

Дослідження другої основної задачі теорії пружності для шару з декількома циліндричними порожнинами

В. Ю. Мірошніков

Харківський національний університет будівництва та архітектури, м. Харків, Україна

Received: 24 April 2019 / Accepted: 09 September 2019

Проблематика. При проектуванні просторових конструкцій, деталей і механізмів, підземних споруд і комунікацій, необхідно мати уявлення про напружений стан такої конструкції.

Мета дослідження. Необхідно, з високою точністю, знайти переміщення і напруження в тілі шару, що має повздовжні циліндричні порожнини, а також проаналізувати його напружено-деформований стан. На межах шару та на межах порожнин задані переміщення.

Методика реалізації. Для досягнення задекларованої мети розроблено аналітико-числовий метод для шару з круговими нескінченими циліндричними порожнинами, паралельними між собою та поверхнями шару. Розв'язок просторової задачі теорії пружності отримано узагальненим методом Фур'є стосовно системи рівнянь Ламе в циліндричних координатах, пов'язаних із циліндрами, та декартових координатах, пов'язаних із межами шару. Застосовані особливі формули для переходу між системами координат для базових розв'язків. Нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які отримані в результаті задоволення граничних умов, розв'язано методом зрізання. Числове дослідження визначника дає підстави стверджувати, що ця система рівнянь має єдиний розв'язок. В результаті були отримані переміщення та напруження в різних точках пружного тіла шару. Параметри зрізання були обрані таким чином, що точність виконання граничних умов досягла 10^{-4} .

Результати дослідження. Проведено аналіз напружено – деформованого стану тіла шару при різному геометричному розташуванні в ньому двох циліндричних порожнин. З'ясувалося, що, при рівному віддаленні порожнини і межі шару від поверхні розглянутого циліндра, більший вплив на напружений стан тіла має межа шару.

Висновки. Зі збільшення параметра зрізання, точність виконання граничних умов збільшується, але також збільшується тривалість обчислення.

Приведений аналіз можна використовувати для попереднього вибору розрахункової моделі, а запропонований метод для розрахунку з високою точністю обраної розрахункової схеми.

Ключові слова: циліндричні порожнини в шарі, рівняння Ламе, узагальнений метод Фур'є.

Вступ

Проблема розрахунку просторових задач теорії пружності для шару з концентраторами напружень у вигляді циліндричних порожнин існує давно. Так в роботах [1–3], на основі методу розкладення в ряди Фур'є, розглядаються стаціонарні задачі дифракції хвиль та визначення напружень для шару з повздовжньою циліндричною порожниною або включенням. Порожнистий циліндр та шар з круговим отвором, які розв'язуються за допомогою методу суперпозиції, розглянуто в [4].

В роботі [5], з використанням методу зображень, побудовані чисельно-аналітичні розрахунки дифракційного розсіяння симетричних нормальних хвиль поздовжнього зсуву для шару з циліндричною порожниною у двовимірній постановці.

Задачі для шару, з перпендикулярними до його поверхонь порожнинами, розглянуті в [6–8].

Роботи [9, 10] присвячені визначенню напруженого стану кінцевого циліндра та основані на методі суперпозиції розв'язків і розкладанні у ряди Фур'є і Діні.

Але задачі для пружних тіл з декількома граничними поверхнями не можуть бути розв'язані в рамках класичного підходу. Для таких задач необхідно було створювати узагальнений метод Фур'є [11], який і був покладений в основу підходу до розв'язку представленої задачі.

На основі узагальненого методу Фур'є розв'язані задачі для шару зі сферичною порожниною, який розтягується радіальними зусиллями на нескінченності [12], також розв'язані задачі для півпростору з циліндричною порожниною або включенням [13–15], та для циліндру з циліндричними включеннями в [16].

Для півпростору з декількома паралельними круговими циліндричними порожнинами розглянуто першу основну задачу теорії пружності на конференції [17] та третю основну задачу теорії пружності на конференції [18].

На конференції [19] розглянуто другу основну задачу теорії пружності для двохшарового композиту з однією циліндричною порожниною.

Для шару з декількома циліндричними порожнинами готових методів розрахунку в просторовому варіанті немає, тож проблема розв'язання таких задач є актуальною.

