

К методике определения "эквивалентных" физико-механических характеристик сотового заполнителя композиционной плиты

К.Н. Рудаков¹ • В.Н. Маслей²

1 – КПИ им. Игоря Сикорского, г. Киев, Украина;

2 – ГП "КБ "Южное" им. М.К. Янгеля", г. Днепр, Украина

Received: 03 April 2018 / Accepted: 11 September 2018

Аннотация. Рассмотрена проблема определения "эквивалентных" физико-механических характеристик (ФМХ) сотового заполнителя типа HEXCEL для их последующего использования в конечно-элементных расчетах. Необходимость исследования вызвана автоматизированным контролем качества вводимых характеристик программами на основе метода конечных элементов: нули не допускаются, а также проверяется соблюдение соотношений 3D-ортотропии введенных ФМХ.

Было создано шесть конечно-элементных моделей сотового заполнителя марки 5056-6-23: три на основе трехмерных гексагональных конечных элементов (КЭ) и три на основе двумерных четырехугольных КЭ. Округления на сгибах алюминиевой фольги моделировали максимально точно (КЭ второго порядка аппроксимации), приближенно или игнорировали (КЭ первого порядка аппроксимации).

На основе проведенных расчетов определены "эквивалентные" ФМХ сотового заполнителя, проведена оценка их точности (таблицы), выявлены проблемы и способы их преодоления. В заключение сформулированы обоснованные в расчетах методические рекомендации определения "эквивалентных" ФМХ сотового заполнителя типа HEXCEL, в которых максимально использована замена конечно-элементных расчетов на простые аналитические формулы.

Ключевые слова: сотовый заполнитель; "эквивалентные" физико-механические характеристики, 3D-ортотропия, численное 3D моделирование; метод конечных элементов; методические рекомендации.

Введение

Применение сотового заполнителя (СЗ) в трехслойных композитных панелях (сотовых панелях, СП) космических аппаратов (КА) позволяет существенно облегчить конструкцию, обеспечив значительную жесткость СП [1-3]. При модельных расчетах несущих конструкций КА из СП, чтобы не моделировать все геометрические подробности СЗ и не получать громоздкие конечно-элементные модели, его часто заменяют на "эквивалентный" СЗ с "эквивалентными" физико-механическими характеристиками [1, 4-9]. Это может быть целесообразно, если напряженно-деформированное состояние (НДС) собственно СЗ не является целью расчетов. В противном случае, например, при определении условий потери устойчивости СЗ, или при относительно большой толщине СП, геометрические подробности моделировать необходимо. Тогда возникает вопрос о минимально затратной конечно-элементной модели, обеспечивающей достаточную точность расчетов.

Рассматривали только СЗ типа HEXCEL, т.е. с шестигранным в плане очертанием (рис.1-а), из металла.

На первый взгляд, проблема назначения "эквивалентных" физико-механических характеристик таких СЗ решена [4-9]. Постулируется значимость лишь трех модулей упругости: модуля Юнга вдоль оси сотовой ячейки E_Z и двух модулей сдвига: G_{XZ} и G_{YZ} . Остальные модули упругости рекомендуют принять равными нулю [1, 4-6]. Но такая рекомендация в компьютерных расчетах не может быть использована, т.к. программа "не принимает" нулевые значения [10, 11]. Введение произвольно малых чисел тоже может блокироваться программой из-за их несоответствия обязательным соотношениям между характеристиками формально 3-D ортотропного материала [10, 11]. Но есть еще и прецизионные конструкции, при моделировании которых желательно задавать обоснованные значения. Есть еще другие характеристики материала, в частности, плотность, коэффициент температурного линейного расширения, коэффициент теплопроводности, теплоемкость. Поэтому в ряде случаев проблема определения "эквивалентных" характеристик СЗ становится актуальной. Необходимо иметь обоснованную методику назначения всех ФМХ СЗ.

Цель работы: на основе численных расчетов с применением метода конечных элементов (МКЭ) отработать методические рекомендации по определению "эквивалентных" физико-механических характеристик металлического СЗ типа HEXCEL.

Конечно-элементные модели

С целью выяснения вопроса о рациональной конечно-элементной модели, дающей достаточную точность определения искомых "эквивалентных" характеристик, было создано шесть моделей для СЗ марки 5056-6-23, т.е. СЗ из алюминиевой фольги толщиной $\delta = 0.023$ мм с размеров ребра $a = 6$ мм. В местах контакта боковых поверхностей (все фасадные поверхности рис.1-а) СЗ имеет удвоенную толщину, т.е. 0.046 мм. В силовой панели КА класса "Січ-2М" высота СЗ $T = 76$ мм. Модуль Юнга фольги $E = 0.69 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.36$, удельная плотность $\rho = 2700$ кг/м³ [12].

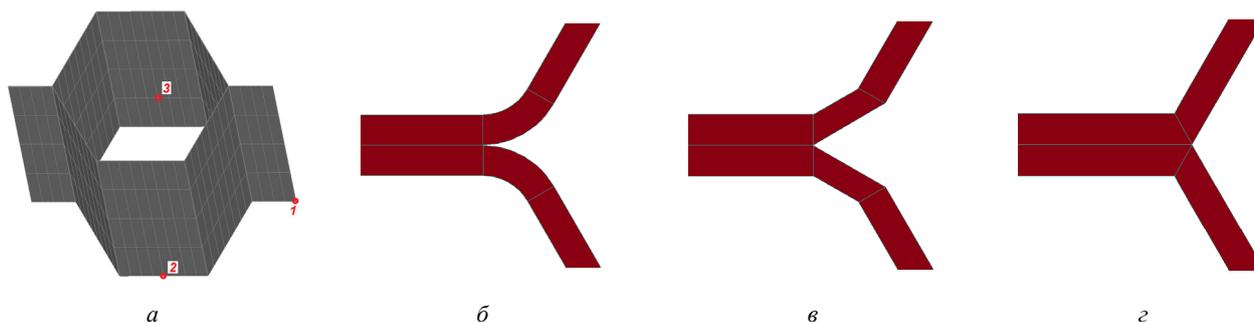


Рис. 1. Единичная структура сотового заполнителя (а) и конечно-элементные аппроксимации округления на сгибе фольги: б – модели I, IV; в – II, V; г – III, VI. Точки: 1 – для замера величины перемещения U_x , 2 – U_y , 3 – U_z

Сначала на основе геометрической модели (рис.1-а) для каждой модели создавали единичную структуру из конечных элементов (КЭ). Потом всю совокупность размножали в нужном количестве в направлениях осей X (иначе – в направлении L) и Y (направлении W) операцией копирования, с последующим "сшиванием" в единую модель: как геометрическую, так и конечно-элементную.

