

Коэффициент концентрации напряжений у контактирующего с болтом нагруженного отверстия в монослое ортотропного композиционного материала

К.Н. Рудаков • Ю.Н. Дифучин • С.А. Бабиенко

КПИ им. Игоря Сикорского, г. Киев, Украина

Received: 2 February 2019 / Accepted: 8 February 2019

Аннотация. Рассмотрена проблема определения коэффициента концентрации напряжений у контактирующего с болтом отверстия (ККНк) в ослабленном сечении пластины из монослоя ортотропного композиционного материала. Сформулировано несколько предположений о характере изменения ККНк в зависимости от отношения диаметра отверстия к ширине пластины, а также от наличия ортотропии в материале пластины. Это позволило предложить формулу, прогнозирующую указанный коэффициент без проведения сложных расчетов контактных задач, используя известные аппроксимации для изотропного материала и решение Лехницкого-Солдатова для растянутой ортотропной бесконечной пластины со свободным отверстием. С использованием результатов численных расчетов методом конечных элементов краевых контактных краевых задач проведена верификация предложенной формулы, показана ее хорошая точность в практически применяемом диапазоне отношения диаметра отверстия к ширине пластины.

Ключевые слова: коэффициент концентрации напряжений; 2D-ортотропия; конечно-элементные решения.

Введение

В статье [1] на конкретном примере рассмотрели, в частности, вопрос о величине теоретического коэффициента концентрации напряжений (ККН) у отверстий в болтовом соединении (БС) композиционной пластины с металлом. Как отношение между ККНк (ККН – у отверстия с болтом) и ККН (у отверстия без болта) ввели функцию от параметров БС, обозначенную как ω_i , где i – номер отверстия. Там же предположили, что в рассмотренном болтовом соединении величина ω_i должна превышать две единицы, но подробно эту функцию не исследовали.

Для легкого отличия разных коэффициентов и при разных условиях, обозначили величины теоретического ККН у свободного отверстия как α – с учетом нетто-сечения, а K – с учетом брутто-сечения для изотропного материала, и, соответственно, как $\tilde{\alpha}$ и \tilde{K} – для ортотропного материала. При контакте отверстия с болтом все аналогичные ККНк подчеркивали: $\underline{\alpha}$, \underline{K} и $\underline{\tilde{\alpha}}$ ($\underline{\tilde{K}}$ – не подсчитывали).

Приведем известные аналитические решения и аппроксимации для тонких пластин с круглым отверстием диаметра d . Предполагалась линейная упругость.

1) Бесконечно широкие пластины.

1.1) Концентрация напряжений у *свободного* отверстия в растянутой на бесконечности напряжением $\sigma_X = \sigma_\infty$ бесконечной *изотропной* пластине (задача Кирша). Напряжения и ККН [2]:

$$\sigma_{\max} = 3\sigma_{\text{ном}}; \quad \sigma_{\text{ном}} = \sigma_\infty; \quad K = \alpha = 3. \quad (1)$$

1.2) Концентрация напряжений у *свободного* отверстия в растянутой на бесконечности напряжением $\sigma_X = \sigma_\infty$ бесконечной *ортотропной* пластине.

Аналог решения задачи Кирша для 2D-ортотропного материала дан в главе 4 книги [3]. В обозначениях упругих констант статьи [4], формулы (31.1) и (32.15) книги [3] (оси ортотропии направлены вдоль и поперек направления действия нагрузки, плоское напряженное состояние) записываются как

$$k = \sqrt{E_{XX} / E_{YY}}; \quad m = E_{XX} / G_{XY} - 2\mu_{XY}; \quad \tilde{K} = \tilde{\alpha} = 1 + \sqrt{2k + m}. \quad (2)$$

В статье [1] для слоя материала с лентой УОЛ-300-1А, ориентированной в направлении силовой нагрузки, подставив значения из таблицы 3 статьи [4] $E_{xx} = E_{11} = 150000$ МПа, $E_{yy} = E_{22} = 8000$ МПа, $G_{xy} = G_{12} = 4400$ МПа и $\mu_{xy} = \mu_{12} = 0.29$, получили, что в ослабленном сечении $\tilde{K} = \tilde{\alpha} \approx 7.50$. Если этот же материал уложить поперек пластины, то, в соответствии с формулами (2) в ослабленном сечении $\tilde{K} = \tilde{\alpha} \approx 2.30$.

1.3) Концентрация напряжений у *контактирующего* с цилиндром отверстия в бесконечной *изотропной* пластине. По сведениям из [5], возможный метод аналитического решения задачи наметил Bickley (1928): тонкая бесконечная пластина была закреплена в точке. Задачу как контактную (с отверстием, контактирующим с цилиндром) рассматривали Штаерман (1949) [6] и Persson (1964) – для одинаковых материалов [7] (упоминается в разделе 5.3 книги [8]), Goodman и Keer (1965), Mostofi и Gohar (1980), Ciavarella и Decuzzi (2001) – для различных материалов [9]. В частности, в решении, предложенном Persson, цилиндр имеет близкий к d диаметр $d_c < d$, к оси цилиндра приложена сосредоточенная поперечная нагрузка, а пластина на бесконечности оперта; напряженное состояние – плоское, трение в контакте отсутствует [7, 8, 10]. Формульная часть содержит "не берущийся" интеграл (автором предложена таблица).

