

Эволюция циркуляций в инерционных течениях несжимаемой жидкости в сферическом резервуаре

В.А. Ковалев

КПИ им. Игоря Сикорского, г. Киев, Украина

Received: 2 October 2017 / Accepted: 14 November 2017

Аннотация. Цель работы: представление и анализ результатов моделирования течений в сфере для построения строгой системы воздействия на инерционные течения жидкости. Приведены результаты численного моделирования инерционных осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости, целиком заполняющей сферический резервуар с жесткими стенками. Построены эпюры окружной компоненты скорости в экваториальной плоскости сферического резервуара и проведено сравнение с линейной моделью течения по методу Н.А.Слезкина для вязкой несжимаемой жидкости. Предлагаются результаты решения уравнений движения жидкости для нестационарного затухающего течения, проводится анализ распределения линий тока и циркуляционных структур в меридиональных плоскостях резервуара. В частности, установлен гидродинамический механизм развития затухающего течения и показана эволюция циркуляций в зависимости от времени процесса. Результаты исследований можно распространить на подобные течения в подвижных конструкциях другой конфигурации.

Ключевые слова: сферический резервуар, осесимметричное течение, циркуляционные структуры, окружная, радиальная и меридиональная компоненты вектора скорости.

Введение

В последние десятилетия исследования поведения жидкости в полостях твердых тел имеют широкое приложение к различным транспортным перевозкам жидких грузов, например, с помощью цистерн и нефтеналивных судов-танкеров. Кроме того, весьма актуальными представляются проблемы внутренних течений жидкого топлива на борту объектов ракетной и космической техники, влияние которого может быть весьма существенным из-за отсутствия при движении объекта, например, на орбите планеты, каких-либо точек опоры. Компенсационные мероприятия по предотвращению аварийных ситуаций, стабилизации траектории и режима движения объекта сопряжены с дополнительным расходом топлива, запасы которого на борту ограничены.

Исследования влияния жидкости на стенки сосудов и внутренние стабилизирующие устройства в виде кольцевых и радиальных перегородок также представляются достаточно актуальными с точки зрения определения эффективности силового воздействия на внутренние течения жидкости и минимально необходимой массы конструкций. Снижение суммарной массы внутренних устройств позволяет увеличить полезную нагрузку объекта, увеличить продолжительность полета объекта и надежность управления им на орбите.

Подобные задачи о внутренних течениях подразделяются на исследования в резервуарах, частично заполненных идеальной жидкостью, которые имеют наибольшее распространение в большом массиве научной информации. Второй группой задач, менее многочисленной и исследованной недостаточно полно, представляются работы, посвященные изучению поведения вязкой несжимаемой жидкости, целиком заполняющей резервуары различной геометрии [1]. Такие течения имеют вид осесимметричных вращений жидкости вокруг одной или нескольких осей симметрии резервуара и отличаются меньшими силовыми воздействиями на стенки по сравнению с частично заполненными резервуарами. Такие воздействия, как правило, представляются силами или круговыми моментами вязкого трения жидкости о стенки и динамического влияния на внутренние перегородки [2].

Указанные воздействия могут являться причиной угловой неустойчивости объекта, отклонений от штатной программы полета и требуют компенсации со стороны системы стабилизации объекта. В случаях

углового маневрирования объекта на орбите, например, для смены ориентации на Солнце или коррекции траектории движения, в автоматическую систему стабилизации необходимо вводить данные об инерционном поведении жидкости. Моделирование подобных течений в реальных условиях полета сопряжено с большими материальными затратами. Например, Национальным аэрокосмическим агентством (НАСА) США было выделено около 400 млн. долларов для гидродинамических исследований поведения жидкого топлива на борту космического объекта учеными Юго-западного исследовательского института (США) [3]. Однако, представляется наиболее рациональным и эффективным проведение модельных исследований в наземных лабораторных условиях с учетом критериев подобия и распространением результатов на натурные условия и объекты.

Постановка задачи и средства моделирования течений в лабораторных условиях

В лаборатории гидродинамики Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского» были проведены комплексные гидродинамические исследования замкнутых течений жидкости на специально разработанной экспериментально-аналитической базе. Комплекс средств включал в себя оригинальные конструкции экспериментальных стендов, методы моделирования, средства измерения и регистрации параметров течений, а также математические методы моделирования с помощью пакетов прикладных программ и численные методы решения уравнений движения жидкости [4, 5].