Модели I, II и III созданы из трехмерных гексагональных КЭ, а модели IV, V и VI – из двумерных четырехугольных КЭ. Модели I и IV имели КЭ *второго* порядка аппроксимации, которые почти точно описывают радиус округления на изгибе (рис.1-б) с величиною $r = 0.05$ мм (по срединной поверхности фольги). Модели II и V имели КЭ *первого* порядка аппроксимации, и округления описывали не точно (рис.1-в), а модели III и VI, тоже из КЭ *первого* порядка аппроксимации, не учитывали округления (рис.1-г).

Модель I – из КЭ SOLID186 (Homogeneous Structural Solid) в ANSYS, или CHEXA Parabolic в Nastran, по 8 КЭ вдоль ребра ячейки, по 1 КЭ по всей толщине фольги и на *округлении*, по 4 КЭ по высоте СЗ. Эти КЭ обеспечивают квадратичную аппроксимацию перемещений в направлении нормали к срединной поверхности фольги, т.е. лучшую, чем линейную аппроксимацию в двумерном КЭ, созданному по изгибной модели Кирхгофа с линейным учетом угловых деформаций Миндлина-Рейсснера (см. модель IV).

Модель II – из КЭ SOLID185 (Homogeneous Structural Solid) в ANSYS или CHEXA Linear в Nastran, с тем же количеством КЭ, как и в модели I. Эти КЭ обеспечивают линейную аппроксимацию перемещения в направлении нормали к срединной поверхности фольги, т.е. такую же, как и в двумерном КЭ модели IV. Кроме того, эти КЭ не описывают округления на сгибе фольги (рис.1-в): они спрямлены.

Модель III – аналогична модели II, но *без округления* – рис.1-г.

Т.е. каждая следующая модель на основе трехмерных КЭ моделировала СЗ со все меньшей точностью.

Модель IV – из КЭ SHELL281 в ANSYS или Plate Parabolic в Nastran, по 8 КЭ вдоль ребра ячейки, по 1 КЭ на округлении, по 10 КЭ по высоте СЗ. В плоскостях налегания КЭ SHELL281 (Plate Parabolic) соответствующие степени свободы TX, TY и TZ их противоположных пар узлов связали конечными элементами типа RIGID (жесткая связь указанных в КЭ степеней свободы). Причем те степени свободы, которые в дальнейшем будут закрепляться, связывать не нужно (даже нельзя).

Модель V отличалась от модели IV количеством КЭ в направлении оси Z, т.е. по высоте СЗ: по 4 КЭ вместо 10-ти, а также порядком аппроксимации КЭ, т.е. вместо КЭ SHELL281 применили КЭ SHELL181 (в Nastran – Plate Linear).

Модель VI отличалась от модели V отсутствием *округления* – как и на рис.1-г.

Т.е. каждая следующая модель на основе двумерных КЭ моделировала СЗ со все меньшей точностью.

Считали, что полная модель имеет 20×20 единичных структур с двумя плоскостями симметрии XoZ и YoZ . Для определения "эквивалентных" модулей упругости Юнга и коэффициентов Пуассона (в главных направлениях) применяли условия симметрии относительно указанных плоскостей симметрии: после

рассечения модели этими плоскостями создавали 1/4 часть полной модели из 10x10 единичных структур, габаритные размеры моделей в мм: 179.5·103.9·76. Отброшенные части моделировали как обычно: всем узлам КЭ сетки, расположенным на плоскостях рассечения, запрещали степени свободы в направлениях нормали к соответствующим плоскостям рассечения.

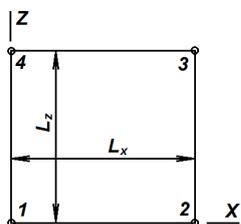


Рис. 2. Характерная схема замеров относительных перемещений узлов в ячейке

(рис.2), подсчитывали, например, $(\Delta L_x)_{1-2} = (U_x)_2 - (U_x)_1$, затем $(\varepsilon_x)_{1-2} = (\Delta L_x)_{1-2} / L_x$. Результаты отличались, но незначительно.

Нагрузки расчетных моделей СЗ в направлениях осей X, Y и Z

Так как жесткость СЗ в направлениях осей X и Y незначительна, то в этих направлениях прикладывали результирующие усилия $F_x = F_y = 1$ Н. Жесткость СЗ в направлении оси Z значительно выше, поэтому в этом направлении прикладывали результирующее усилие $F_z = 1000$ Н.

В моделях I, II и III все геометрические типичные структуры были собраны (операцией Add) в один Solid. Поэтому в этих моделях (с трехмерными КЭ) в направлении оси X на торце СЗ с координатой $X=179.5$ мм имели 10 одинаковых поверхностей с суммарной площадью $A_x = 0.023 \cdot 2 \cdot 76 \cdot 10 = 34.96$ мм², к каждой из которых прикладывали (отрицательное) давление величиной $-1/A_x \approx -0.0286041$ МПа. Аналогично, в этих моделях в направлении оси Y на торце СЗ с координатой $Y=103.9$ мм имели 10 одинаковых поверхностей с суммарной площадью $A_{y,I,II} = 5.928986 \cdot 76 \cdot 10 \approx 4506.029$ мм² для I и II моделей и $A_{y,III} = 6 \cdot 76 \cdot 10 \approx 4560.0$ мм² для модели III, к каждой из которых прикладывали (отрицательное) давление величиной $-1/A_{y,I,II} \approx -2.21925 \cdot 10^{-4}$ МПа для I и II моделей и $-1/A_{y,III} \approx -2.1930 \cdot 10^{-4}$ МПа для модели III (можно прикладывать растягивающую силу $(F_y)_1 = 0.1$ Н, результат будет тот же). В направлении оси Z на торце СЗ с координатой $Z=76$ мм имели одну поверхность, к которой прикладывали растягивающую силу $F_z = 1000$ Н. Кстати, площадь A_z , на которую раскладывалась сила F_z , равна 109.9344 мм² в модели I, 109.9344 мм² – в модели II, и 110.0335 мм² – в модели III.

Другая ситуация в моделях IV, V и VI, в которых на торцы с координатами $X=179.5$ мм и $Z=76$ мм выходят двумерные КЭ своими ребрами, т.е. с точки зрения геометрии – линиями, а не поверхностями. Суммарная длина ребер КЭ типа SHELL, имеющих координату $X=179.5$ мм, $(L_x)_\Sigma = 76 \cdot 10 \cdot 2 = 1520$ мм. Поэтому на единицу длины ребер КЭ типа SHELL, имеющих координату $X=179.5$ мм, прикладывали силу $(F_x)_1 = F_x / (L_x)_\Sigma = 1/1520 \approx 6.579 \cdot 10^{-4}$ Н.