1.4) Концентрация напряжений у *контактирующего* с цилиндром отверстия в бесконечной *ортотропной* пластине. Аналитические решения получаются из известных решений (см. ниже проблему 2.4) для пластины с ограниченной шириной предельным переходом при $\zeta = d/w \rightarrow 0$, причем $\tilde{\alpha}(\zeta \rightarrow 0) \rightarrow \infty$. Практического значения эти аналитические решения не имеют.

2) Пластины шириною w .

2.1) Концентрация напряжений у *свободного* отверстия в растянутой *изотропной* пластине шириною w . Напряжения ($F = qwh$ – результирующее усилие, q – распределенная на торце пластины нагрузка, h – толщина пластины) [5, 10]:

$$\sigma_{\max} = \alpha \sigma_{\text{ном}}; \quad \sigma_{\text{ном}} = F/[h(w-d)]; \quad K = \alpha/(1-\zeta). \quad (3)$$

Методами фотоупругости в диапазоне $0 \leq \zeta \leq 1$ получена аппроксимация ККН α [10, табл.17.1]:

$$\alpha(\zeta) \approx 3.000 - 3.140\zeta + 3.667\zeta^2 - 1.527\zeta^3. \quad (4)$$

При $\zeta = 1/6$ (случай из [1, 4]) имеем $\alpha(1/6) \approx 2.57$. Через формулу связи между двумя коэффициентами имеем, что при $\zeta = 1/6$ значение $K(1/6) = \alpha/(1-\zeta) \approx 2.57/(1-1/6) \approx 3.08$. В справочнике [11] в этом случае $K(1/6) \approx 3.12$. Различие составляет примерно 1.2%, т.е. несущественно.

2.2) Концентрация напряжений у *свободного* отверстия в растянутой *ортотропной* пластине шириною w . Имеется несколько аналитических решений, через функции комплексного переменного. Обычно используются для проблемы 2.4 (см. ниже).

2.3) Концентрация напряжений у *контактирующего* с цилиндром отверстия в растянутой *изотропной* пластине шириною w .

По сведениям из [5], Knight (1935) предложил аналитическое решение при $\zeta = 0.5$, а Theocaris (1956) [12] – в диапазоне $0.2 \leq \zeta \leq 0.5$. В разные годы экспериментально (датчики напряжений, фотоупругость) проблему исследовали Coker и Filon (1931), Schaechterle (1934), Frocht и Hill (1940), Jessop и др. (1958), Cox и Brown (1964). Используемые в авиации [13] зависимости ККНк [12] $\underline{K}(\zeta)$ и $\underline{\alpha}(\zeta)$ показаны в таблице 1 и на рис.1. Рассмотренный диапазон $0.2 \leq \zeta \leq 0.5$ выводит "правую" асимптоту \underline{K} на уровень примерно 5.0. Очевидно, что при $\zeta \rightarrow 0$ (бесконечном расширении пластины) и сохранении величины $\sigma_{\text{ном}}$, результирующая нагрузка, приходящаяся на болт, и σ_{\max} стремятся к бесконечности. Именно поэтому при $\zeta \rightarrow 0$ величины ККНк $\underline{K} = \underline{\alpha} \rightarrow \infty$, т.е. "левая" асимптота для обеих характеристик – бесконечность.

Таблица 1

Коэффициенты концентрации напряжений \underline{K} и $\underline{\alpha}$ в ослабленном сечении (квази) изотропной пластины (ККНк, контакт отверстия с цилиндром)

ζ	\underline{K}					$\underline{\alpha}$				
	[12, 13]	[5]	[14, 15]	[15]	МКЭ	[12, 13]	[5]	[14, 15]	[15]	МКЭ
0	–	–	∞	∞	–	–	–	∞	∞	–
1/12	–	–	–	–	12.8	–	–	–	–	11.7
1/6	–	7.62	–	–	7.19	–	6.35	–	–	5.99
0.2	6.55	6.90	5.95	5.55	–	5.24	5.52	4.76	4.44	–
0.3	5.25	5.36	–	–	5.01	3.68	3.75	–	–	3.51
0.4	4.96	4.75	3.68	3.53	4.50	2.98	2.85	2.21	2.12	2.70
0.5	5.06	5.01	–	–	4.52	2.53	2.51	–	–	2.26

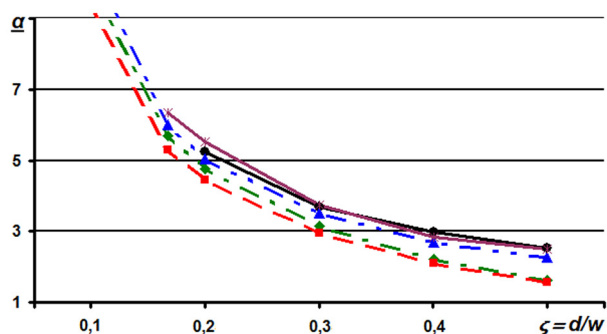


Рис. 1. Графики зависимости ККНк (● – [12, 13]; ж – [5]; ◆ – [14]; ■ – [15]; ▲ – МКЭ) в ослабленном сечении изотропной пластины, контакт отверстия с цилиндром

Очевидно, что аппроксимация (5) не приводит к очень большим значениям при $\zeta \rightarrow 0$, т.е. функция $\alpha(\zeta)$ в (5) к "левой" асимптоте не стремится. Она не стремится и к "правой" асимптоте, поскольку при значениях ζ вблизи единицы из (5) имеем отрицательные величины, что неверно. Однако в практически значимом диапазоне отношений d/w , как следует из графиков рис.1, аппроксимация (5) из [5] дает значения, хорошо согласованные с [12, 13] и с подсчитанными с применением МКЭ (будут получены ниже).

