

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ НАГРУЖЕНИИ СИММЕТРИЧНЫМ ИЗГИБОМ И КРУЧЕНИЕМ

Golub V., Krizhanovskij V., Pelykh V.

National Academy of Sciences of Ukraine S.P. Timoshenko Institute of Mechanics (ut4ura@mail.ru)

### ON SOME METHOD OF THE FATIGUE LIFETIME CALCULATION UNDER COMBINED COMPLETELY REVERSED CYCLIC BENDING AND TORSION

*Решается задача расчета долговечности сплошных образцов и тонкостенных трубчатых образцов металлических материалов вследствие усталости при условии одновременного нагружения симметричным циклическим изгибом и симметричным циклическим кручением. Решение строится исходя из нелинейной модели предельного состояния, которая определяет зависимость между амплитудами напряжений цикла в форме степенной трансцендентной функции. Решения апробированы экспериментально на примере расчета долговечности вследствие усталости образцов из цветных сплавов, легированных сталей и жаропрочных сплавов.*

*Ключевые слова:* многоцикловая усталость, сплошные призматические образцы, тонкостенные трубчатые образцы, изотропные металлические материалы, комбинированный циклический изгиб с кручением, симметричное нагружение, усталостная долговечность.

**Введение.** Многие ответственные детали современных машин в процессе эксплуатации подвергаются воздействию сложного комбинированного циклического нагружения [1-3]. Так, например, на шейку коленчатого вала двигателя внутреннего сгорания одновременно действуют переменные крутящий и изгибающий моменты, фюзеляж самолета испытывает воздействие комбинаций циклического наддува, изгиба и кручения, а крыло самолета – воздействие комбинаций циклического изгиба, кручения и перерезывающей силы.

Одной из основных причин преждевременного выхода из строя таких элементов конструкций является многоосная усталость – наиболее опасный и трудно предсказуемый вид разрушения.

Однако, решению задач многоосной усталости при различных видах комбинированного нагружения посвящено ограниченное число экспериментальных и теоретических работ. Наиболее исследованной является двухосная усталость при совместном синфазном действии симметричного циклического изгиба и симметричного циклического кручения. В этой области накоплен необходимый объем первичных экспериментальных данных и предприняты попытки сформулировать на этой основе уравнения предельного состояния. Наиболее обоснованными представляются уравнения эллиптического вида [1-4], хорошо согласующиеся с экспериментальными данными для некоторых пластичных материалов [5]. Для большинства же конструкционных материалов эти уравнения оказались непригодными [3]. Что касается расчета усталостной долговечности при совместном действии циклического изгиба и циклического кручения, то такая задача не решалась.

В работе [6] модель предельного состояния задается в форме степенной трансцендентной функции и апробируется экспериментально на широком классе металлических и композитных материалов при одноосном асимметричном растяжении-сжатии [7, 8]. На основе этой модели сформулированы эквивалентные напряжения и решены задачи расчета усталостной долговечности образцов материалов при варьировании статической компоненты [9, 10].

В настоящей работе модель предельного состояния в форме степенной трансцендентной функции обобщается на условия совместного синфазного нагружения циклическим изгибом и циклическим кручением и на этой основе решается задача расчета усталостной долговечности.

**§1. Постановка задачи.** Рассматривается усталостное разрушение сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых образцов при комбинированном нагружении циклическим симметричным изгибающим и крутящим моментами.

В этих условиях нагружения реализуется переменное во времени двухосное напряженное состояние. Нормальная  $\tilde{\sigma}$  и касательная  $\tilde{\tau}$  компоненты переменного напряженного состояния задаются условиями

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} = \sigma_a \sin 2\pi n \\ \tilde{\tau} = \tau_a \sin 2\pi n \end{cases}, \quad (1.1)$$

где  $\sigma_a$ ,  $\tau_a$  – амплитудные значения нормальной и касательной компонент соответственно;  $n$  – число циклов нагружения.

Считается далее, что амплитудные значения  $\sigma_a$  и  $\tau_a$  циклических напряжений изгиба и кручения не зависят от времени (стационарный режим), не превышают пределов текучести материала и достаточно быстро (частота нагружения  $f \geq 10$  Гц) изменяются от цикла к циклу. В этом случае усталостное разрушение реализуется в многоциклового области, где число циклов до разрушения  $n_R \geq 10^5$ . Кроме того, уравнения (1.1) отражают условия синфазности напряжений, что, согласно теории пластичности, адекватно условию «простого нагружения» [4].