В моделях IV и V суммарная площадь поверхностей КЭ типа SHELL, имеющих координату $Y=103.9$ мм, $(A_y)_{\Sigma,IV,V} = A_y = 4506.029$ мм². Поэтому на единицу площадей поверхностей КЭ типа SHELL, имеющих координату $Y=103.9$ мм, прикладывали силу $(F_y)_{1,IV,V} = F_y / (A_y)_{\Sigma,IV,V} = 1/4506.029 \approx 2.219 \cdot 10^{-4}$ Н.

В модели VI суммарная площадь поверхностей КЭ типа SHELL, имеющих координату $Y=103.9$ мм, $(A_y)_{\Sigma,VI} = 4549.908$ мм², поэтому и сила $(F_y)_{1,VI} = F_y / (A_y)_{\Sigma,VI} = 1/4549.908 \approx 2.198 \cdot 10^{-4}$ Н.

Для задания результирующей силы $F_z=1000$ Н также нужно было определиться с общей длиной ребер КЭ типа SHELL, имеющих координату $Z=76$ мм. Для типичной структуры модели IV СЗ имеем 8 ребер в виде дуг на радиусе 0.05 мм, каждая из которых имеет теоретическую длину 0.0523572 мм, а также 4 ребра в виде линии с теоретической длиной 5.928986 мм и еще 4 ребра в виде линии с теоретической длиной 5.915707 мм. Поскольку в модели применили 100 таких типичных структур, то получили общую длину

$$(L_z)_{\Sigma,IV} = (0.0523572 \cdot 8 + 5.928986 \cdot 4 + 5.915707 \cdot 4) \cdot 100 \approx 4779.76278 \text{ мм.}$$

Поэтому на единицу длины ребер КЭ SHELL, имеющих координату $Z=76$ мм, прикладывали силу

$$(F_z)_{1,IV} = F_z / (L_z)_{\Sigma,IV} = 1000 / 4779.76278 = 0.2092154037820262 \approx 0.2092 \text{ Н.}$$

В модели V округление заменено на соединение плоским КЭ, малое ребро которого имеет теоретическую длину радиусу округления, т.е. 0.05 мм. Поэтому общая длина

$$(L_Z)_{\Sigma,V} = (0.05 \cdot 8 + 5.928986 \cdot 4 + 5.915707 \cdot 4) \cdot 100 = 4777.8772 \text{ мм},$$

и на единицу длины ребер КЭ SHELL, имеющих координату $Z=76$ мм, прикладывали силу

$$(F_Z)_{1,V} = F_Z / (L_Z)_{\Sigma,V} = 1000 / 4777.8772 = 0.2092979702366566 \approx 0.2093 \text{ Н}.$$

В модели VI округления совсем нет. Поэтому общая длина

$$(L_Z)_{\Sigma,VI} = (5.986721 \cdot 2 + 5.973442 \cdot 4 + 2.993355 \cdot 4) \cdot 100 = 4784.0652 \text{ мм},$$

и на единицу длины ребер КЭ типа SHELL, имеющих координату $Z=76$ мм, прикладывали силу

$$(F_Z)_{1,VI} = F_Z / (L_Z)_{\Sigma,VI} = 1000 / 4784.0652 = 0.209027251551672 \approx 0.2090 \text{ Н}.$$

Все полученные числовые характеристики поместили в таблицу 1.

Таблица 1

Входные и расчетные геометрические данные для численного эксперимента нахождения "эквивалентных" модулей упругости

Модели	Габаритные размеры геометрической модели, мм			Габаритные площади, мм ²			Площади с нагрузкой, мм ²		
	L_X	L_Y	L_Z	A_X	A_Y	A_Z	A_X	A_Y	A_Z
I	179.5	103.9	76.0	7898	13640	18650	34.96	4506	109.9
II								4560	110.0
III								4506	–
IV							–	4506	–
V							–	4550	–
VI							–	4550	–

Продолжение таблицы 1

Модели	Отношение площадей			Длина линии с нагрузкой, мм	
	A_X / A_X	A_Y / A_Y	A_Z / A_Z	$(L_X)_{\Sigma}$	$(L_Z)_{\Sigma}$
I, II	$4.426 \cdot 10^{-3}$	0.330	$5.894 \cdot 10^{-3}$	–	–
III		0.334	$5.900 \cdot 10^{-3}$		
IV	–	0.330	–	1520	4779.8
V		0.334	–		4777.9
VI		0.334	–		4784.1

В ней обозначили как A_X , A_Y и A_Z суммарные площади поверхностей, к которым прикладывалась нагрузка в направлении соответствующих осей. Также обозначили как A_X , A_Y и A_Z – площади аналогичных по ориентации расчетных "поверхностей", как бы занимающих весь габарит. Отношение между соответствующими площадями нужны для определения "эквивалентных" упругих характеристик.

Расчетные формулы для определения "эквивалентных" модулей Юнга и коэффициентов Пуассона СЗ силовой панели КА

Для определения "эквивалентных" модулей Юнга имеем такие формулы:

- равнодействующая сила (если прикладывается как распределенная p)

$$F_n = pA_n; \quad n = X, Y, Z; \quad (1)$$

- продольная деформация

$$\varepsilon_n = \Delta L_n / L_n; \quad n = X, Y, Z; \quad (2)$$

- "эквивалентное" напряжение

$$\sigma_n = F_n / A_n; \quad n = X, Y, Z; \quad (3)$$

- "эквивалентный" модуль Юнга

$$E_n = \sigma_n / \varepsilon_n; \quad n = X, Y, Z. \quad (4)$$

Если все эти формулы свести в одну, то получим, что

$$E_n = \frac{pA_n L_n}{A_n \Delta L_n} = \frac{F_n L_n}{A_n \Delta L_n}; \quad n = X, Y, Z. \quad (5)$$

Коэффициенты Пуассона вычисляли по известным формулам [13]:

$$\begin{aligned}\mu_{XY} &= (-\varepsilon_Y)_X / \varepsilon_X; & \mu_{XZ} &= (-\varepsilon_Z)_X / \varepsilon_X; & \mu_{YX} &= (-\varepsilon_X)_Y / \varepsilon_Y; \\ \mu_{YZ} &= (-\varepsilon_Z)_Y / \varepsilon_Y; & \mu_{ZX} &= (-\varepsilon_X)_Z / \varepsilon_Z; & \mu_{ZY} &= (-\varepsilon_Y)_Z / \varepsilon_Z,\end{aligned}\quad (6)$$

где в знаменателях стоят продольные деформации (в направлении приложенной силы), а в скобках числителя – вызванные ими поперечные деформации. Заметим, что первый индекс при коэффициенте Пуассона указывает направление действия растягивающей (сжимающей) силы, а второй – направление поперечной деформации.