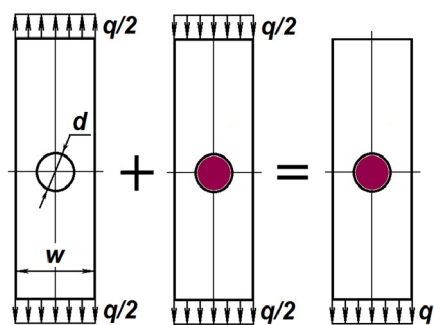


Рис. 2. Схема получения решения [14, 15] о напряженном состоянии при контакте в отверстии пластины

hole) и при "потокосом" нагружении таким же распределенным усилием $q/2$ (см. рис.2). Из условия равновесия $q = p \cdot \zeta$.

В итоге [15], максимальное напряжение в ослабленном отверстием сечении пластины (в наших обозначениях)

$$\sigma_{\max}(\zeta) = p \cdot \left[\frac{\zeta}{2} + \left(\frac{\zeta}{2} + \frac{4}{\pi^2} \right) \frac{\sqrt{2(\sqrt{E_{yy}/E_{xx}} - \mu_{yx}) + E_{yy}/G_{xy}}}{\sqrt{E_{yy}/E_{xx}}} \right] = p \cdot \left[\frac{\zeta}{2} + \left(\frac{\zeta}{2} + \frac{4}{\pi^2} \right) \cdot M \right] = p \cdot S, \quad (6)$$

где символом M заменили дробное выражение с модулями упругости, а символом S – выражение в квадратных скобках. Тогда номинальное напряжение в ослабленном сечении $\sigma_{nom} = phd / (h(w-d)) = pd / (w(1-\zeta)) = p\zeta / (1-\zeta)$.

Получили выражение для ККНк

$$\tilde{\alpha}(\zeta) = \frac{\sigma_{\max}(\zeta)}{\sigma_{nom}} = \frac{1-\zeta}{\zeta} \left[\frac{\zeta}{2} + \left(\frac{\zeta}{2} + \frac{4}{\pi^2} \right) \frac{\sqrt{2(\sqrt{E_{yy}/E_{xx}} - \mu_{yx}) + E_{yy}/G_{xy}}}{\sqrt{E_{yy}/E_{xx}}} \right] = \frac{1-\zeta}{\zeta} \left[\frac{\zeta}{2} + \left(\frac{\zeta}{2} + \frac{4}{\pi^2} \right) \cdot M \right] = \frac{1-\zeta}{\zeta} \cdot S. \quad (7)$$

Из формулы (7) очевидно, что "левая" асимптота $\tilde{\alpha}(0) = \infty$. Что касается "правой" асимптоты, которая в (7) очевидно равна нулю (а это – неверно), то авторы [15] ограничили применение формулы (6) величинами $\zeta \leq 0.5$, что для практического применения достаточно. Как следует из таблицы 3 статьи [15], где решения представлены в форме $\sigma_{\max}(\zeta) = p \cdot S$ при рассмотренных $\zeta = 0$, $\zeta = 0.2$ и $\zeta = 0.4$, погрешности составляли от 2.4% до 15%, в среднем – около 8% (всего девять случаев: для трех случаев различной степени ортотропии (в том числе для квази-изотропной композитной пластины) и при трех указанных значениях ζ). В пластине с

Для двухсрезового болтового соединения изотропной пластины имеется следующая аппроксимация (при $0.15 \leq \zeta \leq 0.75$ и достаточно большом удалении отверстия от края: $e/w \geq 1$, где e – расстояние до свободного края пластины от центра отверстия) [5, стр.358]:

$$\alpha(\zeta) \approx 12.882 - 52.714\zeta + 89.762\zeta^2 - 51.667\zeta^3. \quad (5)$$

Результаты аппроксимации (5) для характерных значений ζ помещены в таблицу 1 в столбец со ссылкой [5], показаны графиком на рис.1.

Следует отметить, что значения ККНк всегда превышают ККН в свободном отверстии, причем при малых $\zeta = d/w$ – в несколько раз.

однонаправленным композитом погрешности составили от 9% до 15%, причем систематически увеличивались при уменьшении ζ . Авторы статьи [15] посчитали такую точность хорошей для практического применения.

Часть данных из таблицы 3 статьи [15], а именно по изотропному материалу (величина $M = 2$), пересчитали на ККНк в соответствии с формулой (7), т.е. $\tilde{\alpha}(\zeta) = \frac{1-\zeta}{\zeta} \cdot S$, и привели в таблице 1. Сравнение

результатов показывает, что решение [14] в предельном переходе к изотропному материалу дает существенно заниженные значения, по сравнению с [12, 13] и аппроксимацией (5) из [5], а формула (7) – еще меньшие. Это указывает на низкую точность решения [14], и еще худшую – решения [15] даже для изотропной пластины. В случае ортотропии точность не может быть лучше.