Целью настоящей работы является анализ результатов математического моделирования течений в сферическом резервуаре с помощью численного решения полных нестационарных уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости в форме Навье-Стокса с соответствующими начальными и граничными условиями с помощью методов конечных объемов и конечных элементов. Постановкой математической задачи предполагались предварительный разгон вращения жесткой сферической оболочки, целиком заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, до заданной угловой скорости и затем резкое торможение оболочки с одновременным исследованием нестационарного поля скоростей и давлений инерционного осесимметричного течения.

Согласно известным условиям моделирования осесимметричных течений рассматривалось половина продольного сечения сферы [4], а гипотеза о симметричности течения относительно экваториальной плоскости резервуара [5] позволяла рассматривать течения в масштабе квадранта сферы, что увеличивало вычислительный ресурс для решения подобной задачи. Таким образом, граничные условия для рассматриваемой задачи подразумевали равенство нулю скоростей жидкости на стенках и на вертикальной оси вращения резервуара.

С математической точки зрения, сферическая геометрия резервуара обладает множеством осей симметрии, что облегчает построение математической модели и численное моделирование течений. Поэтому задача о движении жидкости, целиком заполняющей сферу, привлекала внимание многих математиков. Например, Н.А.Слезкин [147] рассмотрел задачу о нестационарном движении вязкой несжимаемой жидкости при разгоне и торможении вращения сферической оболочки.

В уравнениях Навье-Стокса, выраженных в сферических координатах r , θ и φ он пренебрег нелинейными конвективными членами. В предположении об осесимметричности течения, когда все компоненты скорости не зависят от азимутального угла φ , выражение для окружной составляющей V_φ вектора скорости имеет вид

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} = \nu \left(\Delta V_\varphi - \frac{V_\varphi}{r^2} \right), \quad (1)$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости; Δ — оператор Лапласа.

Уравнение (1) выражает круговое движение жидкости в экваториальной плоскости без учета влияния центробежных сил инерции, действующих на частицы жидкости в период их разгона или торможения, а также не учитывает влияние конвективных ускорений. Решая уравнение (1) для изображения поперечной скорости V_φ^* и переходя к оригиналу, Слезкин находит корни функций Бесселя от мнимого аргумента. С помощью метода прямого и обратного преобразования Лапласа им получено выражение для скорости в виде экспоненциального ряда по убывающим степеням экспоненты

$$V_\varphi = \omega \cdot R \cdot \sin \theta \left[1 + 2 \cdot \left(\frac{a}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_k}{a^2} \cdot t} \times \frac{J_{\frac{3}{2}} \left(\frac{R}{a} \lambda_k \right)}{\lambda_k \cdot J_{\frac{3}{2}} (\lambda_k)} \right] \quad (2)$$

где λ_k — корни трансцендентного уравнения; $J_{3/2} \left(\frac{R}{a} \lambda_k \right)$ - функции Бесселя 3/2 порядка; ω – угловая скорость резервуара; t — время разгона или торможения жидкости.

Согласно Н.А.Слезкину, задачу о внезапном торможении равномерного вращения сферы с жидкостью с угловой скоростью ω до момента полного затухания азимутальной скорости также можно представить в виде экспоненциального ряда, причем величина скорости будет стремиться к скорости стенки

$$V_{\phi} = -2\omega \cdot R \cdot \sin \theta \left(\frac{a}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu \frac{\lambda_k}{a^2} t} \times \frac{J \left(\frac{R}{a} \lambda_k \right)}{\lambda_k \cdot J_{\frac{3}{2}} (\lambda_k)} \quad (3)$$

Из выражения (3) получена величина момента сил вязкого трения о стенки

$$M_z = \frac{16}{3} \pi \cdot \mu \cdot \omega \cdot a^3 \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu \frac{\lambda_k}{a^2} t} \quad (4)$$

Результаты расчета скорости V_{ϕ} и кругового момента M_z с помощью выражений (3) и (4) позволяют составить картину распределения скоростей и силовых воздействий по радиусу сферы и их зависимость от времени течения. Однако, отсутствие конвективных членов в уравнении (1) не позволяет установить нелинейные особенности развития течения и влияние на распределение окружной компоненты скорости вторичных циркуляционных течений в меридиональных плоскостях сферы. На рис.1 представлены результаты расчета профилей окружной скорости в различные моменты времени течения после внезапной остановки вращения сферы. Параболический характер распределения скорости свидетельствует о преобладающем влиянии сил вязкого трения и отсутствии нелинейностей, вызванных центробежными неустойчивостями, имеющими место во вращающихся течениях.

