

УДК 630*377.4:531.6

DOI: <http://dx.doi.org/10.20535/2521-1943.2018.82.126309>

Застосування енергетичного підходу до аналізу поведінки неідеалізованих механічних та гідромеханічних систем

О.С. Мачуга¹ • О.М. Яхно²

1 – НЛТУУ, м. Львів, Україна;

2 - КПІ ім. Ігоря Сікорського, м. Київ, Україна

Received: 17 February 2018 / Accepted: 06 March 2018

***Анотація.** Енергетичний підхід до аналізу поведінки механічної системи полягає у будівництві функціоналу енергії, екстремальні точки якого досягаються на множині деяких функцій, що характеризують дійсний стан цієї системи. Вказані функції водночас є розв'язками системи диференціальних рівнянь, що описують поведінку розглядуваної механічної системи в рамках силового підходу. Визначення енергетичних функціоналів дозволяє формувати адекватну модель довільної механічної чи гідромеханічної системи, що охоплює істотні особливості енергообмінних процесів у взаємодії її окремих складових. Подальша апроксимація функцій стану є підвалиною будівництва аналітичних та числових розв'язків відповідних класів задач.*

Для структурно неоднорідних механічних систем із істотними дисипативними властивостями застосування енергетичного підходу пов'язується із формулюванням варіаційних нерівностей щодо функціоналу енергії, записаного для ексергії та анергії досліджуваного об'єкту. Представлений енергетичний підхід є прийнятним для постановок та розв'язування широкого класу задач щодо визначення стану структурно неоднорідних неідеалізованих механічних та гідромеханічних систем, які перебувають у реальних незворотних дисипативних процесах.

***Ключові слова:** функціонал енергії, незворотні процеси, варіаційні нерівності, ексергія та анергія*

Вступ. Енергетичні аспекти взаємодії матеріальних тіл

Фізичний стан будь-якого матеріального тіла визначається його енергетичним ресурсом – сукупністю механічної, внутрішньої, поверхневої, хімічної енергій, енергії електростатичного, електромагнітного поля тощо. Енергетичний ресурс в повній мірі детермінує здатність такого тіла до внутрішніх трансформацій, а також тип його взаємодії з іншими матеріальними тілами. Академіком Л. І. Седовим сформульовано постулат [1], згідно якого енергія є основною характеристикою стану будь-якого матеріального об'єкту, з якої отримуються всі інші його характеристики.

Процес взаємодії окремих матеріальних об'єктів викликає обмін енергіями між ними, перерозподіл повної та питомої енергії з одночасним взаємним перетворенням окремих видів енергії. Ці обмінні та трансформаційні процеси відбуваються у відповідності до закону збереження енергії [2-4]. Істотною особливістю взаємодії матеріальних об'єктів є передавання частини енергії тілом із більшим енергетичним ресурсом тілу з меншим енергетичним ресурсом, згідно із другим законом термодинаміки [4,5]. В процесі такого передавання реалізуються енергетичні трансформації, які є мірою його незворотності.

Енергія за означенням є скалярною величиною, однак закладена в цьому скалярі інформація щодо структури об'єкта, його реологічних особливостей та геометричної конфігурації, специфіки взаємодії між собою окремих складників такого об'єкта тощо, дозволяє визначити із неї істотні як скалярні, так і векторні й тензорні характеристики станів та процесів у досліджуваних об'єктах – матеріальних точках, твердих тілах, однорідних і структуризованих суцільних середовищах, полях. Тому застосування енергетичного підходу до аналізу поведінки багатокomпонентних матеріальних об'єктів, зокрема реальних механічних та гідромеханічних систем, дозволить формувати постановки та будувати розв'язки нових класів задач, пов'язаних із аналізом нелінійності механічних процесів, виявляти важливі з огляду, зокрема на екологічну проблематику та енергозбереження, результати.

Постановка задачі. Силовий та енергетичний підходи у моделюванні та розв'язуванні задач механіки

Найвагоміші закони фізики отримано феноменологічним шляхом. Однак далеко не завжди такий шлях є придатним для вивчення різних видів взаємодії матеріальних об'єктів, унаслідок складності відтворення необхідних умов у натурних дослідженнях, а також через розмаїття станів та явищ, вивчення яких має теоретичний та прикладний інтерес. З метою подолання такої недосконалості, широко використовуються методи моделювання, пов'язані із заміною реального об'єкту наявними модельними абстракціями, які покликані адекватно і в повній мірі бути відповідними до свого прототипу в частині його істотних для дослідження властивостей. Далі модель піддають певному симуляційному впливу і, за реакцією моделі на таку дію, роблять висновок щодо поведінки матеріального об'єкту – прототипу в реальних умовах.