Обобщение модели предельного состояния в форме степенной трансцендентной функции, построенной в [6] для одноосного асимметричного растяжения-сжатия, на двухосное симметричное циклическое нагружение записывается в виде

$$\frac{\tau_a}{\tau_n} - \left[ \cos \left( \frac{\pi \sigma_a}{2 \sigma_n} \right) \right]^\eta = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_a}{\sigma_n} - \frac{2}{\pi} \left[ \arccos \left( \frac{\tau_a}{\tau_n} \right)^{\frac{1}{\eta}} \right] = 0, \quad (1.2)$$

где коэффициент  $\eta$  чувствительности материала к нормальным напряжениям определяются из соотношения

$$\eta = \frac{\lg \tau_a^0 - \lg \tau_n^0}{\lg \left[ \cos \left( \frac{\pi \sigma_a^0}{2 \sigma_n} \right) \right]}. \quad (1.3)$$

Здесь  $\tau_n$ ,  $\sigma_n$  – ограниченные пределы усталости при чистом кручении и чистом изгибе соответственно;  $\tau_a^0$ ,  $\sigma_a^0$  – амплитудные значения касательной и нормальной компонент в базовом единичном эксперименте ( $\tau_a^0 - \sigma_a^0$ );  $\tau_n^0$  – ограниченный предел усталости при чистом кручении, соответствующий числу циклов до разрушения при напряжениях  $\tau_a^0$  и  $\sigma_a^0$ .

Значения амплитуд напряжений  $\tau_a^0$  и  $\sigma_a^0$  в базовом единичном эксперименте выбираются с учетом соотношения между пределами усталости  $\tau_n$  и  $\sigma_n$ , которое устанавливается на основе критериев разрушения. В качестве таких критериев используются критерий максимальных нормальных напряжений и критерий удельной энергии изменения формы [1, 11].

В соответствии с критерием максимальных нормальных напряжений соотношение между  $\tau_a^0$  и  $\sigma_a^0$  задается условием

$$\tau_a^0 = \sigma_a^0, \quad (1.4)$$

а в соответствии с критерием удельной энергии изменения формы – условием

$$\tau_a^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_a^0. \quad (1.5)$$

Условие (1.4) может быть использовано для хрупких материалов, а условие (1.5) – для пластичных материалов.

Задача заключается в экспериментальном обосновании модели предельного состояния (1.2) и в определении числа циклов до разрушения  $n_R$  образцов металлических материалов в функции  $\tau_a$  и  $\sigma_a$ . Величина  $n_R$  трактуется далее как усталостная долговечность.

**§2. Обоснование модели предельного состояния.** Модель предельного состояния (1.2) может быть также записана в виде

$$\left( \frac{\tau_a}{\tau_n} \right)^{\frac{1}{\eta}} + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi \sigma_a}{2 \sigma_n} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi \sigma_a}{2 \sigma_n} \right)^4 = 1 \quad (2.1)$$

или соответственно в виде

$$\left( \frac{\tau_a}{\tau_n} \right)^{\frac{1}{\eta}} + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{\sigma_a}{\sigma_n} \right)^2 = 1, \quad (2.2)$$

которые получены из (1.2) разложением  $\cos(\cdot)$  в ряд и удержанием в разложении трех и соответственно двух членов.

Моделі предельного стану (1.2), (2.1) і (2.2) апробуються експериментально на задачах розрахунку залежності між предельними значеннями амплітуд  $\tau_a$  і  $\sigma_a$  циклічних нормальних і касательних напружень. Розрахункові і експериментальні дані порівнюються для гладких циліндричних і тонкостінних трубчатих зразків. Значення амплітуд циклічних напружень  $\tau_a^0$  і  $\sigma_a^0$  базового ідентифікуючого експерименту, а також значення коефіцієнта  $\eta$ , розраховані за формулою (1.3), для деяких з досліджуваних матеріалів наведено в таблиці.