Начальные условия задачи выражают твердотельное вращение жидкости согласно зависимости азимутальной (окружной) скорости $u = \Omega \cdot R$, где Ω – начальная угловая скорость резервуара, R – расстояние контрольной точки до оси вращения. Зависимость во времени течения, согласно гипотезе Н.А.Слезкина [1], можно представить экспоненциальным рядом по убывающим степеням экспоненты

$$V_{\phi} = -2 \cdot \Omega \cdot R \cdot \sin \theta \cdot \left(\frac{a}{R} \right)^{\frac{3}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\nu \frac{\lambda_k}{a^2} t} \times \frac{J \left(\frac{R}{a} \lambda_k \right)}{\lambda_k \cdot J_{\frac{3}{2}} (\lambda_k)} \quad (5)$$

где λ_k — корни трансцендентного уравнения; $J_{3/2} \left(\frac{R}{a} \lambda_k \right)$ - функции Бесселя 3/2 порядка; t — время затухания скорости жидкости.

В течении, описываемом равенством (5), необходимо учитывать особенности геометрии резервуара и отсутствие четко обозначенного перехода границ между верхней (нижней) и боковыми стенками, как это имеет место в цилиндре [6]. Возможные невязки граничных условий из-за взаимного влияния течений в соседних слоях могут обуславливать неустойчивость численной расчетной схемы, поэтому сферическая область разбивалась на более мелкие элементы (порядка 295 000 элементов). Основной трудностью при численном моделировании представлялось количественное определение скоростей вторичных циркуляционных течений в меридиональных плоскостях сферы, которые определяют картину течения в азимутальной плоскости резервуара.

Направление циркуляционных течений подтверждает гипотезы Х.Гринспена [2] о структуре и характере развития во времени вторичных течений в ограниченных объемах. Например, в экваториальной плоскости имеет место радиальное течение, направленное от оси вращения сферы к периферии резервуара, имеющее вид спирали с центром на оси вращения. В верхней и нижней областях, а также в области оси вращения формируются соответственно нисходящие и восходящие циркуляции, что подтверждает общую гипотезу о симметричности течения в резервуаре при малых начальных угловых скоростях вращения оболочки. При возрастании чисел Рейнольдса, а соответственно компонент вектора скорости, условия симметрии относительно оси вращения, а также экваториальной плоскости сферы, могут не соблюдаться.

На рис.1 представлены результаты численного расчета течения в экваториальной плоскости сферы в сравнении с данными расчета профилей окружной скорости по Н.А.Слезкину, при малых числах Рейнольдса $Re=920$, когда достаточно велико влияние вязкой диффузии, а инерционные члены уравнений движения достаточно малы. Кроме того, можно наблюдать симметричность распределения окружной скорости с восходящим течением в левой части сечения сферы и ниспадающим – в правой, что соответствует результатам измерений в этой плоскости с помощью термоанемометрических датчиков скорости [6]. Формирование определенного направления циркуляционных течений обуславливается возникновением неравновесия между радиальным градиентом давления, центробежными силами инерции и кориолисовыми силами, которые могут вносить существенный вклад в дестабилизацию циркуляционного течения, являясь причиной дробления циркуляций на меньшие по масштабу структуры.

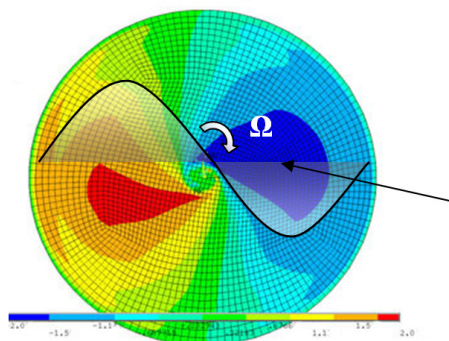


Рис. 1. Контурное изображение распределения окружной скорости на экваторе сферы при $Re_0=920$ в сравнении с результатами расчета по Н.А.Слезкину

Для прецизионного измерения сил трения жидкости о стенки $F_{тр}$ и динамического давления на внутренние перегородки использовалась специальная система измерения, основанная на применении тензометрических датчиков кругового момента и цифровой регистрирующей аппаратуры, позволяющей с достоверностью порядка 93% установить силовые характеристики течения [4]. Измеренные с помощью указанного стенда величины силовых параметров позволяют верифицировать результаты эмпирических расчетов и, с учетом критериальных комплексов, распространить данные на реальные условия движения и объекты.