У випадку моделювання взаємодії матеріальних об'єктів загальноприйнято насамперед використовувати фізичну модель, суть якої полягає у формулюванні головних фізичних законів щодо поведінки досліджуваних об'єктів та опису їх структурних, реологічних та інших властивостей. Перехід в подальшому до математичної моделі пов'язується із запровадженням індивідуалізованої щодо об'єкта координатної системи (системи відліку), записом певних абстрактних математичних конструкцій, відповідних до фізичної моделі та до вказаної системи координат, вивчення функціональних властивостей яких може привести до отримання масиву числових даних, вказуючих на характер поведінки досліджуваного матеріального об'єкту в тих чи інших умовах. Обґрунтування адекватної математичної моделі потребує ретельного опрацювання об'єкту та вдалого вибору базових характеристик, що визначають його фізичний стан. Сукупності цих характеристик стану відрізняються між собою у залежності від виду розглядуваних об'єктів. Зокрема для суцільних середовищ такими характеристиками можуть бути як функційні залежності певних величин (розподіл переміщень, деформацій, напружень, температури, енергії тощо), так і набір параметрів (наприклад фізичні постійні матеріалу). Для практичних цілей необхідно вибирати повну, базисну систему характеристик, яка однозначно детермінує стан об'єкту; в базисній системі всі характеристики і параметри є незалежними між собою [2].

Геометрична інтерпретація таких міркувань полягає у запровадженні багатовимірного функційного простору станів (фазового простору) [2, 6], в якому координатами є функційні характеристики стану μ_i , $i=1,2,\dots$ та (або) параметри стану k_j , $j=1,2,\dots$, а фізичний стан системи позиціонується точкою в цьому просторі. Різним значенням характеристик стану відповідатимуть різні точки фазового простору і навпаки.

Розрізняють два основних підходи до моделювання фізичних процесів чи станів застосовують силовий (векторний) та енергетичний (аналітичний).

В рамках силового підходу задача полягає у відшуванні всіх сил, що діють на кожен із матеріальних об'єктів в будь-який момент часу, після чого встановлюються характеристики руху чи стану такого об'єкту – переміщення, швидкості, напруження тощо. Базою цього підходу у розв'язуванні задач механіки суцільного середовища є формулювання системи диференціальних рівнянь в частинних похідних щодо, зокрема силових факторів, переміщень точок системи та інших скалярних, векторних і тензорних характеристик стану матеріального об'єкту. Розв'язки такої системи диференціальних рівнянь з відповідними початковими та граничними умовами визначають фізичний стан матеріального тіла, як точку просторі станів.

На ґрунті поняття жива сила (*vis viva* – подвоєна кінетична енергія), запровадженому Лейбніцом, Ж. Лагранж заклав основи аналітичної механіки [7], що і започаткувало формування енергетичного (аналітичного) підходу до вивчення механічної поведінки систем матеріальних тіл. Завдяки розвитку фундаментальних основ математичного та функціонального аналізу у працях Куранта і Гільберта [8], енергетичний підхід набув можливості використовуватись в задачах для матеріального континууму. В подальшому енергетичний підхід застосовувався для формулювання та розв'язування найрізноманітніших класів проблем механіки, гідромеханіки, фізики, оптики, економіки тощо у вигляді варіаційно-енергетичних принципів ([9] та багато інших). Математично строго доводиться варіаційний принцип, який полягає в тому, що розв'язок варіаційно-енергетичного рівняння еквівалентний розв'язку цієї ж задачі математичної фізики, отриманому із системи диференціальних рівнянь силового підходу.

Застосування енергетичного підходу полягає у визначенні множини функцій, яка забезпечує екстремальне або стаціонарне (в деяких випадках – мінімальне) значення спеціальним чином збудованого енергетичного функціоналу. Такий функціонал й детермінує стан досліджуваного матеріального об'єкту чи параметри процесів, в яких він перебуває. Підхід базується не на вивченні силових факторів, як наслідків тих чи інших енергетичних станів, а на безпосередньому аналізі енергетичного ресурсу матеріального об'єкту в просторі станів [2], як його первинної характеристики. Задача полягає у визначенні розподілу енергії в матеріальному об'єкті, з якого, згідно постулату про первинність енергії [1], визначаються і силові характеристики стану матеріального об'єкту в кожній його точці чи в цілому, і характеристики його руху.

На схемі, поданій на рисунку 1, окремо для силового та для енергетичного підходів, наведено структурну схему моделювання та визначення стану матеріальних об'єктів у їх взаємодії. Виділено визначальні закони та постулати, які окреслюють фізичну модель розглядуваних тіл. В кожному із підходів вибираються відповідні базисні характеристики станів, для яких формулюються основні рівняння математичної моделі розглядуваних об'єктів. Із розв'язків таких рівнянь визначаються числові значення характеристик стану, за якими й окреслюють

особливості поведінки об'єктів після їх взаємодії. У разі адекватного вибору сукупності базисних характеристик станів, існує однозначна відповідність між їх числовими значеннями та дійсним фізичним станом об'єкту, у відповідності до інтерпретації енергетичного простору.

