опор при $c < c_1$ $P(S) < P_2^0$, т.к. эти положения не являются узлами третьей формы стержня (OL , которая является второй формой стержня (OL).

В случае равенства $c = c_1$ P_2^0 является двукратной КрС в спектре стержня (OL с номерами 2 и 3. Ей отвечает бесконечно много форм, являющихся линейными комбинациями второй формы стержня (OL) и прямолинейной формы стержня (OL (рис. 3, эти формы получаются поворотом второй формы стержня (OL) вокруг опоры O). Часть из них имеет два узла. Установка дополнительных опор в эти узлы не искажает форму и сохраняет P_2^0 в спектре S , причем P_2^0 является основной, поскольку для стержня (OAL) она основная и простая, а S получается из (OAL) непрерывным перемещением опор, не изменяющим P_2^0 и не приводящим к кратности основной КрС. Если бы КрС (OAL) не была простой, можно было бы составить отвечающую ей форму с нулевым поворотом на опоре L . В сочетании с отсутствием прогиба в A это означало бы существование не менее двух точек перегиба формы между A и L , откуда следует, что этой форме отвечает КрС, равная 2-й КрС стержня, более короткого, чем (AL), и тем более, чем (OL), откуда $\text{КрС}(OAL) > 2$ -я $\text{КрС}(OL) = \text{КрС}(OAL) (\Rightarrow 1 > 1)$. Если бы при перемещении опор было достигнуто такое их раздельное положение X_1 и X_2 , при котором основная КрС стала кратной (и обязательно равной P_2^0), то можно было бы составить соответствующую ей форму с нулевой реакцией (и, соответственно, нулевым прогибом) на опоре L . При этом участок X_2L имеет на концах нулевые изгибающие моменты и, следовательно, изогнут под действием продольной силы $\text{КрС}(X_2L) > \text{КрС}(AL) = P_2^0$ (поскольку точки X_1 и X_2 , как видно из рис. 3, располагаются правее A), либо участок X_2L вообще не деформирован, что означает отсутствие поворота на опоре X_2 стержня (OX_1X_2), невозможность которого устанавливается так же, как только что для стержня (OAL). Таким образом, узлы двухузловых форм стержня (OL , отвечающих P_2^0 , являются оптимальными положениями опор X_1 и X_2 (включая предельный случай, когда эти узлы неограниченно сближаются). Теорема доказана.

3.2. Для рассмотрения случая $c_1 < c < c_{III}$ введем вспомогательные характеристики стержня (OL .

3.2.1. Варьирование положений опор не исключает возможности их совмещения, эквивалентного жесткой заделке в соответствующем сечении стержня. Такая связь (в принципе, две связи, устраняющие и прогиб, и поворот) разделяет стержень на два жестко заделанных участка, полностью независимых один от другого. Перемещение такой совмещенной опоры увеличивает КрС участка, который укорачивается, и одновременно уменьшает КрС оставшегося участка. Поэтому найдется единственное ее положение, при котором КрС обоих участков совпадут. Обозначая это значение через P^{**} , отметим следующие обстоятельства: 1) P^{**} – двукратная КрС стержня S , которой отвечают полуизогнутые формы, остающиеся недеформированными по одну сторону от заделки; 2) при возрастании коэффициента c от 0 до ∞ P^{**} монотонно возрастает, оставаясь всегда меньше P_3^0 ; при этом сечение D , в котором помещена заделка, перемещается влево, т.е. расстояние $d = d(c) = |OD|$ заделки D от левой опоры O (соответствующее значению c) является убывающей функцией c . Сила P^{**} обладает следующим экстремальным свойством.

Теорема 3. P^{**} является единственным максимальным значением $P(S)$ среди КрС стержней S , имеющих жесткую заделку в одном из внутренних сечений.

Доказательство опускается в виду элементарности.