Условия 3D-ортотропии "эквивалентных" модулей упругости [13]:

$$\begin{aligned}E_{XX}\mu_{YX} &= E_{YY}\mu_{XY}; & E_{YY}\mu_{ZY} &= E_{ZZ}\mu_{YZ}; & E_{ZZ}\mu_{XZ} &= E_{XX}\mu_{ZX}; & G_{XY} &= G_{YX}; & G_{YZ} &= G_{ZY}; & G_{ZX} &= G_{XZ}; \\ 1 - \mu_{XY}\mu_{YX} - \mu_{YZ}\mu_{ZY} - \mu_{ZX}\mu_{XZ} + 2\mu_{YX}\mu_{ZY}\mu_{XZ} &= 0.\end{aligned}\quad (7)$$

Определение "эквивалентных" плотности, коэффициентов линейного температурного расширения и коэффициента теплопроводности СЗ

"Эквивалентную" плотность ρ определяли по формуле $\rho = \rho_{A_Z} / A_Z$. Она является следствием того факта, что отношение реального объема материала СЗ к "эквивалентному" $V / V_{\sim} = A_Z T / A_Z T = A_Z / A_Z$.

Для определения "эквивалентных" коэффициентов линейного температурного расширения (КЛТР) достаточно провести такой численный эксперимент: взять любую из описанных выше конечно-элементных моделей, задать всюду одинаковые начальную и конечную температуры (например, $\theta_0 = 0$ и $\theta = 100$ градусов), провести расчет деформированного состояния для определения перемещений в характерных точках тела, определиться с полученными температурными деформациями и поделить эти значения на величины изменения температуры. Поскольку в модели ничто не будет мешать развитию температурных деформаций, то все полученные деформации являются тепловыми, упругих деформаций нет, поэтому и напряжения не должны возникать. Т.е. формулы будут такие:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n^\theta = \frac{\Delta L_n}{L_n}; \quad (\alpha_\theta)_n = \frac{\varepsilon_n^\theta}{\theta - \theta_0}; \quad n = X, Y, Z. \quad (8)$$

Полученные значения $(\alpha_\theta)_i$ нужно сравнить с величиной КЛТР сплошного материала α_θ для определения погрешности численного решения.

Логично ожидать, что "эквивалентные" КЛТР будут такими же, как и КЛТР основного материала.

Известно, что коэффициент теплопроводности λ материала является масштабным коэффициентом в законе теплопроводности Фурье. Он связывает величину теплового потока q через единицу площади поверхности с градиентом температуры, т.е. $q = -\lambda \nabla \theta$. Так называемые "мостики тепла" в СЗ – это фольга, и общий тепловой поток в направлении будет пропорциональным отношению минимальной площади сечения СЗ к соответствующей габаритной площади. Поэтому "эквивалентные" коэффициенты теплопроводности можно определить по формулам

$$\lambda_X = \frac{A_X}{A_X} \lambda; \quad \lambda_Y = \lambda_X; \quad \lambda_Z = \frac{A_Z}{A_Z} \lambda, \quad (9)$$

где λ – коэффициент теплопроводности материала фольги. Величину A_Z целесообразно определить соответствующей командой, встроенной в программную среду, где проводится моделирование СЗ.

Определение "эквивалентных" модулей сдвига СЗ силовой панели КА

Для определения "эквивалентных" модулей сдвига СЗ за основу применили лишь КЭ модели I, как самую точную.

Нагружение проводили вдоль одной из плоскостей СЗ в направлении каждой из осей, которые фигурируют первыми в индексах модулей сдвига. Узлам противоположной плоскости запрещали движение в двух направлениях: перпендикулярно этой плоскости и в направлении действия силы. Третье направление смещений запрещалось узлам, которые лежали на одной из боковых плоскостей, параллельно которой была направлена сила. Все узлы плоскости, к которой прикладывалась сила, связывали между собой жесткой связью в направлении, перпендикулярном к указанной плоскости.

Схема замеров перемещений узлов в ячейке, избранной ближе к центру модели, соответствует рис.2. Так как на рисунке изображены оси X и Z , то определялись значения G_{ZX} и G_{XZ} .

Из результатов решения задачи угловую деформацию вычисляли как среднее арифметическое модулей тангенсов двух углов, прилегающих к точке 1:

$$\gamma_{XZ} = \gamma_{ZX} = \{ |(U_X)_4 - (U_X)_1| / L_Z + |(U_Z)_2 - (U_Z)_1| / L_X \} / 2. \quad (10)$$

Потом определяли "эквивалентный" модуль сдвига СЗ:

$$G_{XZ} = F_X / (A_Z \cdot \gamma_{XZ}); \quad G_{ZX} = F_Z / (A_X \cdot \gamma_{ZX}). \quad (11)$$

Нужно отметить, что описанная методика имеет не совсем корректные условия закрепления, но другого варианта, дающего удовлетворительные результаты, в МКЭ нет.

Результата вычислений "эквивалентных" физико-механических характеристик СЗ силовой панели КА

Результаты расчетов конечно-элементных моделей I-VI помещены в таблицы 2 ... 7.

Из рисунка 3 становится понятно, почему получаем $E_{XX} \approx E_{YY}$. Почти полный взнос в перемещение ячейки предоставляют наклоненные (на рисунках) части пластины за счет изгиба, который проходит по одинаковой схеме, хотя и в разные стороны, что не изменяет сути.



Рис. 3. Вид в плане начальной и деформированной (с большим масштабом) геометрии ячейки СЗ при деформировании в направлении: а) – оси X; б) – оси Y

Таблица 2

Продольные деформации и "эквивалентные" модули Юнга

Модель	Деформация в направлении действия силы			"Эквивалентные" модули Юнга, МПа		
	ε_X	ε_Y	ε_Z	E_{XX}	E_{YY}	E_{ZZ}
I	$1.275 \cdot 10^{-2}$	$7.455 \cdot 10^{-3}$	$1.318 \cdot 10^{-4}$	0.00993	0.00983	407
II	$1.201 \cdot 10^{-2}$	$7.056 \cdot 10^{-3}$	$1.320 \cdot 10^{-4}$	0.01049	0.01039	406
III	$0.861 \cdot 10^{-2}$	$5.051 \cdot 10^{-3}$	$1.317 \cdot 10^{-4}$	0.01471	0.01452	407
IV	$1.369 \cdot 10^{-2}$	$8.065 \cdot 10^{-3}$	$1.319 \cdot 10^{-4}$	0.00925	0.00909	407
V	$1.468 \cdot 10^{-2}$	$8.636 \cdot 10^{-3}$	$1.308 \cdot 10^{-4}$	0.00862	0.00849	410
VI	$1.440 \cdot 10^{-2}$	$8.428 \cdot 10^{-3}$	$1.317 \cdot 10^{-4}$	0.00879	0.00870	407