Постановка задачі

В пружному однорідному шарі розташовано N кругових циліндричних порожнин радіусом R_p , непересічних між собою і межами шару, де p – номер циліндра, $p = 1, 2, \dots, N$. Порожнини будемо розглядати у локальних циліндричних системах координат (ρ_p, φ_p, z) , межі шару у декартовій системі координат (x, y, z) , яка однаково орієнтована та поєднана з системою координат циліндра з номером q (рис.1). Верхня межа шару розташована на відстані $y = h$, нижня межа на відстані $y = -\tilde{h}$. Потрібно знайти розв'язок рівняння Ламе за умов, що на межах шару та на межах циліндричних порожнин задані переміщення: $\bar{U}(x, z)|_{y=h} = \bar{U}_h^0(x, z)$,

$$\bar{U}(x, z)|_{y=-\tilde{h}} = \bar{U}_{\tilde{h}}^0(x, z), \quad \bar{U}(\varphi, z)|_{\rho=R_p} = \bar{U}_p^0(\varphi, z),$$

де

$$\begin{aligned} \bar{U}_h^0(x, z) &= U_x^{(h)} \bar{e}_1^{(1)} + U_y^{(h)} \bar{e}_2^{(1)} + U_z^{(h)} \bar{e}_3^{(1)}, \\ \bar{U}_{\tilde{h}}^0(x, z) &= U_x^{(\tilde{h})} \bar{e}_1^{(1)} + U_y^{(\tilde{h})} \bar{e}_2^{(1)} + U_z^{(\tilde{h})} \bar{e}_3^{(1)}, \\ \bar{U}_p^0(\varphi, z) &= U_\rho^{(p)} \bar{e}_1^{(2)} + U_\varphi^{(p)} \bar{e}_2^{(2)} + U_z^{(p)} \bar{e}_3^{(2)} \end{aligned} \quad (1)$$

відомі функції; $\bar{e}_j^{(k)}$, ($j = 1, 2, 3$) – орти декартової ($k = 1$) і циліндричної ($k = 2$) систем координат.

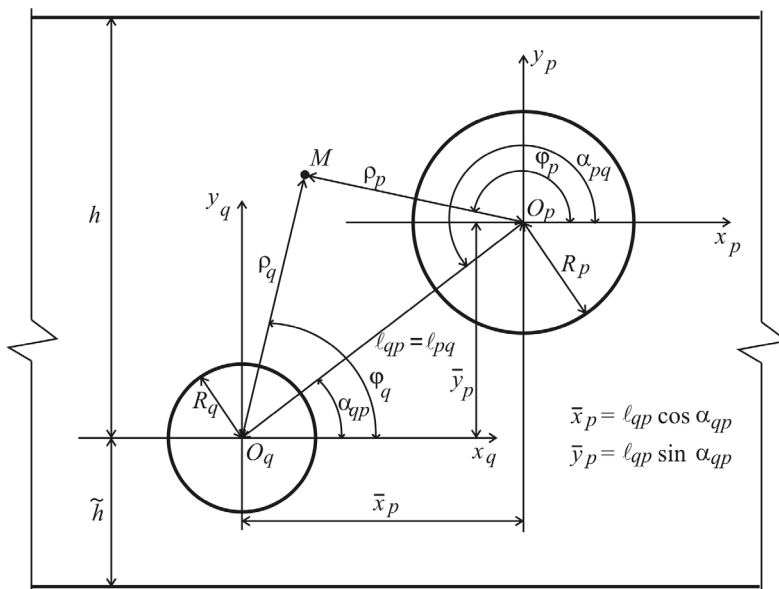


Рис. 1. Шар з циліндричними порожнинами

Усі задані вектори і функції будемо вважати швидко спадаючими до нуля на далеких відстанях від початку координат по координаті z для циліндра та по координатах x і z для меж шару.