3.2.2. Наряду с $P^{**} = P^{**}(c)$ вместе с характерной для нее точкой $D = D(c)$ введем в рассмотрение величину $\bar{P} = \bar{P}(c)$, равную КрС стержня (BL) , полученного из (OL) отсечением в точке $B = B(c)$, определяемой из условия $\bar{P} = \text{КрС}(BL) = c|BL|$. $\bar{P} = \bar{P}(c)$ и $B = B(c)$ – соответственно КрС двухпролетного стержня (OBL) и точка сопряжения соответствующей полуизогнутой формы (рис. 1), введенной в [2]. $\bar{P} = \bar{P}(c)$ является одной из КрС стержня (OBL) (основной, если $\text{КрС}(OB) \geq \bar{P}$, одной из старших – если $\text{КрС}(OB) < \bar{P}$; условия, при которых она будет основной, рассмотрены ниже в теореме 6), но, как легко видеть, остается одной из КрС многопролетных стержней, если поместить дополнительные внутренние опоры слева от B . $\bar{P} = \bar{P}(c)$ также обладает экстремальным свойством.

Теорема 4. $\bar{P} = \bar{P}(c)$ является единственным максимальным значением среди основных КрС стержней (XL) , отсеченных от (OL) , т.е. $\text{КрС}(XL) \leq \text{КрС}(BL) = \bar{P}$.

Действительно, $\text{КрС}(XL)$ равна меньшей из величин $\text{КрС}(XL)$ и $c \cdot |XL|$. При $x < b$ $\text{КрС}(XL) = \text{КрС}(XL) < \text{КрС}(BL) = \bar{P}(c)$. При $x > b$ $\text{КрС}(XL) = c \cdot |XL| < c \cdot |BL| = \text{КрС}(BL) = \bar{P}(c)$. Теорема доказана.

3.2.3. Следующий результат устанавливает соотношение между $P^{**}(c)$ и $\bar{P}(c)$.

Теорема 5. Существует единственное значение коэффициента жесткости c , при котором выполняется равенство $P^{**}(c) = \bar{P}(c)$. Это значение $c = c_{II}$ удовлетворяет неравенствам $c_I < c_{II} < c_{III}$, и при $c < c_{II}$ $\bar{P}(c) < P^{**}(c)$, а при $c > c_{II}$ $\bar{P}(c) > P^{**}(c)$.

Для доказательства заметим, что равенство $P^{**} = \bar{P}$ означает равенство КрС стержней $[DL]$ и (BL) . В силу определения точки B \bar{P} является двукратной КрС в спектре (BL) и останется однократной в спектре $[BL]$. Поэтому $\text{КрС}[DL]$ совпадет с $\text{КрС}(BL) = \text{КрС}[BL]$ только при совпадении точек D и B . При возрастании c точка B монотонно перемещается вправо, т.е. расстояние $b = b(c) = |OB|$ точки B от левой опоры O (соответствующее значению c) является возрастающей функцией c . Отсюда, с учетом убывания $d = d(c)$, следует единственность c_{II} . Для оценки c_{II} вычислим значения $b(c)$ и $d(c)$ при $c = c_I$ и $c = c_{III}$. При $c = c_I$ особая КрС стержня (OL) равна $P^* = c_I \cdot \ell = (P_2^0 / \ell) \cdot \ell = P_2^0$, т.е. P_2^0 является двукратной (с номерами 2 и 3) КрС стержня (OL) . Жесткая заделка (реализующая две связи, запрещающие прогиб и поворот) не может повысить КрС выше третьей. Поэтому $P^{**}(c_I) \leq P_2^0$. В то же время $P^{**}(c_I)$, будучи двукратной, должна в точности равняться P_2^0 , т.к. любая величина, меньшая P_2^0 , в результате наложения связей может стать не более чем однократной КрС.

Как установлено в [2], при $c < P_2^0 / |OA|$ (а, следовательно, и при $c = c_I$) точка B сопряжения полуизогнутой формы располагается левее узла A второй формы стержня (OL) . Точка $D = D(c_I)$, в которой следует поместить жесткую заделку для максимального повышения КрС, должна быть «обобщенным узлом» одной из форм стержня (OL) , отвечающих кратной силе P_2^0 . Как показывает рис. 4, эта форма, являющаяся

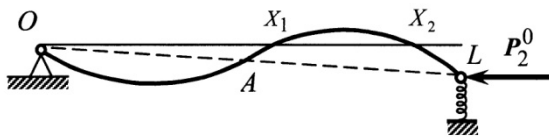


Рис. 3. Формы стержня (OL, отвечающие кратной критической силе P_2^0

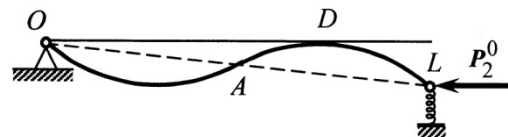


Рис. 4. Форма стержня (OL при кратности P_2^0 с обобщенным узлом D для жесткой заделки

линейной комбинацией второй формы стержня (OL) и прямолинейной формы стержня (OL, имеет единственный обобщенный узел D, расположенный правее A, откуда следует, что $b(c_1) < d(c_1)$.