Окреслена вище дуальність у моделюванні, постановках і методах пошуку розв'язків задач математичної фізики ґрунтується на методологічно різних засадах оцінювання взаємного впливу досліджуваних об'єктів. Однак розв'язки таких задач, отримані за допомогою різних підходів, є еквівалентними між собою, оскільки така еквівалентність обґрунтовується однозначністю явищ матеріального світу та відповідними варіаційними теоремами щодо тотожності розв'язків задач у силовому та енергетичному підходах.

Варіаційно-енергетичний підхід до аналізу механічних систем базується на первинних постулатах – принципах механіки. Приймається, що дійсний серед усіх кінематично можливих стан чи процес характеризується мінімальним (екстремальним) значенням функції «дії» - певної енергетичної величини [9]. Таким чином замість нагромадження систем диференційних рівнянь, до розгляду пропонується одне просте рівняння наступного виду:

$$\delta I = 0, \quad (1)$$

де I - власне є функція «дії» в класичному розумінні, або інакше – функціонал енергії, виходячи із понять операторного числення; δ - оператор варіювання функціонала I , тобто зміни його значень за рахунок варіювання (зміни виду) функціональних аргументів – функцій стану матеріального об'єкту. Рівняння (1) є математичним записом варіаційного принципу найменшої дії; в поєднанні із законом збереження енергії це рівняння є підвалиною варіаційно-енергетичних підходів у дослідженні поведінки механічних систем різної природи. Кожен із згаданих [9] дослідників будував вираз функції «дії», специфічний стосовно розглядуваного ними кола задач статички та динаміки. Відповідно до цього й використовуються терміни для функції «дії»: «лагранжیان», «лапсасіан» тощо.

ПРОЦЕС ВЗАЄМОДІЇ МАТЕРІАЛЬНИХ ОБ'ЄКТІВ

МАТЕРІАЛЬНИЙ ОБ'ЄКТ ↔ МАТЕРІАЛЬНИЙ ОБ'ЄКТ

силовий (векторний) підхід

- закони механіки щодо рівноваги і руху тіл
- реологічні властивості тіл
- структура деформування тіл
- умови нерозривності (сумісності)
- умови навантаження
- умови закріплення
- умови механічного контакту об'єктів

- вектор переміщення
- вектор швидкості переміщення
- тензор напружень (тиск)
- тензор деформацій
- вектор сил
- температура

- диференційні рівняння рівноваги (руху)
- математичне формулювання реологічних властивостей
- рівняння зв'язності сил різної природи
- крайові та початкові умови

ФІЗИЧНА МОДЕЛЬ

ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАНУ В ІНДИВІДУАЛІЗОВАНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

енергетичний (аналітичний) підхід

- загальні закони і постулати механіки
- принципи мінімаксу функціоналу енергії («дії»), варіаційні принципи
- розподіл енергій за їх видами
- розподіл питомої енергії в об'єктах
- механізми трансформування енергій

- кінетична енергія
- потенційна енергія
- внутрішня енергія
- поверхнева енергія
- термодинамічний потенціал
- хімічний потенціал

- варіаційне рівняння – математичний запис варіаційного принципу

Числові значення характеристик стану матеріальних об'єктів після їх взаємодії

МАТЕРІАЛЬНІ ОБ'ЄКТИ ПІСЛЯ ВЗАЄМОДІЇ

Рис. 1. Структурна схема моделювання та визначення стану матеріальних об'єктів після їх взаємодії

Використання засобів аналітичної механіки, зокрема варіаційних рівнянь типу (1), дає можливість будувати різноманітні методи наближених обчислень, які полягають у апроксимації шуканих величин числовими рядами або інтерполяційними поліномами з невідомими коефіцієнтами. Ці коефіцієнти обчислюються із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які будуються із мінімакських відношень, отримуваних із умови мінімуму (стаціонарності) функціонала I – рівняння (1). Серед класичних методів наближених обчислень (інакше – прямих методів) відзначимо методи Ейлера, Рунге - Кутси, Бундана – Гальоркіна (див. наприклад огляди [10,11]), надпотужний метод скінченних елементів [12], варіаційний метод наближених обчислень [13].

Ще одна істотна перевага використання варіаційно-енергетичного підходу полягає у можливості будувати та вдосконалювати адекватні математичні моделі щодо розглядуваних об'єктів. Зокрема конкретизуючи вираз функціоналу енергії I у рівнянні (1) можемо розглядати найрізноманітніші класи задач математичної фізики, техніки, інших галузей знань, в яких використовуються методи математичного моделювання. Серед багатьох досліджень відзначимо підходи до будувати модельних представлень [6,14].