Розв'язок задачі

Виберемо базисні розв'язки рівняння Ламе для зазначених систем координат у вигляді [11]:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_k^\pm(x, y, z; \lambda, \mu) &= N_k^{(d)} e^{i(\lambda z + \mu x) \pm \gamma y}; \\
 \bar{R}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) &= N_k^{(p)} I_m(\lambda \rho_p) e^{i(\lambda z + m \varphi_p)}; \\
 \bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) &= N_k^{(p)} \left[(\text{sign } \lambda)^m K_m(|\lambda| \rho_p) \cdot e^{i(\lambda z + m \varphi_p)} \right]; k=1, 2, 3; \\
 N_1^{(d)} &= \frac{1}{\lambda} \nabla; \quad N_2^{(d)} = \frac{4}{\lambda} (\sigma - 1) \bar{e}_2^{(1)} + \frac{1}{\lambda} \nabla(y \cdot); \quad N_3^{(d)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\bar{e}_3^{(1)} \cdot); \quad N_1^{(p)} = \frac{1}{\lambda} \nabla; \\
 N_2^{(p)} &= \frac{1}{\lambda} \left[\nabla \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + 4(\sigma - 1) \left(\nabla - \bar{e}_3^{(2)} \frac{\partial}{\partial z} \right) \right]; \quad N_3^{(p)} = \frac{i}{\lambda} \text{rot}(\bar{e}_3^{(2)} \cdot); \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}, \quad -\infty < \lambda, \mu < \infty,
 \end{aligned} \tag{2}$$

де σ – коефіцієнт Пуассона; $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя; $\bar{R}_{k,m}$, $\bar{S}_{k,m}$, $k=1, 2, 3$ – відповідно внутрішні та зовнішні розв’язки рівняння Ламе для циліндра; $\bar{u}_k^{(-)}$, $\bar{u}_k^{(+)}$ – розв’язки рівняння Ламе для шару.

Розв’язок задачі представимо у вигляді

$$\begin{aligned}
 \bar{U} &= \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(H_k(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu) + \tilde{H}_k(\lambda, \mu) \cdot \bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu) \right) d\mu d\lambda + \\
 &+ \sum_{p=1}^N \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{k,m}^{(p)}(\lambda) \cdot \bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) d\lambda,
 \end{aligned} \tag{3}$$

де $\bar{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda)$, $\bar{u}_k^{(+)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ і $\bar{u}_k^{(-)}(x, y, z; \lambda, \mu)$ базисні розв’язки, які задані формулами (2) і (3), а невідомі функції $H_k(\lambda, \mu)$, $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ і $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ необхідно знайти із крайових умов.

Для переходу між системами координат (рис.1) скористаємось формулами:

– для переходу від розв’язків $\bar{S}_{k,m}$ циліндричної системи координат до розв’язків шару $\bar{u}_k^{(-)}$ (при $y > 0$) та $\bar{u}_k^{(+)}$ (при $y < 0$)

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_{k,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot e^{-i\mu \bar{x}_p \pm \gamma \bar{y}_p} \cdot \bar{u}_k^{(\mp)} \cdot \frac{d\mu}{\gamma}, \quad k=1, 3; \\
 \bar{S}_{2,m}(\rho, \varphi, z; \lambda) &= \frac{(-i)^m}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega_{\mp}^m \cdot \left(\left(\pm m \cdot \mu - \frac{\lambda^2}{\gamma} \pm \lambda^2 \bar{y}_p \right) \bar{u}_1^{(\mp)} \mp \lambda^2 \bar{u}_2^{(\mp)} \pm 4\mu(1-\sigma) \bar{u}_3^{(\mp)} \right) \frac{e^{-i\mu \bar{x}_p \pm \gamma \bar{y}_p} d\mu}{\gamma^2},
 \end{aligned} \tag{4}$$

де $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, $\omega_{\mp}(\lambda, \mu) = \frac{\mu \mp \gamma}{\lambda}$, $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

– для переходу від розв’язків $\bar{u}_k^{(+)}$ та $\bar{u}_k^{(-)}$ шару до розв’язків $\bar{R}_{k,m}$ циліндричної системи координат