В [18] приведены многочисленные графики, в том числе и ККНк, для нескольких конкретных ориентаций 2D-ортотропных монослоев (0, 90, ± 45 градусов) и их комбинаций. Решения получены с применением МКЭ. Вокруг отверстия применяли треугольные КЭ второго порядка аппроксимации (плоская деформация), вдоль половины дуги окружности использовали 28 КЭ, но с переменным шагом, в итоге минимальный относительный размер КЭ составил примерно $0.03 d$ в зоне концентрации напряжений. Зазор и трение в отверстии не задавали. Контакт моделировали как "узел в узел", с помощью коротких (длиною $0.002 d$) КЭ типа Spring (пружина), в части из них (при появлении в них растягивающего напряжения) в итерациях обнуляли их жесткости, чтобы учесть сужение зоны контакта. Т.е., с учетом уровня развития ЭВМ и программ с МКЭ на 1981 год, задача решалась в контактной постановке и с хорошей точностью.

Подводя итог, можем констатировать, что именно для важного в практическом применении случая (см. пункт 2.4) проблема определения ККНк, возможно, не решена достаточно точно и в виде простых формул, приходится применять или сложные, или разовые решения, получаемые численными методами, поэтому проблема является актуальной.

Цель работы: предложить способ прогнозирования коэффициента концентрации напряжений у контактирующего с болтом отверстия в монослое ортотропного композиционного материала, который не будет требовать сложных расчетов; провести его верификацию на основе результатов численных расчетов с применением метода конечных элементов в контактной постановке.

Конечно-элементные модели

В статье [1, табл.1] в численных расчетах было получено, что конечно-элементная модель (один КЭ по толщине пластины) с отверстием $d = 5$ мм в пластине шириною $w = 30$ мм, с размером гексагонального КЭ второго порядка аппроксимации в зоне концентрации напряжений $0.025 \text{ мм} \times 0.025 \text{ мм}$ (относительный размер КЭ – $0.005 d$) давала точность определения ККН не хуже 2%. Поэтому взяли эту модель за основу.

Всем узлам модели, лежащим на одной из лицевых поверхностей пластины, задавали отсутствие степени свободы в направлении нормали к поверхности, а на другой лицевой поверхности пластины ограничения не задавали. Тем самым фактически моделировали пластину удвоенной толщины, в которой реализовывалось плоское напряженное состояние. Для облегчения анализа результатов нагрузку задавали такую, чтобы всегда в ослабленном сечении $\sigma_{\text{ном}} = 100$ МПа, т.е. задавали растягивающую распределенную нагрузку $q = 100(1 - \zeta)$.

Как и в [18], исходный зазор между цилиндром и отверстием, а также трение, не задавали. В отличие от [18], применяли современную модель контакта типа "поверхность–поверхность", с автоматическим определением и корректировкой зоны контакта.

Моделировали две пластины: одну – для определения ККН в свободном от болта отверстии, а вторую – для определения ККНк – с отверстием, контактирующим без зазора со стальным цилиндром (болтом). Длина пластины от отверстия – 45 мм в сторону приложения распределенной растягивающей нагрузки, а в противоположную – 15 мм.

Результаты расчетов. Изотропные пластины

Рис.3 показывает, что графики распределения напряжения σ_x в ослабленном (контактирующем с цилиндром) отверстии сечения пластины, при сохранении неизменным значения номинального по нетто-сечению напряжения и с увеличением ширины *изотропной* пластины располагаются последовательно, всё выше и правее.

На рис.4 изображены графики напряжения σ_x на контуре отверстия. Видно, что $\sigma_x < 0$ реализуется в диапазоне углов ψ от 0 градусов до примерно 43 градусов, а далее нарастает, и максимальное значение σ_x реализуется примерно в точке А пластины (см. рис.3), но чем меньше соотношение $d/w = \zeta$ (чем относительно шире пластина) – тем левее, т.е. точка с максимальным значением σ_x смещается к зоне контакта. Поскольку отклонение от точки А – небольшое, а "недобор" в $(\sigma_x)_{\text{max}}$ на рис.3 довольно существенен, то $(\sigma_x)_{\text{max}}$ для определения величин ККНк выбирали из графиков рис.4, а не рис.3.

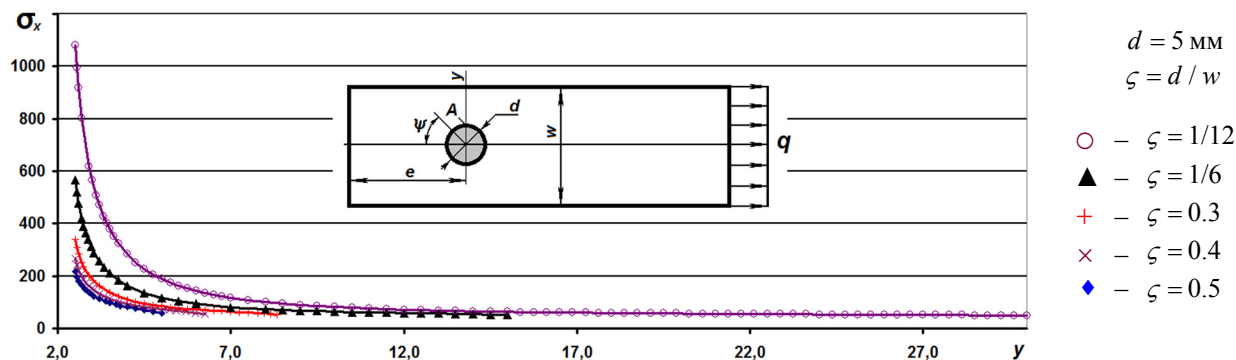


Рис. 3. Графики распределения напряжения σ_x , МПа, в ослабленном (контактирующем с цилиндром диаметра d) отверстием сечении изотропной пластины шириною w . МКЭ. $\sigma_{\text{ном}} = 100$ МПа