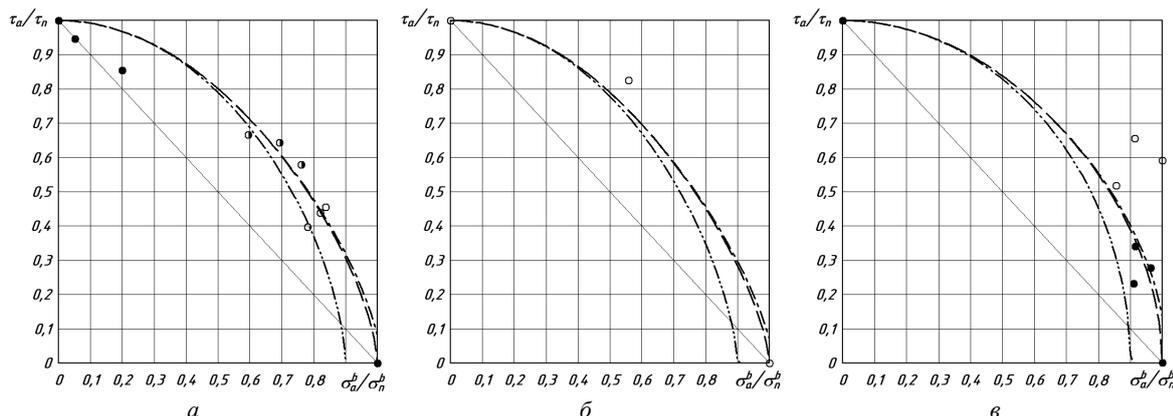
Таблиця

**Температура досліджень, значення амплітуд циклічних напружень  $\tau_a^0$  і  $\sigma_a^0$  базового ідентифікуючого експерименту і значення коефіцієнтів  $\eta$ ,  $q_b$ ,  $D_b$ ,  $q_t$ ,  $D_t$**

Матеріал	$\theta$ , °С	$\sigma_a^0$ , МПа	$\tau_a^0$ , МПа	$\eta$	$q_b$	$D_b$ , МПа <sup>-<math>q_b</math></sup>	$q_t$	$D_t$ , МПа <sup>-<math>q_t</math></sup>
Сталь 38ХНЗМФА	20	220	180	0,64	13,36	$7,76 \cdot 10^{-42}$	31,03	$5,89 \cdot 10^{-83}$
Титановий сплав ПТ-3В	20	277	219	0,68	5,33	$4,28 \cdot 10^{-21}$	3,70	$1,16 \cdot 10^{-15}$
Сталь 20	20	79	34	0,51	2,34	$3,12 \cdot 10^{-11}$	5,93	$9,42 \cdot 10^{-19}$

Експериментальні дані, використані при складанні таблиці і при порівнянні з результатами розрахунків, заимствовані з [12, 13, 14].

Результати розрахунків предельних напружень, виконані за рівняння (1.2), (2.1) і (2.2) для деяких з досліджуваних матеріалів, нанесені на рис. 1 лініями. Точками нанесені експериментальні дані для гладких (сталь 38ХНЗМФА і сплав ПТ-3В) і для тонкостінних трубчатих (сталь 20) зразків.



**Рис. 1. Розрахункові (лінії) і експериментальні (точки) діаграми предельних напружень сталі 38ХНЗМФА (а), титанового сплаву ПТ-3В (б) і сталі 20 (в) при комбінованому навантаженні циклічним вигином і циклічним крученням: (---) – розрахунки за рівнянням (1.2); (- · -) – розрахунки за рівнянням (2.1); (—) – розрахунки за рівнянням (2.2)**

Получено, як видно, повністю задовільне узгодження результатів розрахунків, виконаних за всіма трьома варіантами моделі предельного стану, з експериментальними даними. Максимальна похибка становить 37% і отримана для тонкостінних трубчатих зразків зі сталі 20 (див. рис. 1.в). В інших випадках похибка не перевищує 20%.

**§3. Розрахунок усталостної довговічності.** Розв'язуються задачі розрахунку усталостної довговічності сплошних циліндричних і тонкостінних трубчатих зразків із ізотропних металічних матеріалів при комбінованому навантаженні циклічним вигином і циклічним крученням.

Задачі включають розрахунок усталостної довговічності  $n_R$  в функції амплітуди нормальних напружень  $\sigma_a$  по параметру амплітуди касательних напружень  $\tau_a$  і по параметру відношення  $\tau_a/\sigma_a$ , а також в функції максимального касательного напруження  $\tau_{max}$ . Розв'язок будується на основі моделі предельного стану (2.2), достатньо точно задовільняючої граничним умовам і експериментальним даним і близької по структурі до деяких емпіричних моделей.