Таблица 3

Поперечные деформации

Модель	$-(\varepsilon_Y)_X$	$-(\varepsilon_Z)_X$	$-(\varepsilon_X)_Y$	$-(\varepsilon_Z)_Y$	$-(\varepsilon_X)_Z$	$-(\varepsilon_Y)_Z$
I	$1.271 \cdot 10^{-2}$	$35.22 \cdot 10^{-8}$	$7.474 \cdot 10^{-3}$	$5.959 \cdot 10^{-8}$	$4.745 \cdot 10^{-5}$	$4.737 \cdot 10^{-5}$
II	$1.203 \cdot 10^{-2}$	$11.82 \cdot 10^{-8}$	$7.074 \cdot 10^{-3}$	$5.950 \cdot 10^{-8}$	$4.753 \cdot 10^{-5}$	$4.732 \cdot 10^{-5}$
III	$0.860 \cdot 10^{-2}$	$11.78 \cdot 10^{-8}$	$5.054 \cdot 10^{-3}$	$5.919 \cdot 10^{-8}$	$4.740 \cdot 10^{-5}$	$4.712 \cdot 10^{-5}$
IV	$1.374 \cdot 10^{-3}$	$7.029 \cdot 10^{-8}$	$8.038 \cdot 10^{-3}$	$8.724 \cdot 10^{-8}$	$2.899 \cdot 10^{-5}$	$6.568 \cdot 10^{-5}$
V	$1.484 \cdot 10^{-2}$	$6.406 \cdot 10^{-8}$	$8.632 \cdot 10^{-3}$	$9.170 \cdot 10^{-8}$	$4.709 \cdot 10^{-5}$	$4.675 \cdot 10^{-5}$
VI	$1.439 \cdot 10^{-3}$	$12.53 \cdot 10^{-8}$	$8.434 \cdot 10^{-3}$	$5.518 \cdot 10^{-8}$	$4.742 \cdot 10^{-5}$	$4.710 \cdot 10^{-5}$

Таблица 4

"Эквивалентные" коэффициенты Пуассона

Модель	μ_{XY}	μ_{XZ}	μ_{YX}	μ_{YZ}	μ_{ZX}	μ_{ZY}
I	0.997	$27.63 \cdot 10^{-6}$	1.002	$7.994 \cdot 10^{-6}$	0.3599	0.3593
II	0.997	$9.798 \cdot 10^{-6}$	1.003	$8.433 \cdot 10^{-6}$	0.3600	0.3584
III	0.997	$13.68 \cdot 10^{-6}$	1.001	$11.72 \cdot 10^{-6}$	0.3600	0.3578
IV	0.997	$5.134 \cdot 10^{-6}$	0.997	$10.82 \cdot 10^{-6}$	0.2199	0.4981
V	1.011	$4.362 \cdot 10^{-6}$	1.000	$10.62 \cdot 10^{-6}$	0.3601	0.3576
VI	1.011	$8.703 \cdot 10^{-6}$	1.001	$6.546 \cdot 10^{-6}$	0.3600	0.3576

Характеристики точности выполнения условий 3D-ортотропии "эквивалентных" модулей Юнга поместили в таблицу 5. А результаты определения "эквивалентных" модулей сдвига поместили в таблицу 6.

Значения температурных деформаций и результаты сравнения "эквивалентных" коэффициентов линейного температурного расширения поместили в таблицу 7.

Результаты таблицы 7 с высокой точностью подтвердили тот факт, что температурные деформации не зависят от внутренней геометрии объекта, а зависят лишь от значения КТЛР основного материала и величины изменения температуры. Иначе говоря, для СЗ из однородного (гомогенного) материала все $(\alpha_\theta)_n = \alpha_\theta$; $n = X, Y, Z$.

Таблица 5

Точность выполнения условий 3D-ортотропии "эквивалентных" модулей Юнга

Модель	$\frac{E_{XX}\mu_{YX}}{E_{YY}\mu_{XY}} - 1$	$\frac{E_{YY}\mu_{ZY}}{E_{ZZ}\mu_{YZ}} - 1$	$\frac{E_{ZZ}\mu_{XZ}}{E_{XX}\mu_{ZX}} - 1$
I	0.017	0.100	0.066
II	0.015	0.088	0.053
III	0.017	0.088	0.052
IV	0.016	0.029	0.027
V	0.004	-0.303	-0.424
VI	0.0005	0.167	0.119

Таблица 6

"Эквивалентные" модули сдвига, МПа

Модель	G_{XY}	G_{XZ}	G_{YX}	G_{YZ}	G_{ZX}	G_{ZY}
I	$1.2 \cdot 10^{-5}$	87.2	$1.8 \cdot 10^{-5}$	59.4	86.8	58.3

Таблица 7

Относительные температурные удлинения ($\alpha_\theta = 1.25 \cdot 10^{-5}$ при $\theta - \theta_0 = 100$) и отношение "эквивалентных" КТЛР к КТЛР основного материала

Модель	$\varepsilon_X^\theta = \Delta L_X^\theta / L_X \cdot 10^3$	$\varepsilon_Y^\theta = \Delta L_Y^\theta / L_Y \cdot 10^3$	$\varepsilon_Z^\theta = \Delta L_Z^\theta / L_Z \cdot 10^3$	$\frac{(\alpha_\theta)_X}{\alpha_\theta}$	$\frac{(\alpha_\theta)_Y}{\alpha_\theta}$	$\frac{(\alpha_\theta)_Z}{\alpha_\theta}$
I	$\frac{0.0224289}{17.94688} \approx 1.2497$	$\frac{0.0130219}{10.3923} \approx 1.2530$	$\frac{0.02375}{19.0} \approx 1.2500$	0.9998	1.0024	1.0000
II	$\frac{0.0224341}{17.94688} \approx 1.2500$	$\frac{0.0129901}{10.3923} \approx 1.2500$	$\frac{0.02375}{19.0} \approx 1.2500$	1.0000	0.9998	1.0000
III	$\frac{0.0224254}{17.94688} \approx 1.2495$	$\frac{0.0129954}{10.3923} \approx 1.2505$	$\frac{0.02375}{19.0} \approx 1.2500$	0.9996	1.0004	1.0000
IV	$\frac{0.0224256}{17.94688} \approx 1.2496$	$\frac{0.0129371}{10.3923} \approx 1.2449$	$\frac{0.02375}{19.0} \approx 1.2500$	0.9996	0.9959	1.0000
V	$\frac{0.0224336}{17.94688} \approx 1.2500$	$\frac{0.0129329}{10.3923} \approx 1.2445$	$\frac{0.02375}{19.0} \approx 1.2500$	1.0000	0.9956	1.0000
VI	$\frac{0.0224336}{17.94688} \approx 1.2500$	$\frac{0.0129329}{10.3923} \approx 1.2445$	$\frac{0.02375}{19.0} \approx 1.2500$	1.0000	0.9956	1.0000