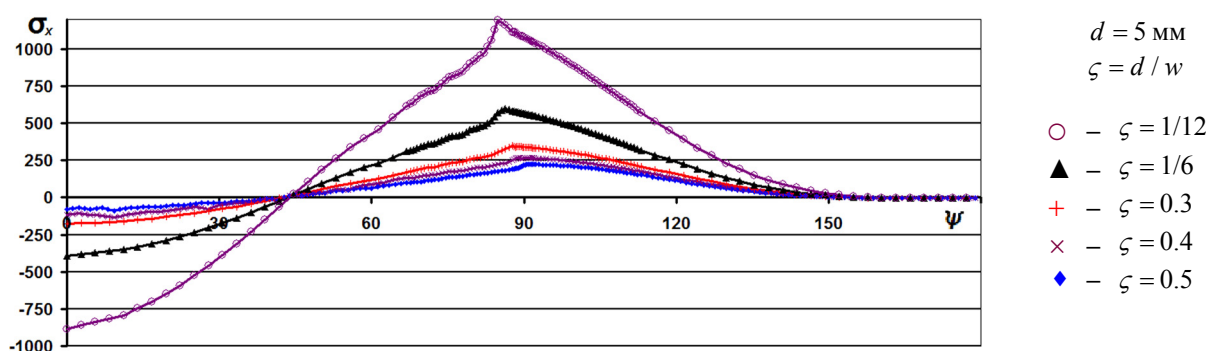


Рис. 4. Графики распределения напряжения σ_x , МПа, вдоль контура отверстия (как функция угла), при различных соотношениях $d/w = \zeta$. Изотропная пластина. МКЭ

Полученные расчетные величины ККНк как функции от $\zeta = d/w$ помещены (под заголовком "МКЭ") в таблицу 1, а также изображены в виде графика на рисунке 1. Соответствие зависимостей [12, 13], формулы (5) и полученных МКЭ можно оценить как хорошее. Близкие результаты были получены и в [17] для квазиизотропной пластины (со схемой укладки ортотропных слоев $[0, +45, -45, 90]_s$) в результате применения МКЭ (табличных данных нет, поэтому значения не приводим). Однако в [17, figure 10] график "МКЭ" систематически лежал немного ниже графика "Theocaris". Это, скорее всего, может указывать на невозможность МКЭ получить теоретический максимум, причем, как известно, в МКЭ эта ошибка по мере огрубления сетки быстро прогрессирует.

Результаты расчетов. Ортотропные пластины

Расчеты провели для монослоя однонаправленной композиционной ленты УОЛ-300-1А (углы укладки $\varphi = 0$ и $\varphi = 90$ градусов). Значения упругих характеристик взяли из таблицы 3 статьи [4]. Полученные расчетные величины ККН $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\zeta)$ и ККНк $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\zeta)$ поместили в таблицу 2.

Прогнозирование ККНк. Ортотропные пластины

Итак, имеются верифицированные для указанных диапазонов значений $\zeta = d/w$ аппроксимации (4) для $\alpha(\zeta)$ и (5) для $\underline{\alpha}(\zeta)$, а также формулы (2) для определения $\tilde{\alpha}(0)$.

Рассмотрели проблему прогнозирования на основе указанных исходных данных зависимости $\tilde{\alpha}(\xi)$. Данные таблицы 2, полученные на основе МКЭ, служили для подтверждения выдвинутых предположений (верификации).

Использовали три предположения.

Первое предположение: отношение $\tilde{\alpha}(\zeta)/\underline{\alpha}(\zeta)$ подобно отношению $\tilde{\alpha}(\zeta)/\alpha(\zeta)$, т.е. влияние ортотропии одинаково как для пластины со свободным отверстием, так и для пластины с отверстием, находящимся в контакте. По крайней мере, в диапазоне $0.167 \leq \zeta \leq 0.5$, как это следует из данных таблиц 1 и 2 и рисунка 5, эта пропорция для УОЛ-300-1А с углом укладки $\varphi = 0$ градусов выполняется с точностью до 3% при каждом ζ , а в среднем – с точностью 0.63%, а с углом укладки $\varphi = 90$ градусов – до 15% и 1.2% соответственно.

Как ранее отмечали, аппроксимация (5) при малых и больших значениях ζ даже не стремится к асимптотам, поэтому есть смысл в дальнейшем уточнить аппроксимацию для ККНк $\underline{\alpha}(\zeta)$ в более широком диапазоне и с учетом асимптот. Однако диапазон $0.167 \leq \zeta \leq 0.5$ фактически является "рабочим", поэтому будем считать первое предположение обоснованным.