**3.1. Усталостна довговічність сплошних циліндричних стержнів.** Задача розв'язується для випадку, коли усталостна довговічність є функцією амплітуди нормальних напружень і для випадку, коли усталостна довговічність є функцією максимальних касательних напружень.

Для залежності числа циклів до руйнування  $n_R$  від амплітуди нормальних напружень  $\sigma_a$  із (2.2) отримуємо рівняння

$$n_R = \frac{1}{D_b} \cdot \left[ 1 - (D_t n_R)^{\frac{1}{\eta q_t}} \tau_a^{\frac{1}{\eta}} \right]^{\frac{q_b}{2}} \cdot \left( \frac{2\sqrt{2}}{\pi \sigma_a} \right)^{q_b}, \quad (3.1)$$

где принято

$$\tau_n = \left[ \frac{1}{D_t n_R} \right]^{\frac{1}{q_t}} \quad \text{и} \quad \sigma_n = \left[ \frac{1}{D_b n_R} \right]^{\frac{1}{q_b}}. \quad (3.2)$$

Здесь  $q_t$ ,  $D_t$  и  $q_b$ ,  $D_b$  – коэффициенты, определяющие положение кривых усталости в плоскости « $n_R - \tau_a$ » и в плоскости « $n_R - \sigma_a$ » соответственно.

Значения коэффициентов  $q_t$ ,  $D_t$ ,  $q_b$ ,  $D_b$  определяются по результатам обработки экспериментальных данных на усталость при чистом кручении ( $\sigma_a = 0$ ) и при чистом изгибе ( $\tau_a = 0$ ). Задача сводится к минимизации функционалов вида

$$\Phi(q, D) = \sum_{j=1}^S \left\{ n_{Rj}(p_{aj}) - \left[ (1+q)D(p_a)^q \right]^{-1} \right\}^2 \quad (3.3)$$

где  $p_{aj}$ ,  $n_{Rj}$  – набор дискретных значений амплитуд циклических напряжений кручения ( $p_{aj} = \tau_{aj}$  при  $\sigma_{aj} = 0$ ) и изгиба ( $p_{aj} = \sigma_{aj}$  при  $\tau_{aj} = 0$ ) и соответствующих им чисел циклов до разрушения.

Значения коэффициентов  $q_t$ ,  $D_t$ ,  $q_b$ ,  $D_b$ , рассчитанные для выбранных материалов согласно (3.3), приведены в таблице.

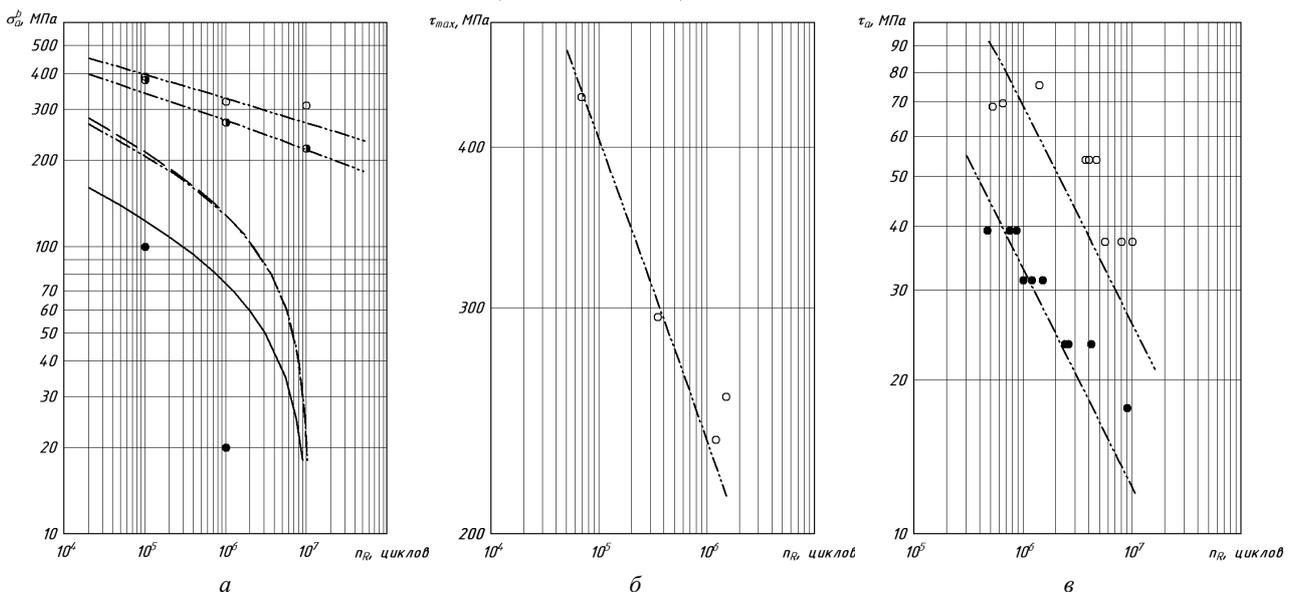
Результаты расчетов усталостной долговечности сплошных цилиндрических стержней из стали 30ХНЗМФА, выполненных по уравнению (3.1) с использованием значений коэффициентов, приведенных в таблице, представлены на рис. 2.а. Уравнение (3.1) решается численно методом итераций. Результаты расчетов сопоставлены с экспериментальными данными, заимствованными из [12].