Для попереднього запровадження простору станів [2] за використання постулату про первинність енергії, як основної характеристики (питомої чи інтегральної) стану об'єкту, встановлюється однозначна відповідність між станом системи (деякою точкою A) та енергією системи. Фазовий простір станів трансформується в простір енергетичних станів, у якому стану A системи відповідає її енергетичний ресурс E_A (рисунок 2 а).

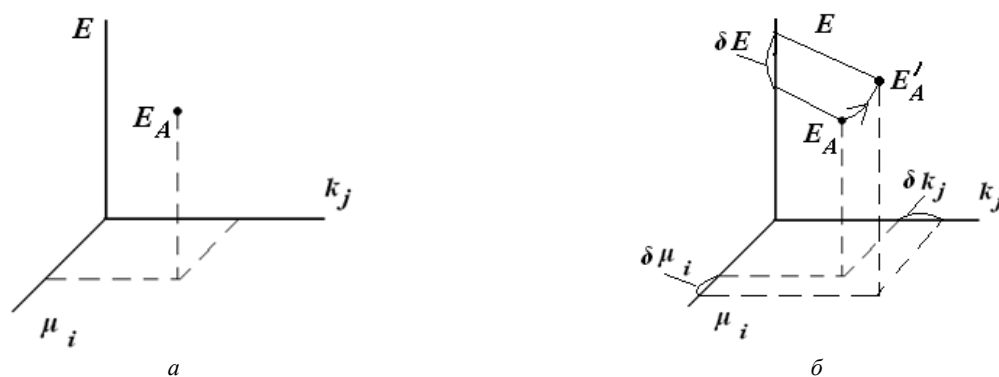


Рис. 2. Простір енергетичних станів: а – енергетичний ресурс E_A стану A , б – віртуальна зміна енергетичного стану

Довільна варіація (кінематично можливе віртуальне відхилення) $\delta\mu_i$ функційних характеристик стану μ_i та варіація δk_j параметрів стану k_j призведе до переходу стану системи з положення A в положення A' із енергетичним рівнем $E'_A = E_A + \delta E$, δE - відповідна варіація енергії (віртуальна зміна енергетичного стану) - рисунок 2 б. У разі повернення характеристик і параметрів стану до початкових величин (обнулення варіацій $\delta\mu_i \rightarrow 0$, $\delta k_j \rightarrow 0$), енергетичний стан системи набуде початкового значення: $E'_A \rightarrow E_A$. Визначальне відношення енергетичного підходу набуває вигляду базисного варіаційного рівняння:

$$\delta E = 0. \quad (2)$$

Зміст відношення (2) полягає в тому, що дійсний стан чи процес, в якому перебуває механічна система, відрізняється від усіх кінематично можливих станів цієї системи тим, що функціонал енергії E (математичний запис енергії досліджуваної системи) в дійсному стані набуває стаціонарного (мінімального) значення.

Геометрична інтерпретація базисного варіаційного рівняння (2) є зрозумілою для випадку системи із однією характеристикою стану – деякою функцією u . Для такого випадку умову стаціонарності функціоналу енергії E графічно представлено на рисунку 3 а. В точці O графіка функціональної залежності $E = E(u)$ реалізується екстремум, тобто дотична до такого графіку в точці O є горизонтальною.

У випадку квазістатичного рівноважного процесу віртуального (кінематично можливого) відхилення механічної системи від дійсного положення u_0 (рисунок 3 а), відбувається еквівалентне набуття параметром цієї системи певного віртуального приросту δu (уздовж осі абсцис) та відповідний віртуальний приріст δE енергетичного ресурсу E (уздовж осі ординат). Для розглядуваного процесу величина E може співпадати із механічною енергією - сумою кінетичної та потенційної енергій. Відзначимо, що енергетичний рівень E_0 на рисунку 3 а визначає енергетичний ресурс системи в дійсному положенні, тобто відповідає енергетичному рівню, зрівноваженому із оточуючим середовищем. Віртуальний приріст δE викликає набування відповідних віртуальних приростів складовими енергетичного функціоналу E - кінетичною та потенційною енергіями. У випадку зворотних процесів у ідеалізованих середовищах, дія другого начала термодинаміки для яких є

обмеженою, система може безперешкодно повернутись із довільного віртуального положення – точки O' – у вихідну точку простору станів – точку O , забезпечуючи виконання варіаційного рівняння (2). На рисунку 3 а зображено власне такий процес.

Як уже зазначалось вище, задаючи вигляд функціоналу енергії E можливо будувати математичні моделі відповідні фізичним моделям доволі широкого класу задач механіки для різних об'єктів, середовищ із традиційними та неklasичними механічними властивостями, до яких можна віднести різноманітні механічні та гідромеханічні системи, що перебувають у зворотних процесах за певних ідеалізованих припущень.