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_k^{(\pm)}(x, y, z) &= e^{i\mu \bar{x}_p \pm \gamma \bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} (i \cdot \omega_{\mp})^m \bar{R}_{k,m}, \quad (k=1, 3); \\
 \bar{u}_2^{(\pm)}(x, y, z) &= e^{i\mu \bar{x}_p \pm \gamma \bar{y}_p} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[(i \cdot \omega_{\mp})^m \cdot \lambda^{-2} \left((m \cdot \mu + \bar{y}_p \cdot \lambda^2) \cdot \bar{R}_{1,m} \pm \gamma \cdot \bar{R}_{2,m} + 4\mu(1-\sigma) \bar{R}_{3,m} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{5}$$

де $\bar{R}_{k,m} = \bar{b}_{k,m}(\rho, \lambda) \cdot e^{i(m\varphi + \lambda z)}$; $\bar{b}_{1,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_\rho \cdot I'_n(\lambda \rho) + i \cdot I_n(\lambda \rho) \cdot \left(\bar{e}_\varphi \frac{n}{\lambda \rho} + \bar{e}_z \right)$;

$\bar{b}_{2,n}(\rho, \lambda) = \bar{e}_\rho \cdot \left[(4\sigma - 3) \cdot I'_n(\lambda \rho) + \lambda \rho I''_n(\lambda \rho) \right] + \bar{e}_\varphi i \cdot m \left(I'_n(\lambda \rho) + \frac{4(\sigma - 1)}{\lambda \rho} I_n(\lambda \rho) \right) + \bar{e}_z i \lambda \rho I'_n(\lambda \rho)$;

$\bar{b}_{3,n}(\rho, \lambda) = - \left[\bar{e}_\rho \cdot I_n(\lambda \rho) \frac{n}{\lambda \rho} + \bar{e}_\varphi \cdot i \cdot I'_n(\lambda \rho) \right]$; \bar{e}_ρ , \bar{e}_φ , \bar{e}_z – орти в циліндричній системі координат;

– для переходу від розв’язків циліндра з номером p до розв’язків циліндра з номером q

$$\vec{S}_{k,m}(\rho_p, \varphi_p, z; \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \vec{b}_{k,pq}^{mn}(\rho_q) \cdot e^{i(n\varphi_q + \lambda z)}, k=1, 2, 3; \quad (6)$$

$$\vec{b}_{1,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \vec{b}_{1,n}(\rho_q, \lambda); \quad \vec{b}_{3,pq}^{mn}(\rho_q) = (-1)^n \tilde{K}_{m-n}(\lambda \ell_{pq}) \cdot e^{i(m-n)\alpha_{pq}} \cdot \vec{b}_{3,n}(\rho_q, \lambda);$$

де α_{pq} – кут між віссю x_p та відрізком ℓ_{pq} , $\tilde{K}_m(x) = (\text{sign}(x))^m \cdot K_m(|x|)$.

Для виконання граничних умов на межах шару $y = h$ та $y = -\tilde{h}$, вектори $\vec{S}_{k,m}$ в (3), за допомогою формул переходу (4), перепишемо у декартовій системі координат через базисні розв'язки відповідно $\vec{u}_k^{(-)}$ та $\vec{u}_k^{(+)}$. Отримані вектори (при $y = h$, та $y = -\tilde{h}$) прирівняємо заданим $\vec{U}_h^0(x, z)$ та $\vec{U}_{\tilde{h}}^0(x, z)$, які заздалегідь представимо через подвійні інтеграли Фур'є.

Отримана система з 6 рівнянь має визначник

$$\frac{4 \cdot e^{-x} \cdot \gamma^2 \cdot (e^{2x} - 1)(x^2 - \bar{\sigma}^2 \cdot \text{sh}^2 x)}{\lambda^4},$$

де $x = \gamma(h + \tilde{h})$, $\bar{\sigma} = 3 - 4\sigma$.

З цих рівнянь знайдемо функції $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Для виконання граничних умов на кожному циліндрі p , праву частину (3), за допомогою формул переходу (5) та (6), перепишемо у локальній циліндричній системі координат цього циліндра через базисні розв'язки $\vec{R}_{k,m}$, $\vec{S}_{k,m}$. Отриманий вектор, при $\rho_p = R_p$, прирівняємо заданому $\vec{U}_p^0(x, z)$, який також подамо інтегралом та рядом Фур'є.