Из принятого равенства отношений искомая функция:

$$\tilde{\alpha}(\zeta) = \underline{\alpha}(\zeta) \cdot [\tilde{\alpha}(\zeta) / \underline{\alpha}(\zeta)] = \tilde{\alpha}(\zeta) \cdot [\underline{\alpha}(\zeta) / \alpha(\zeta)]. \quad (8)$$

Для (8) отношение $\underline{\alpha}(\zeta) / \alpha(\zeta)$ становится известным после применения формул (4) и (5). Осталось спрогнозировать $\tilde{\alpha}(\zeta)$ для любых соотношений упругих характеристик ортотропного материала. Формулы (2) дают только $\tilde{\alpha}(0)$, простого теоретического решения для $\tilde{\alpha}(\zeta)$ авторам неизвестно, а результаты применения МКЭ – разовые для конкретных характеристик ортотропного материала, будут использованы для верификации.

Таблица 2

Коэффициенты концентрации напряжений $\tilde{\alpha}$ и $\underline{\tilde{\alpha}}$ ослабленного сечения у свободного отверстия и отверстия с цилиндром, контакт без трения (φ – угол укладки от направления приложения нагрузки, градусы)

ζ	УОЛ-300-1А							
	$\varphi=0$				$\varphi=90$			
	$\tilde{\alpha}_{МКЭ}$	$\underline{\tilde{\alpha}}_{МКЭ}$	$\tilde{\alpha}_{прогн}$	$\delta, \%$	$\tilde{\alpha}_{МКЭ}$	$\underline{\tilde{\alpha}}_{МКЭ}$	$\tilde{\alpha}_{прогн}$	$\delta, \%$
0*	7.50	–	–	–	2.30	–	–	–
1/12	7.19	33.1	–	–	2.34	11.9	–	–
1/6	6.52	16.6	15.6	-6.0	2.19	6.08	4.91	-19
0.3	5.64	9.05	8.78	-2.9	2.05	3.33	2.97	-11
0.4	5.10	6.72	6.30	-6.3	2.00	2.48	2.31	-6.7
0.5	4.62	5.28	5.13	-2.8	1.97	1.95	2.10	7.8

Примечание. Случай $\zeta=0$ (помечено *) с помощью МКЭ не рассматривался. Значения получили по формулам (2), привели для последующего использования.

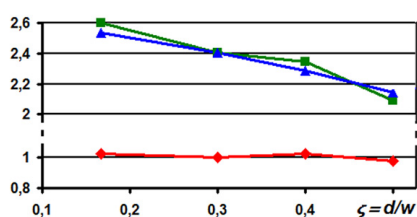


Рис. 5. Графики отношений $\tilde{\alpha}(\zeta) / \underline{\alpha}(\zeta)$ (■) и $\tilde{\alpha}(\zeta) / \alpha(\zeta)$ (▲), а также их взаимного соотношения (♦). Материал УОЛ-300-1А, угол укладки $\varphi=0$ градусов

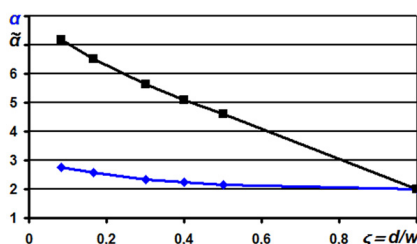


Рис. 6. Графики функций $\alpha(\zeta)$ (♦) и $\tilde{\alpha}(\zeta)$ (■, УОЛ-300-1А, угол укладки $\varphi=0$ градусов), сходящиеся (примерно) в одну точку при $\zeta=1$

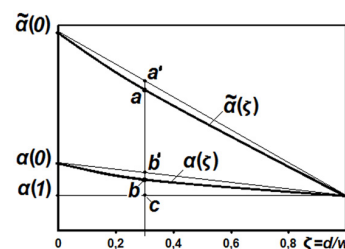


Рис. 7. Схема прогнозирования $\tilde{\alpha}(\zeta)$

Второе предположение: графики $\tilde{\alpha}(\zeta)$ и $\alpha(\zeta)$ сходятся в одну точку при $\zeta = d/w = 1$ (см. рис.6). Т.е. в гипотетическом (предельном) случае, когда отверстие практически полностью перекрывает всю ширину пластины, уже не имеет значения, является материал изотропным или ортотропным. Действительно, при ничтожно малом размере "живого" сечения и сохранении неизменной величины $\sigma_{ном}$ различия в значениях коэффициентов концентрации напряжений должны нивелироваться. Тогда можно построить схему, изображенную на рисунке 7.