Основний виклад. Енергетичний підхід у дослідженні механічних систем із дисипативними властивостями

Реальна поведінка будь-якої неідеалізованої механічної системи характеризується певним набором різноманітних дисипативних властивостей. Така особливість механічної поведінки супроводжується якісною зміною структури енергетичного ресурсу, пов'язаною зокрема із трансформацією частини механічної енергії, чи будь-якої іншої активної енергії (електромагнітного поля, хімічної тощо), у внутрішню енергію – теплову, поверхневу тощо. Вказана трансформація є в певній мірі незворотною і ця незворотність чітко окреслюється одним із вищенаведених формулювань другого начала термодинаміки. Тому й всі процеси в дисипативних середовищах також є незворотними. Мірою незворотності є величина дисипативних трансформацій енергії, тобто – частина механічної енергії ΔU , що перетворюється у внутрішню в процесі взаємодії.

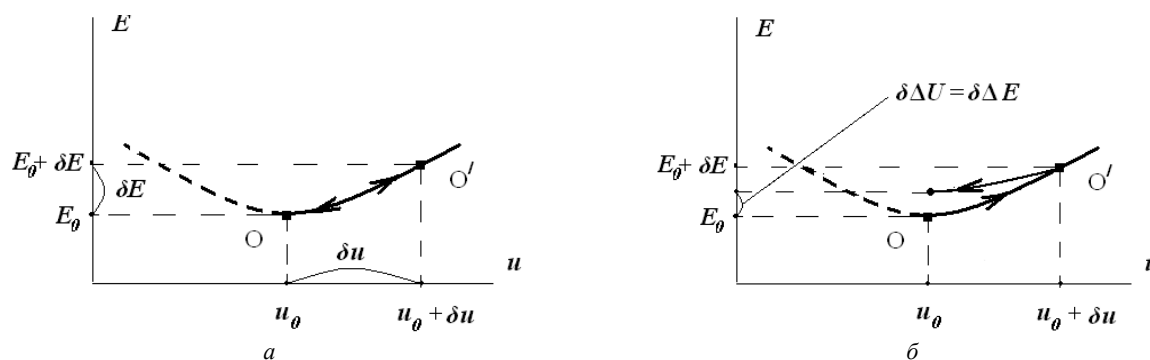


Рис. 3. Геометрична інтерпретація віртуального відхилення механічної системи від дійсного стану (точка O) у випадку зворотного процесу (а) та незворотного процесу у дисипативних середовищах (б)

Розглядаючи, як і в попередньому підрозділі, квазістатичний рівноважний процес віртуального відхилення дисипативної механічної системи із однією характеристикою стану u від її дійсного положення, слід відзначити наступну особливість. Процес віртуального відхилення стану реальної механічної системи від точки O (рисунок 3 б) до точки O' під час віртуальної зміни δu параметра системи u , супроводжується варіацією δE значення енергетичного ресурсу E . Частина $\delta \Delta E$ віртуального приросту механічної енергії δE трансформується у віртуальний приріст внутрішньої енергії $\delta \Delta U$: $\delta \Delta E = \delta \Delta U$. Наявність цього енергетичного перетворення безпосередньо впливає із другого начала термодинаміки, яке справедливе для всіх, в тому числі й віртуальних, процесів. Тому у розглядуваному віртуальному процесі на деяку віртуальну величину збільшується внутрішня (теплова) енергія, викликана внутрішніми віртуальними джерелами тепла [6]; на деяку віртуальну величину може збільшуватись поверхнева енергія об'єкту – у разі віртуального збільшення поверхні об'єкту під час мікро- та макророзтріскування; на деяку віртуальну величину може збільшитись енергія фазових перетворень у разі їх виникнення у розглядуваному процесі. Внаслідок закону збереження енергії у віртуальних дисипативних процесах, віртуальний приріст механічної чи будь-якої іншої активної енергії досліджуваного об'єкту відповідним чином є меншим у порівнянні із ідеалізованими середовищами за однакових відхилень системи від положення рівноваги. Поворот системи із віртуального положення – точки O' у вихідну точку простору станів – точку O неможливо реалізувати, тому що повернення параметра стану u у вихідне положення ($\delta u \rightarrow 0$) супроводжується збільшенням енергетичного рівня E_0 на величину віртуального приросту внутрішньої енергії $\delta \Delta U$, який інтегрально враховує енергетику всіх дисипаційних процесів протягом варіативного відхилення системи від положення рівноваги. На таку ж величину зменшується приріст варіації механічної енергії (рисунок 3 б). Із наведених міркувань слідує, що для застосування енергетичного підходу до аналізу поведінки механічних об'єктів із вираженими дисипативними властивостями слід застосовувати моделі, що враховують незворотність досліджуваних явищ. Варіаційно-енергетичне рівняння (2) втрачає сенс у випадку використання традиційних функціоналів енергії через те, що це рівняння не охоплює однонаправленості енергетичних процесів.