Визначник системи для кожного циліндра p має вигляд [20]:

$$\text{для } m = 0 \quad |\Delta_0| = 8(1 - \sigma) \cdot \beta^2 \cdot K_1^2(\beta) \cdot K_2(\beta),$$

$$\text{для } m \geq 1 \quad |\Delta_m| > 4m \cdot K_{m-1}(\beta) K_m(x) K_{m+1}(\beta), \quad \beta = |\lambda| \rho, \quad \lambda \neq 0.$$

Використовуючи цей визначник, для отриманих систем доведено, що вони є системами з цілком безперервної формою [1]. Альтернатива Гільберта і однозначна розв'язність задачі теорії пружності дозволяє зробити висновок, що ця система теж має розв'язність.

З отриманої системи рівнянь виключимо знайдені раніше функції $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$ через $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Звільнившись від рядів по m та інтегралів по λ отримаємо сукупність $3N$ нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$.

Знайдені з нескінченної системи рівнянь функції $B_{k,m}^{(p)}(\lambda)$ підставимо у вирази для $H_k(\lambda, \mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda, \mu)$.

Цим будуть визначені всі невідомі задачі.

Числові дослідження напруженого стану

Шар з двома круговими циліндричними порожнинами (рис. 1). Шар – ізотропний матеріал, коефіцієнт Пуассона $\sigma = 0,38$, модуль пружності $E = 1700 \text{ Н/мм}^2$. Радіус порожнин $R_q = R_p = 10 \text{ мм}$, відстань між порожнинами $\ell_{qp} = 30 \text{ мм}$, кут розташування порожнини p відносно порожнини q розглядався в двох варіантах: $\alpha_{qp} = 0$ та $\alpha_{qp} = 3\pi/2$. Товщина шару $h + \tilde{h} = 70 \text{ мм}$. Відстань від центру порожнини q до верхньої межі шару $h = 20 \text{ мм}$.

На поверхні порожнини q задані переміщення $U_p^{(q)}(\varphi, z) = 10^4 \cdot (z^2 + 10^2)^{-2}$, $U_\varphi^{(q)} = U_z^{(q)} = 0$, на іншій порожнині та на межах шару $U_p^{(p)} = U_\varphi^{(p)} = U_z^{(p)} = U_x^{(h)} = U_y^{(h)} = U_z^{(h)} = U_x^{(\tilde{h})} = U_y^{(\tilde{h})} = U_z^{(\tilde{h})} = 0$.

Розв'язувалась кінцева система рівнянь порядку $m = 10$. Обчислення інтегралів виконано за допомогою квадратурних формул Філона (для коливних функцій) та Сімпсона (для функцій без коливань). Точність виконання граничних умов при вказаних значеннях геометричних параметрів 10^{-4} .

На верхній межі шару, при $z = 0$, $\alpha_{qp} = 0$ максимальне напруження $\sigma_p = -123,67 \text{ Н/мм}^2$, $\sigma_\varphi \approx \sigma_z = -75,79 \text{ Н/мм}^2$; при $\alpha_{qp} = 3\pi/2$ напруження $\sigma_p = -120,23 \text{ Н/мм}^2$, $\sigma_\varphi \approx \sigma_z = -73,69 \text{ Н/мм}^2$. Тобто при вертикальному розташуванні порожнин напруження на верхній межі шару незначно знижуються.

На нижню межу шару таке вертикальне розміщення порожнин впливає значно більше. На рис. 2. представлені напруження σ_p та σ_z на нижній межі шару вздовж осі z , порівнюючи вертикальне та горизонтальне розташування порожнин (в Н/мм^2).

Напруження σ_p та σ_z на нижній межі шару (рис. 2) при вертикальному розташуванні порожнин (лінія 2) мають більші значення ніж при горизонтальному розміщенні (лінія 1), але при горизонтальному розміщенні є ділянки, де напруження σ_p та σ_z мають додатні величини.