Для зависимости числа циклов до разрушения  $n_R$  от максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}$  из (3.1) получаем уравнение

$$n_R = \frac{1}{D_b} \cdot \left[ 1 - (D_t n_R)^{\frac{1}{\eta q_t}} \left( \frac{2\nu\tau_{\max}}{\sqrt{1+4\nu^2}} \right)^{\frac{1}{\eta}} \right]^{\frac{q_b}{2}} \cdot \left( \frac{\sqrt{2(1+4\nu^2)}}{\pi\tau_{\max}} \right)^{q_b}, \quad (3.4)$$

где принято

$$\sigma_a = \frac{2\tau_{\max}}{\sqrt{1+4\nu^2}}; \quad \tau_a = \frac{2\nu\tau_{\max}}{\sqrt{1+4\nu^2}}; \quad \nu = \frac{\tau_a}{\sigma_a}.$$



**Рис. 2.** Расчетные (линии) и экспериментальные (точки) значения усталостной долговечности сплошных цилиндрических стержней из стали 30ХНЗМФА (а) при  $\tau_a = 123$  (○), 180 (◐), 285 (●) МПа и из титанового сплава ПТ-3В (б) при  $\nu = 0,79$  и тонкостенных трубчатых элементов из стали 20 (в) при  $\nu = 0,435$  (●) и 0,91 (○)

Результаты расчетов усталостной долговечности сплошных цилиндрических стержней из титанового сплава ПТ-3В, выполненных по уравнению (3.4) с использованием значений коэффициентов, приведенных в таблице и  $\nu=0,79$ , представлены на рис. 2.б. Уравнение (3.4) решается численно методом итераций. Результаты расчетов сопоставлены с экспериментальными данными, заимствованными из [14].

3.2. Усталостная долговечность тонкостенных трубчатых элементов. Задача решается для случая, когда усталостная долговечность является функцией амплитуды касательных напряжений.

Для зависимости числа циклов до разрушения  $n_R$  от амплитуды касательных напряжений  $\tau_a$  из (2.2) получаем уравнение

$$n_R = \frac{1}{D_t} \left[ 1 - \frac{1}{2} (D_b n_R)^{\frac{2}{q_b}} \left( \frac{\pi \tau_a}{2\nu} \right)^2 \right]^{\eta} \cdot \frac{1}{(\tau_a)^{q_t}}, \quad (3.5)$$

которое, также как и уравнения (3.1) и (3.4), решается численно методом итераций.

Результаты расчетов усталостной долговечности тонкостенных трубчатых элементов из стали 20, выполненных по уравнению (3.5) с использованием значений коэффициентов, приведены в таблице и значений  $\nu=0,435$  и  $0,91$ , представлены на рис. 2.в. Результаты расчетов сопоставлены с экспериментальными данными, заимствованными из [13].