Итоговые результаты определения "эквивалентных" физико-механических характеристик СЗ силовой панели КА

Из таблиц результатов можем сделать вывод, что наибольшую точность имеют величины коэффициентов Пуассона μ_{XY} и μ_{YX} . Несмотря на некоторую асимметрию в геометрии СЗ в направлениях X и Y, как это видно из таблицы 4, можно принимать, что $\mu_{XY} = \mu_{YX}$, причем для СЗ, что анализируется, можно принять, что $\mu_{XY} = \mu_{YX} = 1.0$.

На основании данных тех же таблиц можем сделать вывод, что наименьшую точность имеют полученные величины коэффициентов Пуассона μ_{XZ} и μ_{YZ} . Поскольку традиционно для 3D-ортотропных материалов программа требует введения именно этих коэффициентов, а через них будет высчитывать

коэффициенты μ_{ZX} и μ_{ZY} , то коэффициенты μ_{XZ} и μ_{YZ} нужно подсчитывать из условий 3D-ортотропии (7) после определения соответствующих составляющих:

$$\mu_{XZ} = \frac{E_{XX}}{E_{ZZ}} \mu_{ZX}; \quad \mu_{YZ} = \frac{E_{YY}}{E_{ZZ}} \mu_{ZY}, \quad (12)$$

где нужно назначить, что величины $\mu_{ZX} = \mu_{ZY} = \mu$ сплошного материала фольги, из которой изготовлен СЗ.

Поскольку в направлении оси Z фольга СЗ деформируется как обычный стрежень на растяжение, то можем убедиться, что отношение площадей $A_Z / A_Z = 5.894 \cdot 10^{-3}$ с точностью до четвертого знака определяет отношение модулей Юнга: $E_{ZZ} / E = 407 / 0.69 \cdot 10^5 \approx 5.899 \cdot 10^{-3}$. Поэтому для определения E_{ZZ} вместо сложных расчетов нужно применять формулу

$$E_{ZZ} = EA_Z / A_Z. \quad (13)$$

В модели IV значения коэффициентов Пуассона μ_{ZX} и μ_{ZY} довольно значительно отличаются от найденных на других моделях СЗ. Причиной этого, очевидно, являлось искривленность КЭ SHELL281, аппроксимирующих округления на сгибах фольги. Это предположение следует из отрицательной диагностики (программой) качества этих КЭ (почти полный перевод): "...элемент № ... имеет большое искривление и может привести к плохим результатам". И дается такое объяснение: "У этого КЭ есть угол, больший, чем допускается между нормальными в центре поверхности КЭ и в некоторых угловых точках КЭ. Значение по замалчиванию – до 30 градусов. Используйте более лучшие размеры КЭ, чтобы уменьшить углы".

В других моделях такой отрицательной диагностики нет.

Учтем, что эти КЭ и так критически длинные относительно своей толщины и ширины. Если на округлении (рис.1-б) применить по два КЭ, то соотношение длина-ширина станет еще в два раза больше (т.е. хуже), что также не будет содействовать повышению точности результатов расчетов.

Итоговые значения "эквивалентных" модулей упругости модели СЗ приведены в таблице 8.

Таблица 8

Расчетные "эквивалентные" модули упругости модели сотового заполнителя из алюминиевого 6-гранного профиля (фольги) 5056-6-23

СЗ типа HEXCEL, из фольги	Модули упругости, МПа			Модули сдвига, МПа			Коэффициенты Пуассона		
	E_{XX}	E_{YY}	E_{ZZ}	G_{XY}	G_{YZ}	G_{XZ}	$\mu_{XY} = \mu_{YX}$	$\mu_{YZ} = \mu_{ZY}$	$\mu_{ZX} = \mu_{XZ}$
5056-6-23	0.01	0.01	407	10^{-5}	56	84	1.0	$8.85 \cdot 10^{-6}$	0.36

Примечание 1. Для определения "эквивалентных" модулей Юнга E_{XX} и E_{YY} рекомендуют [1] применять формулы $E_{XX} = 0.866E\delta / a$ и $E_{YY} = 0.5E\delta / a$, которые дают разные значения этих модулей: $E_{XX} \approx 229$ МПа и $E_{YY} \approx 132$ МПа. Эти значения примерно на четыре порядка превышают полученные в численном эксперименте (табл.8), что указывает на ошибочность указанных формул.

Примечание 2. При уменьшении размера ячейки коэффициент Пуассона μ_{XY} будет плавно, но не пропорционально, уменьшаться от значения 1.0 к значению в сплошном алюминиевом сплаве, т.е. к 0.36.

Примечание 3. По обыкновению для СЗ типа HEXCEL рекомендуют [1, 8] принять значения $E_{XX} = E_{YY} = G_{XY} = G_{YX} = 0$. Это приемлемо для расчетов напряженно-деформированного состояния пластины с сотовым заполнителем среднего слоя аналитическими методами, но тогда применение расчетной программой обратных формул (12), т.е.

$$\mu_{ZX} = \frac{E_{ZZ}}{E_{XX}} \mu_{XZ}; \quad \mu_{ZY} = \frac{E_{ZZ}}{E_{YY}} \mu_{YZ} \quad (14)$$

(программа считает, что $\mu_{YZ} = \mu_{XZ}$) не позволит получить значений $\mu_{ZX} = \mu_{ZY} = \mu$, а приведет к фатальной ошибке из-за деления на ноль.