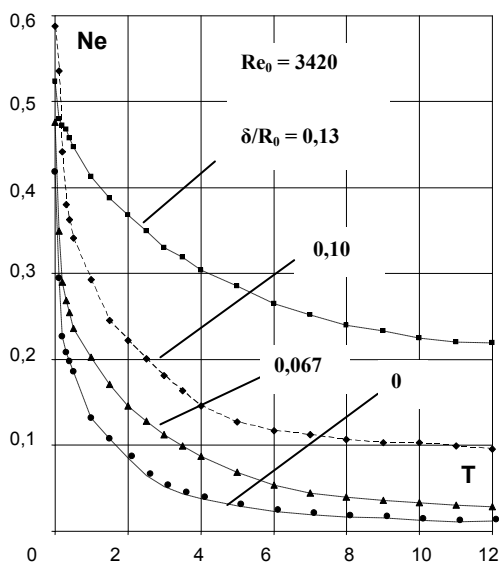


Рис. 2. Зависимость числа Ньютона Ne от времени течения T при различных зазорах между перегородкой и стенкой сферы $Z=0,2$, $Re_0=3420$

как в формировании спутного следа вмешиваются более динамичные течения в пристенной области течения. Таким образом, в случае течения с зазором силовое влияние жидкости представляется прогнозируемым не только в начальной стадии, но и при больших значениях T .

Рассмотренные зависимости позволяют сделать вывод о том, что для определения кругового момента $M_{кр}$ или суммарной силы вязкого трения $F_{тр}$, наиболее характерны начальная и основная стадии инерционного течения. В этот период достаточно велики не только центробежные силы инерции и градиенты давления, но и силы Кориолиса, взаимодействие которых обуславливает существование нелинейных распределений скорости. Учитывая важную роль пристенной области в течении с перегородками, на которую распространяется влияние пограничного слоя на стенках резервуара, представлялось целесообразным сопоставить результаты измерений для примыкающих к стенкам перегородок с отстоящими конструкциями.

Результаты численного расчета, позволили получить расчетные профили окружной скорости, которые представлены на рис.3 в сравнении с данными вычислений по Н.А.Слезкину. Анализ структуры профиля скорости позволил установить характерные зоны с твердотельным распределением скорости (зона 1),

При моделировании использовались непроницаемые плоские радиальные перегородки, примыкающие к внутренним стенкам резервуара и отстоящие от них с заданным зазором δ , изменяемым в диапазоне $\delta/R_0=0\dots0,2$. Дальнейшее увеличение расстояния δ от кромки перегородки до стенки резервуара не приводит к существенным изменениям картины обтекания ВСУ.

Анализ результатов экспериментальных исследований

Наиболее информативной с точки зрения количественной оценки силовых влияний жидкости и характера развития течения представляется зависимость числа Ньютона Ne от времени течения. Для определения характера изменения во времени параметра Ne на рис.2 представлены кривые его затухания от безразмерного времени T при различных зазорах между перегородкой и стенкой резервуара ($Re_0=3420$). Экспоненциальный характер кривых свидетельствует о достаточно быстром (почти на 75%) затухании величин Ne в начальной стадии течения $T=0\dots1$ для примыкающей к стенкам перегородки ($\delta/R_0 = 0$) при ширине перегородки $Z=b/R_0$.

Однако эта зависимость носит более плавный характер для течения с зазором, равным $\delta/R_0=0,13$, когда в пристенной области резервуара уже сформирована заторможенная область течения, смежная с внешней кромкой перегородки. В этом случае затухание скорости происходит вплоть до $T=23,0$, так

седловидным участком кривой (зона 2) и экстремумом скорости на границе с пристенным заторможенным течением (зона 3). Указанные результаты имеют качественное сходство с данными экспериментов с погрешностью не более 20...23% в исследованном диапазоне чисел Рейнольдса $Re=700...12500$.