Пусть теперь $c = c_{III}$. В этом случае $P^{**} < P_3^0$, т.к. две опоры могли бы поднять КрС до P_3^0 только, если бы они были установлены в узлах A_1 и A_2 третьей формы стержня (OL). Жесткая заделка, помещенная в A_2 , делит стержень (OL на независимые участки (OA_2) и $[A_2L$, причем, в силу определения c_{III} , точка $B = B(c_{III})$ совпадает с узлом A_2 . Поэтому КрС $[A_2L = \bar{P}(c_{III}) = c_{III}(\ell - a_2) = P_3^0$. Тогда КрС стержня, усиленного такой заделкой, меньшая P_3^0 , равна КрС менее устойчивой части (OA_2) , которая будет возрастать при ее укорочении, пока не достигнет $P^{**}(c_{III}) < P_3^0$ для некоторого (OD) , более короткого, чем (OA_2) . Таким образом $d(c_{III}) < b(c_{III}) = a_2$, откуда следует искомая оценка $c_1 < c_{II} < c_{III}$. Попутно установлено, что $\bar{P}(c_1) = \text{КрС}(BL) = c_1(\ell - b) < c_1 \cdot \ell = P_2^0 = P^{**}(c_1)$, $\bar{P}(c_{III}) = P_3^0 > P^{**}(c_{III})$. Отсюда, с учетом единственности c_{II} , следует, что при $c < c_{II}$ $\bar{P}(c) < P^{**}(c)$, а при $c > c_{II}$ $\bar{P}(c) > P^{**}(c)$. Теорема доказана.

3.2.4. Теорема 6. При $c < c_{III}$ существует такое расположение опор X_1 и X_2 , при котором основная КрС трехпролетного стержня S равна $\bar{P}(c) < P_3^0$. Ей соответствует полуизогнутая форма, в которой два левых пролета остаются горизонтальными.

В силу возрастания $b = b(c) = |OB|$ при $c < c_{III}$ точка $B(c)$ сопряжения полуизогнутой формы располагается левее узла $A_2 = B(c_{III})$ третьей формы стержня (OL), и $\bar{P}(c) < \bar{P}(c_{III}) = P_3^0$. Стержень (OB), более короткий, чем (OA_2) , имеет более высокий спектр, в частности 2-я КрС (OB) больше 2-й КрС (OA_2) , равной P_3^0 . Если поместить внутреннюю опору X_1 в узел второй формы стержня (OB), КрС образованного двухпролетного стержня (OX_1B) станет равной 2-й КрС (OB), большей $P_3^0 > \bar{P}(c)$. Тогда в разрезном трехпролетном стержне OL, полученном введением шарнира в сечении B, основная КрС совпадает с двукратной КрС участка (BL, равной $\bar{P}(c)$. После устранения разреза КрС останется равной $\bar{P}(c)$, и ей будет отвечать полуизогнутая форма, ортогональная связи, устраняющей разрез. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. В силу непрерывности существует некоторая окрестность узла второй формы стержня (OB), в которую можно помещать опору X_1 , не нарушая неравенства КрС $(OX_1B) \geq \bar{P}(c)$. Поэтому существует бесконечно много положений, описанных в теореме 6. Можно доказать, что КрС (OX_1B) монотонно убывает при удалении опоры X_1 от узла второй формы стержня (OB). Поэтому рассматриваемая область (допустимых положений) односвязна.

З а м е ч а н и е 2. При установке опоры X_1 на границе этой области КрС $(OX_1B) = \bar{P}(c)$ и $\bar{P}(c)$ становится двукратной КрС стержня S. При $c > c_{II}$ правая граница этой области лежит левее B. При $c = c_{II}$ она совпадает с B.

3.3. Переходя к отысканию оптимального положения внутренних опор, доставляющего максимум КрС в диапазоне $c_1 < c < c_{III}$, разделим этот диапазон на две части.