Примечание 4. "Эквивалентный" модуль Юнга E_{ZZ} для СЗ типа HEXCEL рекомендуют [1, 4-8] рассчитывать по формуле $E_{ZZ} = E\rho / \rho$, где "эквивалентная" плотность $\rho = 1.54\rho\delta / a$. В нашем случае $\rho = 1.54 \cdot 2700 \cdot 0.023 / 6 \approx 15.94$ кг/м³, поэтому $E_{ZZ} = E\rho / \rho = 0.69 \cdot 10^5 \cdot 15.94 / 2700 \approx 0.00407 \cdot 10^5 = 407$ МПа. Это значение буквально совпадает со значениями, полученными по формуле (13) и на конечно-элементных моделях (см. таблицу 2). Если из формулы $E_{ZZ} = E\rho / \rho$ с помощью $\rho = 1.54\rho\delta / a$ исключить ρ / ρ , то получим $E_{ZZ} = 1.54E\delta / a$. Поэтому для определения E_{ZZ} можно использовать формулу (13), или последнюю, которые не нуждаются в знании значений ρ и ρ :

$$\underline{E}_{ZZ} = EA_Z / A_Z \quad \text{или} \quad \underline{E}_{ZZ} = 1.54E\delta / a. \quad (15)$$

Примечание 5. Для определения "эквивалентных" модулей сдвига рекомендуют [8] применять формулы

$$\underline{G}_{XZ} = \frac{a + b \cos \beta}{(a + b) \sin \beta} \frac{\delta}{a} G = n_X \frac{\delta}{a} G; \quad \underline{G}_{YZ} = \frac{b \sin \beta}{a + b \cos \beta} \frac{\delta}{a} G = n_Y \frac{\delta}{a} G, \quad (16)$$

которые для СЗ типа HEXCEL (при $a = b$ и $\beta = 60$ градусов) вырождаются в

$$\underline{G}_{XZ} = 0.866 \frac{\delta}{a} G; \quad \underline{G}_{YZ} = 0.577 \frac{\delta}{a} G. \quad (17)$$

Модуль сдвига материала фольги $G = E / [2(1 + \mu)]$, следовательно, $G = 0.69 \cdot 10^5 / (2 + 2 \cdot 0.36) \approx 25368$ МПа, а $\underline{G}_{XZ} = 0.866 \cdot (0.023 / 6) \cdot 25368 \approx 84.2$ МПа, $\underline{G}_{YZ} = 0.577 \cdot (0.023 / 6) \cdot 25368 \approx 56.1$ МПа. Эти значения близки к значениям таблицы 5, но не нуждаются в сложных вычислениях. Относительно модулей сдвига \underline{G}_{XY} и \underline{G}_{YZ} , то в СЗ их очень малые значения никак не могут повлиять на результаты расчетов, поэтому их можно принять произвольными, например $\underline{G}_{XY} = \underline{G}_{YZ} = 10^{-5}$ МПа (но не нулевыми, чтобы не возникали фатальные ошибки при расчетах в программах по МКЭ). Поэтому именно эти значения поместили в итоговой таблице 8.

Методика определения "эквивалентных" физико-механических характеристик металлического сотового заполнителя типа HEXCEL

Учитывая, что:

- конечно-элементные модели СЗ на основе двумерных КЭ типа SHELL нуждаются в намного большем времени как при создании (создается большое количество очень незначительных по размерам дополнительных КЭ типа RIGID), так и при решении задачи, не давая заметного выигрыша в количестве степеней свободы решаемой СЛАУ (требования к ЭВМ);

- наиболее точная конечно-элементная модель СЗ на основе двумерных КЭ типа SHELL имела проблемные КЭ на округлениях, что (вероятно) привело к низкой точности определения "эквивалентных" коэффициентов Пуассона $\underline{\mu}_{ZX}$ и $\underline{\mu}_{ZY}$ (табл.4), которые должны иметь значения, близкие к значению коэффициента Пуассона материала фольги;

- определение многих значений "эквивалентных" характеристик СЗ может быть проведено без сложных конечно-элементных расчетов, предлагается такая **методика определения "эквивалентных" физико-механических характеристик металлического сотового заполнителя типа HEXCEL:**

1. модуль Юнга \underline{E}_{ZZ} определять по формулам (15), т.е. $\underline{E}_{ZZ} = EA_Z / A_Z$ или $\underline{E}_{ZZ} = 1.54E\delta / a$;
2. конечно-элементную модель создавать упрощенной, аналогичную модели II (можно III);
3. модули Юнга \underline{E}_{XX} и \underline{E}_{YY} определять в численном эксперименте и затем их приравнять среднему значению, т.е. $\underline{E}_{XX} = \underline{E}_{YY} \approx (\underline{E}_{XX} + \underline{E}_{YY}) / 2$;
4. коэффициенты Пуассона $\underline{\mu}_{XY}$ и $\underline{\mu}_{YX}$ назначать $\underline{\mu}_{XY} = \underline{\mu}_{YX} = 1.0$;
5. коэффициенты Пуассона $\underline{\mu}_{ZX}$ и $\underline{\mu}_{ZY}$ назначать равными коэффициенту Пуассона материала фольги, т.е. $\underline{\mu}_{ZX} = \underline{\mu}_{ZY} = \mu$;
6. коэффициенты Пуассона $\underline{\mu}_{XZ}$ и $\underline{\mu}_{YZ}$ определять по формулам ортотропной симметрии (12), т.е. $\underline{\mu}_{XZ} = \frac{\underline{E}_{XX}}{\underline{E}_{ZZ}} \underline{\mu}_{ZX}$; $\underline{\mu}_{YZ} = \frac{\underline{E}_{YY}}{\underline{E}_{ZZ}} \underline{\mu}_{ZY}$.
7. модули сдвига определять по формулам (17), т.е. $\underline{G}_{XZ} = 0.866 \frac{\delta}{a} G$; $\underline{G}_{YZ} = 0.577 \frac{\delta}{a} G$ и назначать $\underline{G}_{XY} = \underline{G}_{YZ} = 10^{-5}$;
8. "эквивалентную" плотность $\underline{\rho}$ определять по формуле $\underline{\rho} = \rho A_Z / A_Z$ или по формуле $\underline{\rho} = 1.54 \rho \delta / a$;
9. все "эквивалентные" коэффициенты линейного температурного расширения приравнять КТЛР материала фольги СЗ, т.е. $(\alpha_\theta)_X = (\alpha_\theta)_Y = (\alpha_\theta)_Z = \alpha_\theta$;
10. "эквивалентные" коэффициенты теплопроводности определять по формулам (9), а именно $\underline{\lambda}_X = \frac{A_X}{A_X} \lambda$; $\underline{\lambda}_Y = \lambda_X$; $\underline{\lambda}_Z = \frac{A_Z}{A_Z} \lambda$, где λ – коэффициент теплопроводности материала фольги. Величину площади A_Z целесообразно определить соответствующей командой, встроенной в программную среду.

11. "эквивалентные" коэффициенты теплоемкости C_p принимать без изменений, поскольку они применяются только при расчетах нестационарной теплопроводности "в паре" с плотностью материала, которая будет заменена на "эквивалентное" значение.

Примечание 5. Некоторые модули Юнга и сдвига в реальности будут иметь бóльшие значения, что связано с технологией изготовления СЗ. Для учета этого факта вводят поправочные коэффициенты [1].