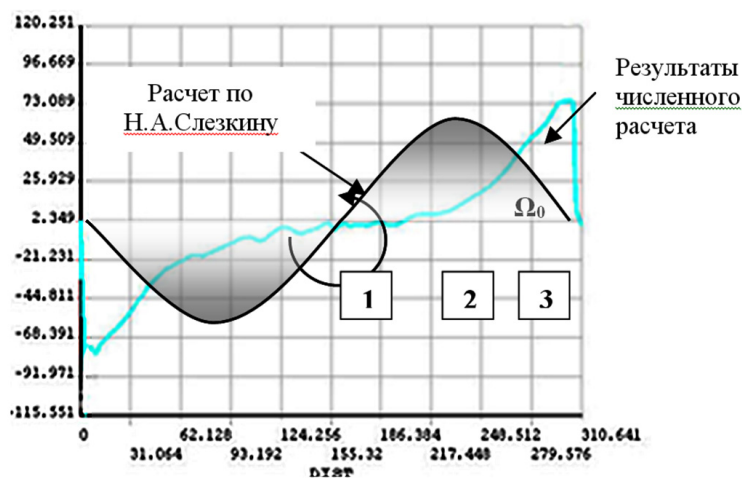


Рис. 3. Профили окружной скорости на экваторе сферы, полученные численным расчетом в сравнении с результатами Н.А.Слезкина [1] при $Re_0=920$

Прямо пропорциональное увеличение окружной скорости u при возрастании расстояния R до оси вращения резервуара дополняется резким снижением скорости в пристенной заторможенной области, характеризующейся сильным влиянием вязкой диффузии в течении. Верификация математической модели с помощью тестовых расчетов поля скоростей и давлений в экваториальной области цилиндра [6] свидетельствуют о корректности разработанной математической модели и правильном выборе граничных условий для задачи о течении в сфере. По результатам численного моделирования течений и характеру изменения полей окружной скорости и скоростей вторичных течений можно составить зависимости сил и круговых моментов вязкого трения жидкости о стенки резервуара. Сопоставление численных данных с результатами экспериментальных исследований позволяет количественно оценить корректность математической модели течений и составить полную трехмерную картину нестационарного течения в сфере.

По аналогии с оценкой структуры вторичных течений при изменении времени затухания скорости в цилиндре, на рис.3 приведена эволюция циркуляций в сфере во времени, где показаны вторичные течения, состоящие из четырех циркуляций при $T=2,34$, которые затем, при $T=12,7$ преобразуются в двухциркуляционные структуры [7, 8]. Как видно из рисунка, циркуляционная система состоит из базовой циркуляции, центр которой располагается на координатах $R=0,78$ и $\theta=\pi/4$ и трех более мелких структур (рис.3, а и б), которые при $T=10,7$ объединяются в одну циркуляцию. При этом скорость течения в пределах базовой циркуляции затухает, однако ее ориентация в пространстве остается постоянной.

В качестве еще одного примера эволюции циркуляций во времени в сфере можно привести результаты численного расчета при $Re=2150$, приведенные на рис.4, где в начале течения возникает устойчивая трехциркуляционная структура (рис.4, а). При возрастании времени $T=7,67$ она трансформируется в двухциркуляционную, которая существует до безразмерного времени $T=11,2$, а при достаточно больших значениях $T=15,3$ представляет собой одну циркуляцию. В данном случае базовая циркуляция располагается в экваториальной области сферы и только при больших значениях времени становится преобладающей во всем пространстве квадранта.

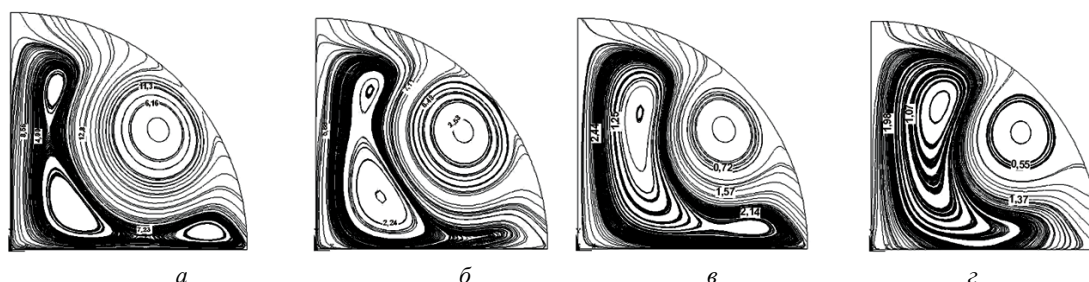


Рис. 4. Слияние четырех циркуляций в две при возрастании времени затухания окружной скорости течения в сфере по результатам численного моделирования при $Re_0=2500$: а- $T=2,34$; б- $6,13$; в- $10,7$; г- $12,7$