3.3.1. Теорема 7. При $c_{II} < c < c_{III}$ оптимальными являются расположения опор, описанные в теореме 6 и замечаниях к ней, а отвечающая им максимальная КрС равна $P_{\max}(S) = \bar{P}(c)$.

Предположим противное, т.е. что $P_{\max} > \bar{P}(c)$ и рассмотрим различные возможные варианты.

Случай совмещения опор следует отбросить, т.к. согласно теореме 3 максимум КрС, который может обеспечить жесткая заделка, равен $P^{**}(c) < \bar{P}(c)$ при $c > c_{II}$ (теорема 5).

Т7.1. Предположим, что максимум КрС достигается при раздельном положении опор и является простым. Тогда, в силу 2.6, в этом положении на каждой опоре должны равняться нулю произведения $R_1\theta_1 = R_2\theta_2 = 0$,

где R_1 и R_2 – опорные реакции, θ_1 и θ_2 – углы поворота сечений на опорах. Рассмотрим следующие случаи.

T7.1.1. $R_1 = R_2 = 0$. Опоры находятся в узлах одной из форм стержня (OL , имеющей не менее двух узлов). Это может быть или форма стержня (OL) с номером не ниже 3, или двухузловая линейная комбинация второй формы стержня (OL) с прямолинейной в случае кратности P_3^0 в спектре (OL). Вторая из них не существует при $c > c_1$. Первая не может быть основной при $c < c_{III}$. Чтобы в этом убедиться, поместим опоры в узлы A_1 и A_2 третьей формы стержня (OL) и разрежем стержень в A_2 . Спектр образованного разрезного стержня состоит из спектров левого участка (OA_1A_2) с внутренней опорой в A_1 и правого участка (A_2L). Каждый из спектров содержит P_3^0 , но для (A_2L) она не является основной, т.к. существует еще особая КрС (A_2L), равная $c(\ell - a_2) < c_{III}(\ell - a_2) = P_3^0$. Связь, устраняющая разрез, не ортогональна всем формам разрезного стержня, отвечающим P_3^0 . Поэтому после устранения разреза получится стержень с КрС, меньшей P_3^0 , откуда следует, что все многоузловые формы стержня (OL) отвечают старшим КрС, а для основной формы равенства $R_1 = R_2 = 0$ не выполняются.

T7.1.2. $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Основная форма стержня S не может иметь более одного деформированного пролета. В противном случае, установив жесткие защемления на опорах, образуем стержень с той же КрС, но имеющей кратность не менее 2. Это значит, что до установки защемлений существовала низшая КрС, которая и была основной. При потере устойчивости на концах единственного деформированного пролета изгибающий момент равен нулю, откуда следует, что этот пролет изгибается по форме стержня, шарнирно опертого по концам. Условие $\theta_1 = \theta_2 = 0$ исключает изгиб пролетов, опертых на жесткие опоры. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае потеря устойчивости происходит по полуизогнутой форме, в которой изгибается только правый пролет X_2L , имеющий упругую опору. Тогда для него $X_2 = B$, КрС = $\bar{P}(c)$, и мы имеем дело со случаем, рассмотренным в теореме 6.

T7.1.3. $\theta_1 = 0, R_2 = 0$. Как и в п. T7.1.2, заключаем, что форма должна быть деформирована только по одну сторону от опоры X_1 , причем изогнутость участка OX_1 несовместима с условием $\theta_1 = 0$. Участок X_1L в силу условия $R_2 = 0$ изогнут по форме, которая является линейной комбинацией одной из высших форм стержня (X_1L) и прямолинейной формы стержня (X_1L (иначе не выполнено условие $\theta_1 = 0$)). При этом комбинация с первой или второй формами при $\theta_1 = 0$ не имеет узлов внутри X_1L . Поэтому рассматриваемая форма может быть порождена минимум третьей формой стержня (X_1L), которой отвечает КрС, большая 3-й КрС более длинного стержня (OL), равной P_3^0 . Это противоречит условию $P_{\max} \leq P_3^0$, откуда следует, что рассматриваемый случай не может реализоваться на основной форме.

T7.1.4. $R_1 = 0, \theta_2 = 0$. Форма должна быть недеформирована по одну сторону от опоры X_2 . Как и в п. T7.1.3., прямолинейность участка X_2L исключается. Поэтому приходим к той же полуизогнутой форме, что и в п. T7.1.2.