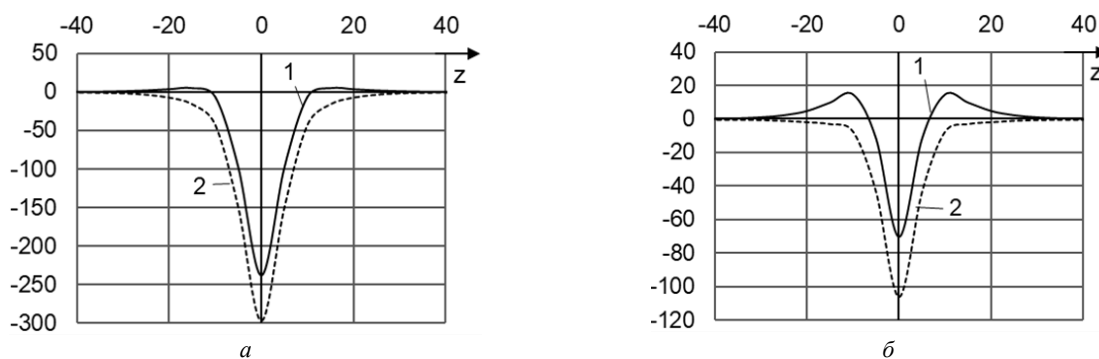


Рис. 2. Напружений стан на нижній межі шару: а – σ_p ; б – σ_z ; 1 – при $\alpha_{qp} = 0$; 2 – при $\alpha_{qp} = 3\pi/2$

На рис.3. представлені напруження σ_φ та τ_{pz} на нижній межі шару вздовж осі z , з порівнянням вертикального та горизонтального розташування порожнин (в Н/мм^2).

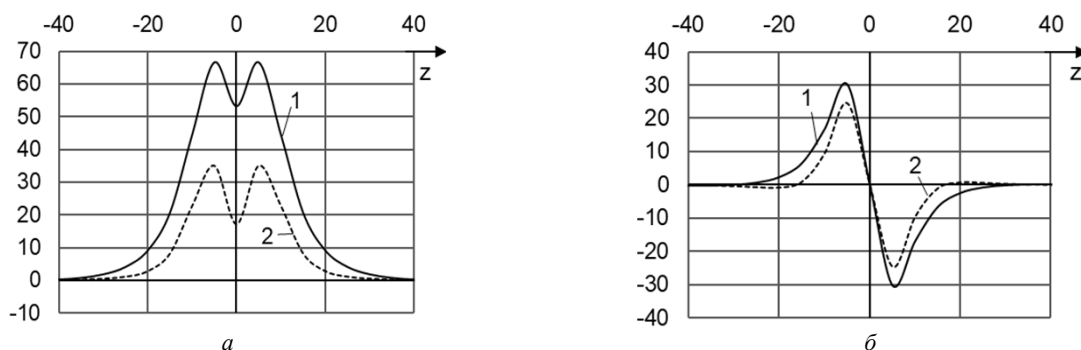


Рис. 3. Напружений стан на нижній межі шару: а – σ_φ ; б – τ_{pz} ; 1 – при $\alpha_{qp} = 0$; 2 – при $\alpha_{qp} = 3\pi/2$

Напруження σ_φ та τ_{pz} на нижній межі шару (рис. 3), на відміну від напружень σ_p та σ_z , мають більші значення при горизонтальному розташуванні порожнин (лінія 1).

На рис. 4 представлені напруження σ_p та σ_φ в координатах порожнини q на різних відстанях від її поверхні, при горизонтальному розташуванні порожнин та $z = 0$, (в Н/мм^2).

Напруження σ_p (рис.4а) мають максимальні значення на поверхні порожнини q (лінія 1) з екстремальними значеннями навпроти верхньої межі шару ($\varphi_q = \pi/2$) та навпроти іншої порожнини ($\varphi_q = 0$). По мірі віддалення від порожнини q напруження σ_p поступово зменшуються.

Напруження σ_φ (рис. 4 б) на поверхні порожнини q мають додатні значення, та по мірі віддалення від порожнини q значення напружень σ_φ переходять у від'ємні та, при наближенні до порожнини p або поверхні шару, поступово збільшуються.