Третье предположение: примерное равенство расстояний $ab \approx a'b'$ (см. рис.7 и рис.6). Из подобия треугольников имеем пропорции $a'b' / b'c = [\tilde{\alpha}(0) - \alpha(0)] / [\alpha(0) - \alpha(1)]$ и $b'c / [\alpha(0) - \alpha(1)] = (1 - \zeta) / 1$. Используя третье предположение, из пропорций получим, что

$$\tilde{\alpha}(\zeta) = \alpha(\zeta) + ab = \alpha(\zeta) + (1 - \zeta) \cdot [\tilde{\alpha}(0) - \alpha(0)]. \quad (9)$$

Сведя воедино формулы (8) и (9), окончательно имеем формулу прогнозирования $\underline{\tilde{\alpha}}(\xi)$:

$$\underline{\tilde{\alpha}}(\zeta) \approx \{\alpha(\zeta) + (1 - \zeta) \cdot [\tilde{\alpha}(0) - \alpha(0)]\} \cdot [\underline{\alpha}(\zeta) / \alpha(\zeta)], \quad (10-a)$$

или, после несложных преобразований:

$$\underline{\tilde{\alpha}}(\zeta) \approx \underline{\alpha}(\zeta) \cdot \{1 + (1 - \zeta) \cdot [\tilde{\alpha}(0) - \alpha(0)] / \alpha(\zeta)\}. \quad (10-b)$$

Провели верификацию значений функции $\tilde{\alpha}(\zeta)$, полученных с применением МКЭ и формулы (10). Результаты, в том числе величины погрешностей δ (по отношению к результатам, полученным по МКЭ, в процентах), поместили в таблицу 2.

Если учесть наличие погрешностей, заложенных в предположениях, наличие претензий к аппроксимации (5), а также наличие весьма существенных различий рассматриваемых коэффициентов для разных направлений укладки ортотропных полос материала, то результаты прогнозирования можно считать хорошими, конкурирующими по точности с результатами статьи [15], т.е. соответствующими формуле (7).

Естественно, что формула (10), прежде чем быть использованной в широкой расчетной практике инженерных расчетов, требует обширной систематической проверки для различных 2D-ортотропных материалов. Очевидно, что она не может давать удовлетворительные результаты при весьма малых значениях $\zeta = d/w$, а также при ζ , близких к единице.

Примечание. В статье [1] авторами предлагалось ввести функцию ω_i как функцию, учитывающую различие напряженного состояния нагруженного i -го отверстия от ненагруженного, а также ортотропию, наличие изгиба и других факторов, поскольку на момент написания статьи [1] публикация [5] с аппроксимацией (5), а также статьи с контактными решениями для ортотропного материала, из которых можно было оценить ККНк, авторам не были известны. Теперь же формула (12) из [1] должна измениться на

$$\underline{\alpha}_i(\zeta) = \eta_i \cdot \tilde{\alpha}_i(\zeta) \cdot \omega_i, \quad (11)$$

где функция ω_i уже не должна учитывать степень ортотропии материала монослоя пластины.

Итак, предлагается следующая экспресс-методика прогнозирования ККНк $\tilde{\alpha}(\zeta)$ для актуального соотношения $d/w = \zeta$, в диапазоне $0.15 \leq \zeta \leq 0.5$:

- а) применить формулу (5), а именно $\underline{\alpha}(\zeta) \approx 12.882 - 52.714\zeta + 89.762\zeta^2 - 51.667\zeta^3$;
- б) применить формулы (2), а именно $k = \sqrt{E_{XX}/E_{YY}}$; $m = E_{XX}/G_{XY} - 2\mu_{XY}$; $\tilde{\alpha}(0) = 1 + \sqrt{2k+m}$;
- в) применить формулу (4), а именно $\alpha(\zeta) \approx 3.000 - 3.140\zeta + 3.667\zeta^2 - 1.527\zeta^3$. Из нее же $\alpha(0) = 3$;
- г) применить формулу (10), а именно $\tilde{\alpha}(\zeta) \approx \underline{\alpha}(\zeta) \cdot \{1 + (1-\zeta) \cdot [\tilde{\alpha}(0) - \alpha(0)] / \alpha(\zeta)\}$.

Выводы

Проведенный анализ и численное моделирование позволили сделать такие выводы:

1. для важного в практическом применении случая определения коэффициента концентрации напряжений (ККНк) у контактирующего с болтом отверстия ортотропной пластины, проблема не решена достаточно точно и в виде простых формул;
2. рассмотренные известные решения De Jong, Echavarría (и др.), используемые и в настоящее время, не являются достаточно точными при предельном переходе до (квази)изотропного материала;
3. предложенная простая формула (10) прогнозирования коэффициента концентрации напряжений в ослабленном сечении ортотропной пластины у отверстия, нагруженного болтом, дает, в сравнении с результатами конечно-элементного моделирования, хорошее приближение в практически важном диапазоне изменения соотношения $d/w = \zeta$. Получение более точных значений ККНк $\tilde{\alpha}(\zeta)$ требует применения метода конечных элементов или построения уточненной теории.

Коефіцієнт концентрації напружень у контактуючого з болтом навантаженого отвору в моношарі ортотропного композиційного матеріалу

К.М. Рудаков, Ю.М. Дифучин, С.А. Бабієнко

Анотація. Розглянуто проблему визначення коефіцієнта концентрації напружень у контактуючому з болтом отвору (ККНк) в ослабленому перетині пластины з моношару ортотропного композиційного матеріалу. Сформульовано кілька припущень про характер зміни ККНк залежно від відношення діаметра отвору до ширини пластины, а також від наявності ортотропії в матеріалі пластины. Це дозволило запропонувати формулу, що дозволяє прогнозувати зазначений коефіцієнт без проведення складних розрахунків контактних задач, використовуючи відомі апроксимації для ізотропного матеріалу й розв'язку Лехницького-Солдатова для розтягнутої ортотропної нескінченної пластины з вільним отвором. З використанням результатів чисельних розрахунків методом скінченних елементів контактних крайових задач проведена верифікація запропонованої формули, показана її достатня точність у практично застосовуваному діапазоні відносини діаметра отвору до ширини пластины.