T7.2. Предположим теперь, что максимум $P_{\max}(S)$ достигается при раздельном положении X_1 и X_2 опор и является кратным.

Введем разрез в X_2 и рассмотрим спектр образованного разрезного стержня (рис. 5). Он состоит из спектров двухпролетного стержня (OX_1X_2) с внутренней опорой в X_1 и стержня (X_2L , который, в свою очередь, включает спектр стержня (X_2L) и особую КрС, равную $c \cdot |X_2L|$.

T7.2.1. Случай, когда вторая КрС стержня (OX_1X_2) меньше КрС (X_2L не представляет интереса, т.к. при этом именно она после устранения разреза должна равняться двукратной КрС стержня S и, будучи меньше КрС (X_2L , будет меньше \bar{P} (теорема 4), что противоречит предположению $P_{\max}(c) > \bar{P}(c)$.

T7.2.2. Кратность основной КрС после устранения разреза может появиться в следующих случаях:

- 1) простая основная КрС разрезного стержня достигла его второй КрС;
- 2) двукратная основная КрС разрезного стержня осталась двукратной;
- 3) первоначально основная КрС была трехкратной.

Первый (соответственно второй) случай возможен, когда связь ортогональна всем формам, отвечающим 2-й (соответственно 1-й) КрС разрезного стержня. Легко видеть, что связь, устраняющая разрез, этим требованиям не удовлетворяет, т.к. среди форм, отвечающих его 1-й и 2-й КрС (за исключением, возможно, случая, отбракованного в п. T7.2.1), обязательно присутствуют формы с изломом в разрезанном сечении (рис 5). Проверка этого факта нетривиальна лишь в случае (в) основной формы стержня (OX_1X_2) при

недеформированном участке X_2L . Если бы излома не было, это означало бы, что на опоре X_2 стержня (OX_1X_2) отсутствует поворот. Невозможность этого установлена при доказательстве теоремы 2.

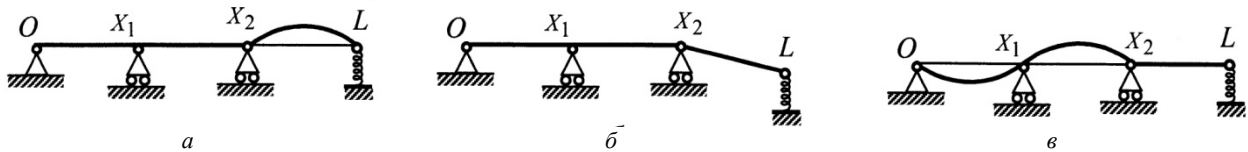


Рис. 5. Три первые формы разрезного стержня. К доказательству теоремы 7

Следовательно, кратность P_{\max} возможна только при ее тройной кратности в спектре разрезного стержня, т.е. при $P_{\max} = \text{KpC}(OX_1X_2) = \text{KpC}(X_2L) = c \cdot |X_2L| = \bar{P}(c)$. Этот случай уже был рассмотрен в замечании 2 к теореме 6.

Т.о. предположение о существовании положений, для которых $P_{\max} > \bar{P}(c)$ неверно, и все возможные оптимальные положения уже описаны в теореме 6 и замечаниях к ней. Теорема доказана.

3.3.2. Теорема 8. При $c_1 < c < c_{II}$ $P_{\max}(S)$ достигается при совмещении опор, когда они реализуют жесткую заделку, установленную в точке D , делящей стержень на две равноустойчивые части, и равен $P_{\max}(S) = P^{**}$.

Для доказательства заметим, что согласно теореме 5 при $c < c_{II}$ $P^{**}(c) > \bar{P}(c)$. Согласно теореме 3 среди всех совмещенных положений опор максимум KpC достигается при установке их в точке D и равен $P^{**}(c)$. Остается рассмотреть всевозможные отдельные положения опор. При этом встретятся все те случаи, которые рассматривались при доказательстве теоремы 7 и которые приводят к полуизогнутой форме с KpC , равной $\bar{P}(c) < P^{**}(c)$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. В случае равенства $c = c_{II}$ точки B и D совпадают, и мы сталкиваемся со случаем, описанным в замечании 2 к теореме 6. При этом оптимальное положение правой внутренней опоры – точка B , левая опора может размещаться всюду в пределах некоторого отрезка, имеющего B своей правой границей, и $P_{\max} = P^{**} = \bar{P}$ и является двукратной.