З метою обґрунтування повноправного застосування енергетичного підходу для механічних систем із істотними дисипативними властивостями, пропонується збудувати варіаційну нерівність, відповідну

варіаційному рівнянню (2), яку й покласти в основу дослідження таких об'єктів. В подальшому розвинуті таким чином теоретичні основи застосування енергетичного підходу можуть використовуватись для аналізу неідеалізованої поведінки механічних та гідромеханічних систем.

Варіаційні нерівності використовуються в постановках та під час розв'язування ряду класів задач механіки неоднорідних структур, зокрема у задачах із односторонньою границею, попередньо невідомою границею, задачах фільтрації, задачах теорії мащення і інших [15]. Передбачається, що задачі аналізу незворотних процесів для реальних гідромеханічних систем, у яких враховуються реологічні властивості рідин і пружно-пластичних твердих тіл також пов'язуються із відповідними варіаційними нерівностями.

Вагомим для даного викладу є використання структуризації енергії за якісними показниками щодо її здатності до трансформації у інші види енергії. Використовуючи типізацію, запроваджену зокрема в [16], енергію матеріальних тіл чи процесів визначатимемо, як суму ексергії та анергії.

Ексергія – частина повної енергії матеріального об'єкта, яка може бути повністю перетворена в будь – яку іншу форму енергії шляхом виконання механічної роботи. Ця робота є формою передачі енергії. Ексергія є необмежено перетворювана енергія [16] якою володіє будь-який матеріальний об'єкт. Під час зворотних процесів енергообмін між матеріальними об'єктами відбувається таким чином, що їх ексергія переходячи із однієї форми енергії в іншу, залишається незмінною. У незворотних процесах частина ексергії внаслідок дисипативних процесів перетворюється в обмежено перетворювані види енергії, лише певна частина яких знову може перетворитись у ексергію.

У зв'язку із цим виділяють поняття анергії – частину енергії системи, яка не може перетворюватись в інші види енергії. Анергія – це енергія низькотемпературного тепла, температура якого співпадає із температурою оточуючого середовища, тому вона не може спричинитись до будь – яких енергетичних трансформацій.

В процесах енергоперетворення частина ексергії може трансформуватись в анергію, яка визначає міру дисипативності процесу розглядуваної взаємодії об'єктів; зростання анергії є мірою незворотності будь-якого процесу. Анергія відсутня тільки у ідеально пружних нев'язких середовищах. Середовище, в якому вся енергія перетворилася в анергію, знаходиться в повністю зрівноваженому стані.

В термінах ексергії та анергії друге начало термодинаміки формулюється наступним чином [16]: «*Анергія реального процесу завжди зростає*».

В даній роботі синергетичне поєднання методів варіаційних нерівностей та структуризацією енергетичного ресурсу, як суму ексергії та анергії пропонується для використання у постановках та будіванні розв'язків різних класів практично важливих задач неідеалізованої взаємодії елементів механічних та гідромеханічних систем.

Енергетичний ресурс E розглядуваних роботі об'єктів, згідно із наведеним вище визначенням, запишемо наступним чином:

$$E = Ex + An, \quad (3)$$

де Ex , An - відповідно ексергія та анергія об'єкту. Згідно із наведеним вище формулюванням другого закону термодинаміки, для будь-якого, зокрема й віртуального процесу:

$$\delta An \geq 0. \quad (4)$$

Тоді варіаційне рівняння (2) трансформується із врахуванням (3), (4) у наступну варіаційну нерівність:

$$\delta(Ex - An) \leq 0. \quad (5)$$

Для фізичної інтерпретації постановки задачі у вигляді варіаційної нерівності (5) звернемося до простору енергетичних станів, який уже розглядався вище. Точка O такого простору визначає дійсний стан об'єкту (див. рисунок 4). Віртуальне відхилення стану від точки O у випадку граничної рівності у нерівності (5) визначає деяку поверхню Σ , яка є поверхнею стаціонарності енергетичного стану у випадку зворотних енергетичних трансформацій.

Частина простору енергетичних станів (на рисунку 5 – нижче поверхні Σ), в якій виконується варіаційна нерівність (5), визначає множину параметрів і характеристик стану, за яких розглядуване тіло може перебувати в рівноважному стані у випадку незворотних процесів. Точки простору енергетичних станів, які знаходяться вище граничної поверхні, не задовольняють варіаційній нерівності (5), тому об'єкт не може перебувати в такому стані. Однак, якщо фактори зовнішнього впливу (граничні та початкові умови) спонукають об'єкт до перебування власне в такому стані, яке є кінематично неможливим, це призведе до зміни внутрішньої конфігурації структури системи, наприклад – до збільшення області пластичних деформацій, до розширення розшарування між окремими складовими, до змінювання області турбулентних чи кавітаційних явищ тощо. Зупинка процесу