Ключові слова: коефіцієнт концентрації напружень; 2D-ортотропія; скінченно-елементні розв'язки.

Stress concentration factor near loaded hole contacting with the bolt in the monolayer of orthotropic composite material

Konstantin Rudakov, Yury Dyfuchyn, Sergey Babienko

Abstract. Purpose. To suggest a method to predict the stress concentration factor near loaded hole contacting with the bolt in the monolayer of orthotropic composite material to be independent of difficult calculations. And to verify the factor with use results of numerical calculations using the finite element method in contact formulation.

Methodology. The analysis of known outcomes in the literature is carried out. Several assumptions have been formulated about the changes of stress concentration factor depending on the ratio of the hole diameter to the plate width, as well as on orthotropy in the plate material. Assumptions are confirmed by calculated results, graphs. The finite element method was used.

Results. A formula is proposed that predicts the stress concentration factor without carrying out difficult calculations of contact problems using known approximations for an isotropic material and the Lekhnitsky-Soldatov solution for a stretched orthotropic infinite plate with an empty hole. Using the results of numerical calculations of contact boundary problems with the finite element method the proposed formula was verified, its good accuracy was shown in the practically applicable range of the ratio of the hole diameter to the plate width.

Originality. A four-step method is developed - simple formulas that allow rapid prediction of the stress concentration factor near loaded hole contacting with the bolt in a monolayer of orthotropic composite material using only of the elastic characteristics of the plate material, proven approximations and simple solutions.

Keywords: Stress concentration factor; 2D-orthotropy; FEA solutions.

References

1. Рудаков К.Н. О расчетах болтового соединения на разрывное разрушение ослабленного отверстием сечения композитной пластины / К.Н. Рудаков, Ю.Н. Дифучин // *Mechanics and Advanced Technologies*. – 2018, №1(82). – С. 58-66. <http://dx.doi.org/10.20535/2521-1943.2018.82.121050>
2. Savin, G.N. (1961), *Stress Concentration Around Holes*. Translated from the Russian text (1959), Pergamon Press.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий // Изд. 2-е. М.: Главная редакция физ-мат. лит-ры изд-ва "Наука", 1977. – 416 с.
4. Дифучин Ю.М. Чисельне моделювання болтових з'єднань з ПКМ. Повідомлення 1. Створення змішаних 3D-моделей / Ю.М. Дифучин, К.М. Рудаков // *Вісник НТУУ "КПІ". Серія машинобудування*, 2016. №2(77). – С. 100-107. <http://dx.doi.org/10.20535/2305-9001.2016.77.76975>
5. Pilkey, W.D. and Pilkey, D.F. (2008), *Peterson's Stress Concentration Factors*. Third Edition. John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey, Canada.
6. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1949. – 270 с.
7. Persson, A. (1964), "On the stress distribution of cylindrical elastic bodies in contact. Ph.D. dissertation". Chalmers Tekniska Hogskola. Goteborg, Sweden.
8. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 510 с.
9. Ciavarella, M. and Decuzzi P. (2001), "The state of stress induced by the plane frictionless cylindrical contact. I. The case of elastic similarity". *International journal of solids and structures*. vol. 38. pp. 4507–4520. "The state of stress induced by the plane frictionless cylindrical contact. II. The general case (elastic dissimilarity)". *International Journal of Solids and Structures*. vol. 38. pp. 4525–4558.
10. Young, W.C. and Buynas, R.G. (2002), *Roark's Formulas for Stress and Strain. Seventh Edition*. McGraw-Hill. 852 p.
11. Прочность, устойчивость, колебания: справ. в трех томах. Том 2. // Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 463 с.
12. Theocaris, P.S. (1957), "Stress Concentration Produced in Perforated Strips Under Tension", *Proceedings of the SESA*, vol. XIV, no. 2.
13. Grover, H.J. (1966), *NAVAIR 01-1A-13. Fatigue of Aircraft Structures*. NAVAL Air Systems Command Department of the NAVY.
14. De Jong, T. (1977), *Stresses around pin-loaded holes in elastically orthotropic or isotropic plates*. *J. Compos. Mater.* vol.11. pp. 313–331.
15. Echavarrri 'a, C., Haller, P. and Salenikovich, A. (2007), *Analytical study of a pin-loaded hole in elastic orthotropic plates*. *Composite Structures*. vol.79. pp. 107–112. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.11.038>
16. Waszczak, J.P. and Cruse, T.A. (1971), *Failure mode and strength predictions of anisotropic bolt bearing specimens*. *J. Compos. Mater.* vol. 5. pp. 421–425.
17. Zhang, K. and Ueng, C. (1985), *Stresses around a pin-loaded hole in orthotropic plates with arbitrary loading direction*. *Compos. Struct.* Vol. 3. pp. 119–143.
18. Crews, John H., Hong, Jr.C.S. and Raju, I.S. (1981), *Stress-Concentration Factors for Finite Orthotropic Laminates With a Pin-Loaded Hole*. NASA Technical Paper 1862.