Выводы. Объединяя результаты, содержащиеся в теоремах 1, 2, 7 и 8, полный набор оптимальных положений опор и соответствующих им максимальных значений KpC можно описать следующим образом:

1) При $c \leq c_1$ максимум $P(S)$ достигается при установке одной из опор на правом конце L стержня, а второй – в узле A второй формы стержня (OL), и равен $P_{\max} = P_2^0$. При строгом неравенстве $c < c_1$ это положение единственно. В случае равенства $c = c_1$ оптимальных положений бесконечно много. Они являются точками пересечения формы, изображенной на рис.3, с горизонталью, если поворачивать ее вокруг опоры O . В это множество входит как предельный случай и жесткая заделка в сечении D (рис.4).

2) При $c_1 < c < c_{II}$ P_{\max} достигается при совмещении опор, когда они реализуют жесткую заделку, установленную в точке D , делящей стержень на две равноустойчивые части, и равен $P_{\max} = P^{**}$, где P^{**} , $P_2^0 < P^{**} < P_3^0$, определено в п. 3.2.1.

4) При $c_{II} \leq c < c_{III}$ оптимальными являются расположения опор, при которых правая внутренняя опора находится в точке B соответствующей полуизогнутой формы, а левая – в любой точке некоторого отрезка, содержащего узел второй формы стержня (OB); потеря устойчивости происходит по полуизогнутой форме и максимальная KpC равна $P_{\max}(S) = \bar{P}(c)$, где $\bar{P}(c)$ – KpC , отвечающая полуизогнутой форме, определенная в п. 3.2.2; если левая из внутренних опор находится на границе допустимого отрезка, KpC $\bar{P}(c)$ становится двукратной и, кроме полуизогнутой, существуют еще одна базисная независимая форма потери устойчивости.

5) При $c \geq c_{III}$ максимум $P(S)$ достигается при установке внутренних опор в узлах третьей формы стержня (OL) и равен $P_{\max} = P_3^0$.

Полученные результаты позволяют глубже осознать связь устойчивости продольно сжатого стержня с положением его промежуточных опор, что может быть использовано при проектировании и эксплуатации инженерных сооружений. Продолжением предложенного исследования должны стать задачи, связанные с расширением условий опирания, в частности с рассмотрением многопролетных стержней при конечной жесткости крайних и промежуточных опор, а также с расширением разнообразия конфигураций рассматриваемых стержневых систем.

Анотація. Розшукуються такі положення внутрішніх шарнірних опор трьохпролітного стрижня, стисненого постійною по довжині осьювою силою, при яких його критична сила досягає максимуму. Метод дослідження використовує переважно якісні результати теорії стійкості стрижневих систем, що відносяться до впливу накладення і перерозподілу в'язей на їх критичні сили. Встановлюються якісні характеристики цих положень в залежності від значення жорсткості кінцевої опори, а також описуються характерні якісні особливості відповідних форм втрати стійкості і відповідних критичних сил. Зокрема виявлено, що при деяких умовах максимальним критичним силам відповідають особливі напівзігнуті форми втрати стійкості, окремі фрагменти яких залишаються недеформованими, а інші ділянки вигинаються за формами, що є рішеннями більш простих задач. Результати роботи дозволяють глибше усвідомити вплив положення проміжних опор трьохпролітного стрижня на його стійкість і використовувати це при проектуванні й експлуатації інженерних споруд.

Ключові слова: втрата стійкості, стиснутий стержень, трьохпролітний стержень, пружна кінцева опора, напівзігнута форма, критична сила, оптимізація

Abstract. In this paper, locations of the intermediate hinge supports of a three-span rod compressed by the axial force constant along the rod length are searched at which the critical force reaches a maximum. Method of the study uses mainly qualitative results of the theory of stability of rod systems relating to the impact of the imposition and redistribution of constraints to their critical force. The qualitative characterizations of these locations, depending on the stiffness of end support, are developed and the characteristic qualitative features of the relevant buckling modes and corresponding critical forces are described. In particular discovered that under certain conditions the maximum critical force corresponds the special semicurved form of buckling, some fragments of which remain undeformed, while the remaining sections are bent in the shapes that are the solutions of simpler problems. The results allow a better understanding of the influence of the position of intermediate supports of three-span rod on its stability and use it in the design and operation of engineering structures.