При числах Рейнольдса $Re=3750$ переход к двух-элементной циркуляции происходит примерно в таком же диапазоне окружных скоростей, что и течение, представленное на рис.4, однако оси циркуляций ориентированы вертикально. В свою очередь, переход к базовой циркуляции осуществляется при больших значениях безразмерного времени $T=15,3$, когда инерционные члены уравнений движения жидкости весьма малы и преобладают силы вязкого трения [7].

Как видно из рис.4 и 5, наиболее устойчивая циркуляция располагается на радиальной координате $R=0,7...0,85$ при меридиональном угле $\theta=40...47^\circ$ (рис.4 и 5,а...г), которая благодаря вязкой диффузии существует достаточно долго и теряет свою энергию лишь в заключительной стадии течения. При этом более мелкие разноориентированные циркуляционные структуры, в которые вовлечены приосевые и азимутальные течения, обладают меньшим количеством движения, однако более активно участвуют в перераспределении структуры меридионального течения [8].

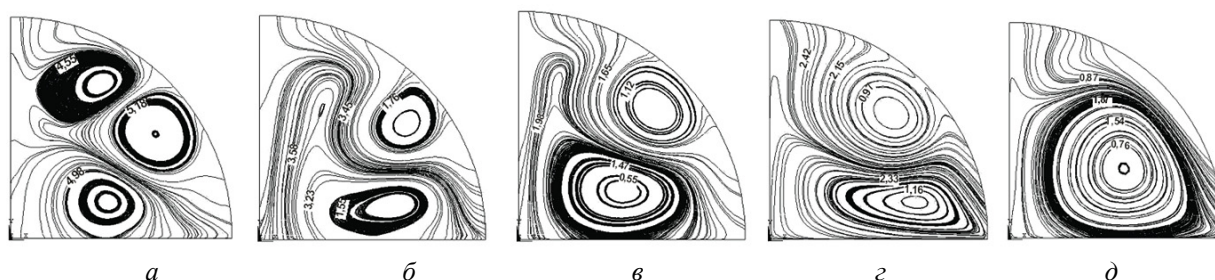


Рис. 5. Слияние трех циркуляций в одну при возрастании времени затухания окружной скорости течения по результатам численного моделирования при $Re_0=2150$: а– $T=1,57$; б– $3,64$; в– $7,67$; г– $11,2$; д– $15,3$

Различные гипотезы о фактической неосесимметричности подобных круговых течений и слабой симметричности относительно азимутальной плоскости сферы имеют право на существование, однако, нуждаются в экспериментальном и аналитическом подтверждении. Это сопряжено с необходимостью решения трехмерных нестационарных задач с учетом большого количества факторов, моделирование которых в настоящее время находятся в стадии разработки. Однако, приведенные осесимметричные численные решения нестационарной задачи позволяют качественно оценить и представить характер развития гидродинамической картины течения в сферическом сосуде и создать информационную базу для разработки трехмерных математических моделей течений в ограниченных объемах.

Выводы

Эволюция циркуляционных течений в меридиональных плоскостях во времени свидетельствует об их существенном влиянии на картину распределения окружной скорости в сфере. Это, в свою очередь, позволяет количественно определить силовые влияния жидкости на стенки и установить направление этих воздействий на конструкцию резервуара. Кроме того, зависимости величин скорости от времени течения позволяют проследить экспоненциальный характер изменения силовых воздействий во времени, что подтверждает предложенные Н.А.Слезкиным аналитические оценки характера затухания азимутальной скорости течения.