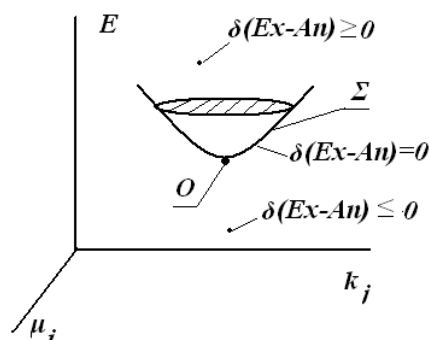


Рис. 4. Представлення допустимого стану дисипативної механічної системи в просторі енергетичних станів

розвитку деструкцій відбувається в такій конфігурації механічної системи, коли (5) знову перетворюється у строгу нерівність.

Підсумовуючи подані вище результати, відзначимо, що представлений енергетичний підхід є цілком прийнятним для постановок задач визначення стану структурно неоднорідних тіл що перебувають у реальних незворотних дисипативних процесах. Дослідження неідеалізованої механічної взаємодії мобільних машин із оточуючим середовищем із урахуванням їх реологічних особливостей, в повній мірі відноситься до такого класу проблем. Зокрема можливе використання виразів ексергії та анергії структурно неоднорідних гідромеханічних систем, запропоноване в [17], Приклади отримання розв'язків модельних задач за допомогою розвинутого тут підходу запропоновано в роботі [18].

Висновки

Енергія приймається основною характеристикою стану матеріального об'єкту, з якої визначаються всі інші питомі та інтегральні характеристики цього об'єкту, а енергообмінні процеси під час взаємодії тіл підпорядковуються основним законам фізики – першому та другому началам термодинаміки. Тому використання методів і засобів енергетичного підходу до аналізу механічної поведінки матеріальних об'єктів є пріоритетним напрямком вдосконалення фундаментальних та прикладних методів досліджень серед інших підходів, методів і засобів математичної фізики, починаючи від математичного моделювання процесів чи станів, постановок задач, розроблення методів дослідження, будування розв'язків та їх аналізу щодо відповідних задач практики.

Завдячуючи тому, що енергетичний підхід дослідження механічної поведінки складних систем пов'язується із будуванням спеціального функціоналу, який охоплює істотні особливості об'єкта дослідження, використання цього підходу забезпечує високий ступінь адекватності будування математичних моделей та пов'язаних із ними числових та аналітичних методів розв'язування задач механіки, теорії пружності і пластичності, гідромеханіки, термомеханіки, теорії оболонок, пластин і стрижневих конструкцій та в багатьох інших галузях механіки і фізики.

Однак під час використання методів енергетичного підходу для випадку неідеалізованих матеріальних об'єктів існують ускладнення, оскільки будування варіаційних рівнянь для середовищ із вираженими дисипативними властивостями у нелінійних процесах не повністю охоплюють процеси розсіювання окремих видів енергії. В зв'язку з цим для подальшого розвитку наукових основ застосування енергетичного підходу для задач аналізу поведінки реальних механічних та гідромеханічних систем із врахуванням їх дисипативних особливостей, пропонується формулювати відповідні варіаційні принципи у вигляді варіаційних нерівностей.

Через необхідність урахування перерозподілу енергетичного ресурсу між механічною та внутрішньою енергіями в реальних незворотних процесах енергообміну, пов'язаних із дисипативними трансформаціями, для будування варіаційних нерівностей пропонується використовувати складові якісної структуризації енергії – ексергію та анергію.

Обґрунтування базових варіаційних нерівностей енергетичного підходу, узагальненого на випадок неідеалізованої взаємодії складових механічних та гідромеханічних систем представлено на прикладах постановок та розв'язування ряду практичних задач, реалізація яких в рамках інших підходів є ускладненою.

Применение энергетического подхода к анализу поведения неидеализированных механических и гидромеханических систем

О.С. Мачуга, О.М. Яхно

Аннотация. Энергетический подход к анализу поведения механической системы заключается в построении функционала энергии, экстремальные точки которого достигаются на множестве некоторых функций, характеризующих действительное состояние этой системы. Указанные функции одновременно являются решениями системы дифференциальных уравнений, описывающих поведение рассматриваемой механической системы в рамках силового подхода. Определение энергетических функционалов позволяет формулировать адекватную модель произвольной механической или гидромеханической системы, охватывающей существенные особенности энергообменных процессов во взаимодействии ее отдельных составляющих. Дальнейшая аппроксимация функций состояния является основой построения аналитических и численных решений соответствующих классов задач.

Для структурно неоднородных механических систем с существенными диссипативными свойствами применение энергетического подхода связывается с формулировкой вариационных неравенств для функционала энергии, записанного для эксергии и анергии исследуемого объекта. Представленный энергетический подход приемлем для постановок и решения широкого класса задач определения состояния структурно неоднородных неидеализированных механических и гидромеханических систем, находящихся в реальных необратимых диссипативных процессах.