**§4. Обсуждение результатов.** В целом, как это видно из данных, приведенных на рис.1 и 2, модель предельного состояния (2.2) и построенные на её основе уравнения (3.1), (3.4) и (3.5) для расчета усталостной долговечности призматических стержней и тонкостенных трубчатых элементов при совместном нагружении симметричным циклическим изгибом и симметричным циклическим кручением удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов. Максимальная погрешность при расчете предельного состояния составляет 30-40% и возникает в области больших амплитуд напряжений изгиба  $\sigma_a$  (рис. 1.а), где приближенная модель (2.2) не удовлетворяет граничным условиям при значениях  $\tau_a = 0$ , поскольку  $\sigma_a \neq \sigma_n$ . Максимальная погрешность по числу циклов до разрушения может достигать одного порядка (см. рис. 2.а) и возникает при значении амплитуды циклических напряжений  $\tau_a = 265$  МПа, сопоставимом с пределом текучести материала при кручении. Расчеты по точной модели (штриховая линия) и с использованием коэффициента  $\eta=2,0$  (сплошная линия) погрешность практически не уменьшили. В остальных случаях погрешность не превышает 40%.

**Заключение.** Решение задач расчета усталостной долговечности элементов конструкций при двухосном симметричном нагружении на основе моделей предельного состояния, связывающих предельные амплитуды циклических напряжений, является, по-видимому, наиболее обоснованным. В качестве одной из наиболее эффективных моделей предельного состояния может быть использована степенная трансцендентная функция. В качестве базовых экспериментов при определении параметров модели используются стандартные испытания гладких цилиндрических образцов на усталость при двух простых режимах нагружения и единичный идентифицирующий эксперимент на усталость при двухосном нагружении. В предлагаемом методе не учитывается возможность выхода материала элемента конструкции на физический предел усталости. Такая возможность должна задаваться дополнительным условием.

Предложенный метод может быть использован для расчета усталостной долговечности при комбинированном нагружении симметричным изгибом и кручением применительно к алюминиевым сплавам и композиционным материалам.

**Анотація.** Розв'язується задача розрахунку довговічності суцільних зразків та тонкостінних трубчатих зразків металевих матеріалів внаслідок втоми за умов одночасного навантаження симетричним циклічним згином та симетричним циклічним крученням. Розв'язок будується виходячи із нелінійної моделі граничного стану, що задає залежність між амплітудами напружень циклу у формі степеневі трансцендентної функції. Розв'язки апробовано експериментально на прикладі розрахунку довговічності внаслідок втоми зразків із кольорових сплавів, легованих сталей та жароміцних сплавів.  
**Ключові слова:** багаточиклова втома, суцільні призматичні зразки, тонкостінні трубчаті зразки, ізотропні металічні матеріали, комбінований циклічний згин з крученням, симетричне навантаження, довговічність на втому.

**Abstract.** The problem of fatigue lifetime calculation of material specimens under combined completely reversed cyclic bending and torsion loading is solved. Solid prismatic and thin walled tubular specimens made of isotropic metal materials have been the subject of this investigation. The method for solving of the problem considered is based on a nonlinear model of the boundary state under combined bending and torsion. The model establishes the relation between bending stress and torsion stress amplitudes is given by an exponential transcendental function. The resolving equations for the fatigue lifetime calculation have been formulated within the frame work of the boundary state model suggested. The material constants of the model were determined from pure cyclic bending and pure cyclic torsion test data as well as from identity combined bending and torsion test. The number of cycles to failure of specimens made of non-ferrous alloys, alloy steel and heat-resistant steel under combined bending and torsion as a function of

bending stress amplitude, shear stress amplitude and maximum shear stress have been calculated. Calculation results have been approved experimentally.

**Keywords:** multicycle fatigue, solid prismatic specimens, thin-walled tubular specimens, isotropic metal materials, combined cyclic bending and torsion, completely reversed loading, fatigue lifetime.