Таким образом, вклад сил вязкого трения в суммарное силовое воздействие течения на стенки резервуара можно учитывать при разработке компьютерных программ для автоматической системы стабилизации, например, космического аппарата. Это позволит учитывать инерционное влияние жидкости при выполнении компенсационных, коррекционных и ориентационных разворотов объекта, при этом результирующая экономия жидкого топлива может составлять до 70 килограммов. Это, в свою очередь, позволит увеличить продолжительность полета объекта, продлить на 3...5% межзаправочные циклы при полете орбитального модуля.

Для наземного и морского транспорта, содержащего большие количества жидкости, подобные возмущения не являются критическими, однако их следует учитывать при проектировании цистерн и танков нефтеналивных судов.

Еволюція циркуляцій в інерційних течіях нестисливої рідини у сферичному резервуарі

В.А. Ковальов

Анотація. Мета роботи: представлення та аналіз результатів моделювань течій у сфері для побудови строгої системи впливу на інерційні течії рідини. Наведено результати чисельного моделювання інерційних вісесиметричних течій в'язкої нестисливої рідини, яка цілком заповнює сферичний резервуар з жорсткими стінками. Побудовано епюри окружної компоненти швидкості в екваторіальній площині сферичного резервуара і проведено порівняння з лінійною моделлю течії за методом Н.А.Сльозкіна для в'язкої нестисливої рідини. Пропонуються результати розв'язання рівнянь руху рідини для нестационарної загасаючої течії, проводиться аналіз розподілу ліній струму і циркуляційних структур у меридіональних площинах резервуара. Зокрема, встановлено гідродинамічний механізм розвитку загасаючої течії і показана еволюція циркуляцій залежно від терміну процесу. Результати досліджень можна поширити на подібні течії в рухомих конструкціях іншої конфігурації.

Ключові слова: сферичний резервуар, вісесиметрична течія, циркуляційні структури, окружна, радіальна і меридіональна компоненти вектора швидкості.

Circulations evolution in inertial flows of incompressible fluid in spherical tanks

V. Kovalev

Abstract. The purpose of the work: presentation and analysis results of simulations in the sphere for constructing a rigorous system of action on inertial flows of a fluid. The results of numerical simulation of inertial axisymmetric flows of a viscous incompressible fluid completely filling a spherical reservoir with rigid walls are presented. Constructions of the azimuthal velocity component in the equatorial plane of the spherical reservoir are constructed and a comparison is made with the linear flow model by the N. Slyozkin method for a viscous incompressible fluid. The results of solving the fluid motion equations for a nonstationary damped flow are proposed, an analysis is made of the distribution of current lines and circulation structures in the meridian planes of the reservoir. In particular, the hydrodynamic mechanism for the development of a damped flow is established and the evolution of the circulation is shown as a function of the process time. The research results can be extended to similar flows in mobile constructions of a different configuration.

Keywords: spherical reservoir, axisymmetric flow, circulation structures, azimuthal, radial and meridional components of the velocity vector.

References

1. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н.А.Слезкин - М.: Гостехиздат, 1955. - 519 с.
2. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей / Х.Гринспен. - М.: Гидрометеиздат, 1975. - 304 с.
3. Dodge F. The new dynamic behavior of liquids in moving containers / F.T.Dodge. - Southwest Res. Institute, Texas, U.S.A. – 2000. – 202 p.
4. Veldman A. The Numerical Simulation of Liquid Sloshing On-Board Spacecraft / A.Veldman // Journal of Computers and Physics. - 2007. - vol.224. - p.82-99.
5. Xinjun C. A Numerical Study of the Recirculation Zones During Spin-Up and Spin-Down for Confined Rotating Flows / C.Xinjun // Journal of Theoretical and Computation in Fluid Dynamics. - 2003. - vol.1. - p.31-49.
6. Ковалев В.А. Влияние внутрибаковых перегородок на течение жидкого топлива в баках космического аппарата / В.А.Ковалев // Вестник Нац. техн. ун-та Украины «КПИ», Машиностроение, 2006. - № 48. - С.73-79
7. Ковалев В.А. Численное моделирование течений жидкости в емкостях с перегородками / В.А.Ковалев, Н.Г.Кришук, А.С.Конюхов // Вестник Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт», Машиностроение. – 2010. – вып.59. – С.51-55.
8. Ковалев В.А., Кришук Н.Г. Структура циркуляционных течений в ограниченных объемах при инерционном вращении жидкости / В.А.Ковалев, Н.Г.Кришук // Гідроліка і гідротехніка. – 2010. - вып. 64. - С. 29-36.