Keywords: buckling, compressed rod, three-span rod, elastic end support, critical force, semicurved form, optimization

Библиографический список использованной литературы

1. Нудельман Я. Л. Методы определения собственных частот и критических сил для стержневых систем / Я. Л. Нудельман – М.-Л.: ГТТИ, 1949. – 176 с.
2. Бекшаев С. Я. Об оптимальном расположении промежуточной опоры продольно сжатого стержня / С. Я. Бекшаев // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. Вип. №60. Одеса. – 2015. – с. 400 – 406.
3. Бекшаев С. Я. Качественные методы в задачах повышения устойчивости сжатых стержней / С. Я. Бекшаев // Вісник Київського національного університету технологій та дизайну. Серія «Технічні науки». № 3 (98), 2016. с. 74 – 82.
4. Бекшаев С. Я. Полуизогнутые формы потери устойчивости и их экстремальные свойства. Некоторые задачи оптимизации сжатых стержней / С. Я. Бекшаев // Современные проблемы естественных наук. Тр. 5-й международной научной конференции «Тараповские чтения», Харьков, 1-15 марта 2016 г.
5. Нудельман Я. Л. Влияние расположения упругих опор на продольный изгиб многопролетного стержня / Я. Л. Нудельман, Д. М. Гитерман, С. Я. Бекшаев // «Реферативная информация о законченных научно-исследовательских работах в вузах Украинской ССР. Строительная механика и расчет сооружений». Вып.7. Киев, «Вища школа», 1976, – с. 18.
6. Бекшаев С.Я. К вопросу об оптимальном расположении масс и опор вибрирующего стержня / С. Я. Бекшаев, Л. В. Кошкин, Я. Л. Нудельман // «Судостроение и судоремонт». Вып. VII. М., Рекламинформбюро ММФ, 1976, с. 64 – 67.

References

1. Nudelman, Ya.L. (1949), *Metody opredeleniya sobstvennykh chastot i kriticheskikh sil dlya sterzhnevyykh sistem* [Methods of determination of natural frequencies and critical forces of bar systems], GITTL, Moscow–Leningrad, Russian.
2. Bekshaev, S.Ya. (2015), “On the optimal location of the intermediate support of longitudinally compressed bar”, *Ob optimalnom raspolozhenii promezhutochnoy opory prodolno szhatogo sterzhnya*, *Visnyk Odesjskoi derzhavnoji akademiji budivnyctva ta arkhitektury*, Odessa, no 60, pp. 400 – 406.
3. Bekshaev, S.Ya. (2016) “Qualitative methods in problems of increase of stability of compressed bars”, *Kachestvennye metody v zadachah povyshenia ustojchivosti szhatyh sterzhnej*, *Visnyk Kyivivs'koho natsional'noho universytetu tekhnolohiy ta dizaynu*, Seriya “Tekhnichni nauky”, no 3 (98), pp. 74 – 82.
4. Bekshaev, S.Ya. (2016), “Half-curved forms of buckling and its extremal properties. Some optimisation problems for compressed rods”, *Poluizognutye formy poteri ustojchivosti i ih ekstremal'nye svojstva. Nekotorye zadachi optimizatsii szhatyh sterzhney*, *Contemporary problems of natural sciences. Proc. of 5-th international scientific conference “Tarapov readings”*, Kharkov, Ukraine, March, 1 – 15.
5. Nudelman, Ya.L., Giterman, D.M. and Bekshaev, S.Ya. (1976), *Vliyanie raspolozheniya uprugih opor na prodol'ny izgib mnogoproliotnogo sterzhnya* [Influence of location of elastic supports on buckling of multispan bar], “Abstract information on the completed scientific research in the universities of the Ukrainian SSR, Structural mechanics and design of structures”, no 7, “Vyshcha shkola”, Kiev, Ukraine.
6. Bekshaev, S.Ya., Koshkin, L.V. and Nudelman Ya.L. (1976), “To the question on optimal location of mass and supports of vibrating bar”, [K voprosu ob optimalnom raspolozhenii mass i opor vibriruyushego sterzhnya], “Shipbuilding and ship repair”, Moscow, Russian, no VII, pp. 64 – 67.

Подана до редакції 21.09.2016