1. Хэйвуд Р.Б. Проектирование с учетом усталости // Перевод с английского. – Москва: Машиностроение, 1969. – 504 с.
2. Серенсен С.В., Когаев В.П., Шнейдерович Р.М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. Справочное пособие. – Москва: Машиностроение, 1975. – 488 с.
3. Воробьев А.З., Олькин Б.И., Стебнев В.Н., Родченко Т.С. Сопротивление усталости элементов конструкций. – Москва: Машиностроение, 1990. – 240 с.
4. Биргер И.А. Условие усталостной прочности при сложном напряженном состоянии // Сб. статей ЦИАМ.- №7. – Москва: Оборонгиз, 1952. – С. 31-39.
5. Gough H.J., and Pollard H.V. The strength of metals under combined alternating stresses // Proc. IME. – 1935. – Vol. 131, pp. 3-54.
6. Голуб В.П., Погребняк А.Д. Высокотемпературное разрушение материалов при циклическом нагружении. – Киев: Наук. думка, 1994. – 228 с.
7. Голуб В.П., Крижановский В.И., Погребняк А.Д. Метод расчета усталостной прочности металлических и композитных материалов при асимметричном многоцикловом нагружении // Прикл. механика. – 2004. – Том 40, №11. – С. 106-115.
8. Голуб В.П., Крижановский В.И., Погребняк А.Д. К расчету предельного состояния армированных пластиков и неориентированных полимеров при асимметричном многоцикловом растяжении-сжатии // Механика композитных материалов. – 2004. – Том 40, №1. – С. 65-82.
9. Голуб В.П., Пельх В.Н., Погребняк А.Д. Прогнозирование усталостной долговечности призматических металлических стержней при асимметричном растяжении-сжатии методом эквивалентных напряжений // Вісник Національного технічного університету України «КПІ». Машинобудування. – 2010. – №58. – С. 177-182.
10. Пелих В.М. Визначення довговічності конструкційних алюмінієвих сплавів за умови асиметричного розтягнення-стиснення // Наукові вісті Національного технічного університету „КПІ”. – 2011. – №6. С. 114-119.
11. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 312 с.
12. Казенина А.Д., Маневич С.Л., Филимонов Г.Н. Сопротивление усталости конструкционных сталей циклическим кручением с изгибом. Прочность материалов и элементов конструкций. – Ленинград: Изд-во Ленинградского кораблестроительного института. – 1985. – С. 40-46.
13. Панфилов Ю.А. Описание предельного состояния при переменной двухосной напряженности и его применение в расчетах. Сообщ. 1. Простое нагружение // Пробл. Прочности. – 1981, № 1. – С. 49-53.
14. Шаманин Ю.А. Усталостная прочность  $\alpha$ -титановых сплавов при синфазном действии переменных нормальных и касательных напряжений // Пробл. прочности. – 1984, №12. – С. 26-35.

#### REFERENCES

1. Hjejvud R.B. Proektirovanie s uchetom ustalosti. Perevod s anglijskogo. Moscow: Mashinostroenie, 1969, 504 p.
2. Serensen S.V., Kogaev V.P., Shnejderovich R.M. Nesuwaja sposobnost' i raschety detalej mashin na prochnost'. Spravochnoe posobie. Moscow: Mashinostroenie, 1975, 488 p.
3. Vorob'ev A.Z., Ol'kin B.I., Stebnev V.N., Rodchenko T.S. Soprotivlenie ustalosti jelementov konstrukcij. Moscow: Mashinostroenie, 1990, 240 p.
4. Birger I.A. Uslovie ustalostnoj prochnosti pri slozhnom naprjzhenom sostojanii. Sb. statej CIAM. Moscow: Oborongiz, 1952, no 7, pp. 31-39.
5. Gough H.J., and Pollard H.V. The strength of metals under combined alternating stresses. Proc. IME., 1935, Vol. 131, pp. 3-54.
6. Golub V.P., Pogrebnyak A.D. Vysokotemperaturnoe razrushenie materialov pri ciklicheskom nagruzhenii. Kyiv: Nauk. dumka, 1994, 228 p.
7. Golub V.P., Krizhanovskij V.I., Pogrebnyak A.D. International Applied Mechanics, 2004, Vol. 40, no 11. pp. 106-115.
8. Golub V.P., Krizhanovskij V.I., Pogrebnyak A.D. Mechanics of Composite Materials, 2004, Vol 40, no 1. pp. 65-82.
9. Golub V.P., Pelykh V.N., Pogrebnyak A.D. Journal of Mechanical Engineering of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", 2010, no 58, pp. 177-182.
10. Pelikh V.M. Research Bulletin of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", 2011, no 6. pp. 114-119.
11. Kachanov L.M. Osnovy mehaniki razrushenija. Moscow: Nauka, 1974, 312 p.
12. Kazenina A.D., Manevich S.L., Filimonov G.N. Prochnost' materialov i jelementov konstrukcij. [Durability of materials and elements of designs]. Leningrad: Izd-vo Leningradskogo korablestroitel'nogo instituta, 1985, pp. 40-46.
13. Panfilov J.A. Strength of Materials, 1981, no 1. pp. 49-53.
14. Shamanin J.A. Strength of Materials, 1984, no 12. pp. 26-35.