Выводы

Проведенное численное моделирование металлического сотового заполнителя типа HEXCEL позволило сделать следующие общие выводы:

1. При необходимости проведения расчетов указанного заполнителя в составе композитной плиты методом конечных элементов с высокой точностью, рационально и достаточно применять трехмерные конечные элементы типа Solid первого порядка аппроксимации.
2. Большинство "эквивалентных" физико-механических характеристик металлического сотового заполнителя типа HEXCEL определяются с высокой точностью известными простыми формулами. Но не все: модули Юнга E_{XX} и E_{YY} определяются с большими погрешностями. Учитывая, что их соотношение влияет на соотношение между коэффициентами Пуассона μ_{XY} и μ_{YX} , эти модули необходимо назначать на основе численных расчетов.
3. Обоснована цельная методика определения "эквивалентных" физико-механических характеристик металлического сотового заполнителя типа HEXCEL.

До методики визначення "еквівалентних" фізико-механічних характеристик стільникового заповнювача композиційної плити

К.М. Рудаков, В.М. Маслей

Анотація. Розглянуто проблему визначення "еквівалентних" фізико-механічних характеристик (ФМХ) стільникового заповнювача типу HEXCEL для їхнього наступного використання у скінченно-елементних розрахунках. Необхідність дослідження викликана автоматизованим контролем якості характеристик, що вводяться, програмами на основі методу скінченних елементів: нулі не допускаються, а також перевіряється дотримання співвідношень 3D-ортотропії введених ФМХ.

Було створено шість скінченно-елементних моделей стільникового заповнювача марки 5056-6-23: три на основі тривимірних гексагональних скінченних елементів (СЕ) і три на основі двовимірних чотирикутних СЕ. Округлення на згинах алюмінієвої фольги моделювали максимально точно (СЕ другого порядку наближення), приблизно або ігнорували (СЕ першого порядку наближення).

На основі проведених розрахунків визначені "еквівалентні" ФМХ стільникового заповнювача, проведена оцінка їхньої точності (таблиці), виявлені проблеми й способи їх подолання. На закінчення сформульовані обґрунтовані в розрахунках методичні рекомендації визначення "еквівалентних" ФМХ стільникового заповнювача типу HEXCEL, у яких максимально використана заміна скінченно-елементних розрахунків на прості аналітичні формули.

Ключові слова: стільниковий заповнювач; "еквівалентні" фізико-механічні характеристики, 3D-ортотропія, чисельне 3D моделювання; метод скінченних елементів; методичні рекомендації.

To a procedure of definition of the "equivalent" physico-mechanical characteristics of a honeycomb filler of a composite plate

Konstantin Rudakov, Volodymyr Maslyey

Abstract. Purpose. To fulfil methodical recommendations about definition of "equivalent" physicomachanical characteristics of a metal honeycomb filler of type HEXCEL.

Methodology. Carried out calculations by a FEM of six models of a honeycomb filler of type HEXCEL on the basis of a foil 5056-6-23, and also applied engineering formulas.

Findings. It is shown, that in need of carrying out of calculations of a honeycomb filler of type HEXCEL as a part of a composite plate by a FEM with high accuracy, rationally and it is enough to apply three-dimensional finite elements of type Solid of the first order of approximation. It is revealed, that the majority of "equivalent" physicomachanical characteristics of the specified filler are defined with high accuracy simple formulas. But not all: modules Yung's boy E_{XX} and E_{YY} are defined with the big errors. Considering, that their parity influences a parity between factors Пуассона μ_{XY} and μ_{YX} , these modules are necessary for defining on the basis of numerical calculations.

Originality. Methodical recommendations about definition of all "equivalent" physicomechanical characteristics of a metal honeycomb filler of type HEXCEL, necessary for thermal and thermoelastic calculations are created.

Keywords: a honeycomb filler; the "equivalent" physicomechanical characteristics, 3D-orthotropy, numerical 3D modelling; FEM; methodical recommendations.

References

1. Иванов А.А. Новое поколение сотовых заполнителей для авиационно-космической техники / А.А. Иванов, С.М. Кашин, В.И. Семенов. – М. : Энергоатомиздат, 2000. – 436 с.
2. ECSS-E-HB-32-20. Part 3A. Structural materials handbook – Part 3: Load transfer and design of joints and design of structures. (2011), available at: http://www.ecss.nl/wp-content/uploads/handbooks/ecss-e-hb/ECSS-E-HB-32-20_Part3A.pdf
3. Сотовые заполнители и панельные конструкции космического назначения: моногр. В 2 т. Т. 1. Технологические несовершенства сотовых заполнителей и конструкций / А.В. Гайдачук, О.А. Карпикова, А.В. Кондратьев, М.В. Сливинский; под. ред. А. В. Гайдачука. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского "Харьк. авиац. ин-т", 2012. – 279 с.
4. Александров А.Я. Об определении приведенных упругих параметров сотовых заполнителей // Расчеты элементов авиационных конструкций. М.: Машиностроение. - 1965. – № 4. – С. 59-70.
5. Прочность, устойчивость, колебания : справ. в трех томах. Том 2. // Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М. : Машиностроение, 1968. – 463 с.
6. Кобелев В.Н. Расчет трехслойных конструкций : Справочник // В.Н. Кобелев, Л.М. Коварский, С.И. Тимофеев. М. : Машиностроение, 1984. – 304 с.
7. Ендогур А.И. Сотовые конструкции. Выбор параметров и проектирование / А.И. Ендогур, М.В. Вайнберг, К.М. Иерусалимский – М. : Машиностроение, 1986. – 200 с.
8. Панин В.Ф. Конструкции с заполнителем: Справочник / В.Ф. Панин, Ю.А. Гладков // М.: Машиностроение, 1991. — 272 с.
9. Оптимальное проектирование композитных сотовых конструкций авиакосмической техники: монограф./ В.Е. Гайдачук, А.В. Кондратьев, В.В. Кириченко, В.И. Сливинский. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2011. – 172 с.
10. ANSYS Structural Analysis Guide ANSYS Release 12.1. (2009), available at : www.ansys.com
11. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций / К.Н.Рудаков // К., 2011. – 317 с., available at: <http://www.cad.dp.ua/stats/FEMAP-102.php>
12. Маслей В.Н. Анализ характеристик гармонических колебаний композитной сотовой панели сканера космического аппарата / В.Н. Маслей, Н.Г. Кришук, А.С. Цыбенко // Проблемы прочности, - 2018. - № 4. – С. 168-178.
13. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий // Изд. 2-е. М. : Главная редакция физ-мат. лит-ры изд-ва "Наука", 1977. – 416 с.