Ключевые слова: функционал энергии, необратимые процессы, вариационные неравенства, эксергии и анергия

The energy approach application for the behavior analysis of the non-idealized mechanical and hydromechanical systems

O. Machuga, O. Yakhno

Abstract. Purpose. It is necessary to construct of the energy functional for the development of the energy approach for the mechanical system behavior analysis. The extreme points of that functional are achieved on the some functions set, that characterized the actual state of this system.

The subject of research is the functions of such object state. They are simultaneously solutions of the differential equations system which described the behavior of the considered mechanical system in the power approach framework.

Research methods are associated with the definition of the energetic functionals. This allows us to formulate an adequate model of an arbitrary mechanical or hydro mechanical system that covers the essential features of energy-exchange processes in the interaction of its individual components. Further approximation of state functions is the basis for constructing analytic and numerical solutions of the corresponding classes of problems.

The main result of the work is in applying the energy approach for structurally inhomogeneous mechanical systems with significant dissipative properties. It is associated with the formulation of variation inequalities with respect to the functional energy written for the exergy and the energy of the investigated object. The proposed energy approach is acceptable for formulating and solving a wide class of problems in determining the state of structurally heterogeneous non-idealized mechanical and hydro mechanical systems that are in real irreversible dissipative processes.

Keywords: energy functional, irreversible processes, variation inequalities, exergy and energy

References

1. Седов, Л. И. Виды энергии и их трансформации / Л. И. Седов // Прикладная математика и механика. - 1981. - Вып. 6, т. 45. - С. 964 – 984.
2. Седов, Л. И. Механика сплошной среды. Т.1 / Л. И. Седов. - Москва: Наука, 1976. – 535 с.
3. Базаров, И. П. Термодинамика / И. П. Базаров. – Москва: Высшая школа, 1991. – 376 с.
4. Белоконь, Н. И. Основные принципы термодинамики / Н. И. Белоконь. – Москва: Недра, 1968. – 110 с.
5. Яворский, Б. М. Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – Москва: Наука, 1968. – 939 с.
6. Бердичевский, В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды / В. Л. Бердичевский. - Москва: Наука, 1983. – 448 с.
7. Лагранж, Ж. Аналитическая механика. Т.1 / Ж. Лагранж. - Москва: Госиздат, 1950. – 594 с.
8. Курант, Р. Методы математической физики. Т.1 / Р. Курант, Д. Гильберт. - Москва: Ленинград: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. – 476 с.
9. Вариационные принципы механики / под ред. Л. С. Полака. - Москва: Государственное издательство физ.-мат. литературы, 1959. – 932 с.
10. Бронштейн, И. Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. - Москва: Наука, 1981. – 718 с.
11. Божидарник, В. В. Теорія пружності. Т.1 Загальні питання / В. В. Божидарник, Г. Т. Сулим. - Луцьк: РВВ ЛНТУ, 2012. - 551 с.
12. Варвак, П. М. Метод конечных элементов / П. М. Варвак, И. М. Бузун, А. С. Городецкий, В. Г. Пискунов, Ю. Н. Толокнов. - Киев: Вища школа, 1981. – 176 с.
13. Пелех, Б. Л. Вариационный метод исследования концентрации напряжений возле межслойных дефектов в слоистых анизотропных оболочках и пластинах / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько, О. С. Мачуга // Прикладная механика. – 1985. - т. 21, № 11. - С. 124 - 128.
14. Седов, Л. И. Применение базисного вариационного уравнения для построения моделей сплошных сред / Л. И. Седов // Избранные вопросы современной механики. Ч. 1.: под ред. Г. Г. Черного. - Москва: Изд-во Московского университета, 1981. – С. 11 – 64.
15. Киндерлерер Д. Введение в вариационные неравенства и их приложения / Д. Киндерлерер, Г. Стампакья. - Москва: Мир, 1983. – 256 с.
16. Баер, Г. Энергия, эксергия, анергия / Г. Баер // Энергия и эксергия: под ред. В. М. Бродянского. - Москва: Мир, 1968. – С. 12 – 27.
17. Яхно, О. М. Варіаційне формулювання задач для структурно неоднорідних гідромеханічних систем / О. М. Яхно, О. С. Мачуга // Промислова гідроліка і пневматика. - 2017. – № 2(56). – С. 26 – 33.
18. Яхно, О. М. Ексергійний аналіз та метод варіаційних нерівностей в деяких задачах гідромеханіки / О.М. Яхно, О. С. Мачуга // Вісник НТУУ «КПІ». Серія машинобудування. 2016.- №3 (78), – С. 19 – 25, DOI: <http://dx.doi.org/10.20535/2305-9001.2016.78.73382>