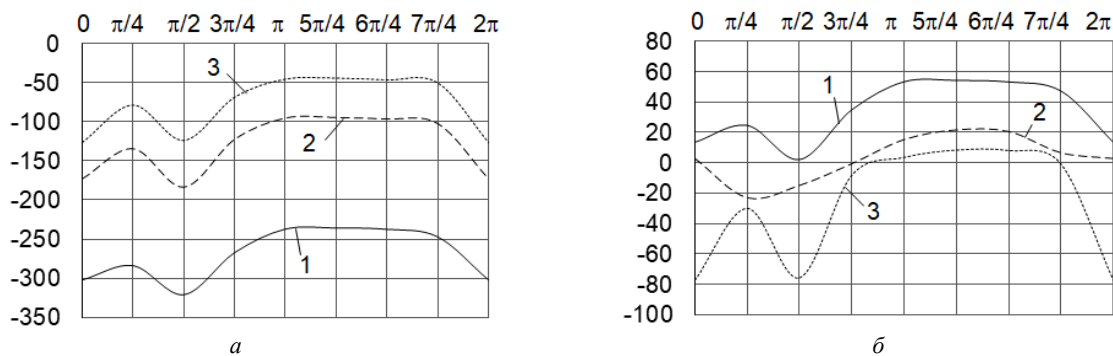


Рис. 4. Напружений стан в координатах порожнини q при $\alpha_{qp} = 0, z = 0$: $a - \sigma_\rho$; $b - \sigma_\phi$;
 1 – при $\rho_q = R_q$; 2 – при $\rho_q = 15$ мм.; 3 – при $\rho_q = 20$ мм

На рис. 5 представлені напруження σ_z та $\tau_{r\phi}$ в координатах порожнини q на різних відстанях від її поверхні, при $z = 0$ та горизонтальному розташуванні порожнин, (в Н/мм²).

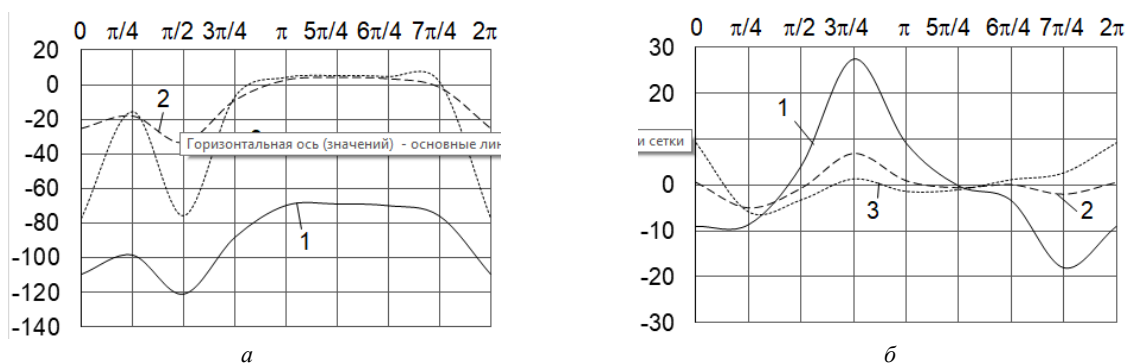


Рис. 5. Напружений стан в координатах порожнини q при $\alpha_{qp} = 0, z = 0$: $a - \sigma_z$; $b - \tau_{r\phi}$;
 1 – при $\rho_q = R_q$; 2 – при $\rho_q = 15$ мм.; 3 – при $\rho_q = 20$ мм

Максимальні напруження σ_z (рис.5а) знаходяться на поверхні порожнини q (лінія 1) з екстремальними значеннями навпроти верхньої межі шару ($\phi_q = \pi/2$) та навпроти іншої порожнини ($\phi_q = 0$). По мірі віддалення від порожнини q напруження σ_z зменшуються (лінія 2), але на поверхні порожнини p (лінія 3, при $\phi_q = 0$) та верхній межі шару (лінія 3, при $\phi_q = \pi/2$) напруження σ_z зростають.

Дотичні напруження $\tau_{r\phi}$ (рис.5б) мають максимальні значення на поверхні порожнини та при віддаленні від порожнини напруження зменшуються. На поверхні порожнини p (при $\phi_q = 0$) напруження $\tau_{r\phi}$ мають протилежні за знаком значення.

На рис.6 представлені напруження σ_ρ та σ_ϕ в координатах порожнини q на різних відстанях від її поверхні, при вертикальному розташуванні порожнин та $z = 0$, (в Н / мм²).

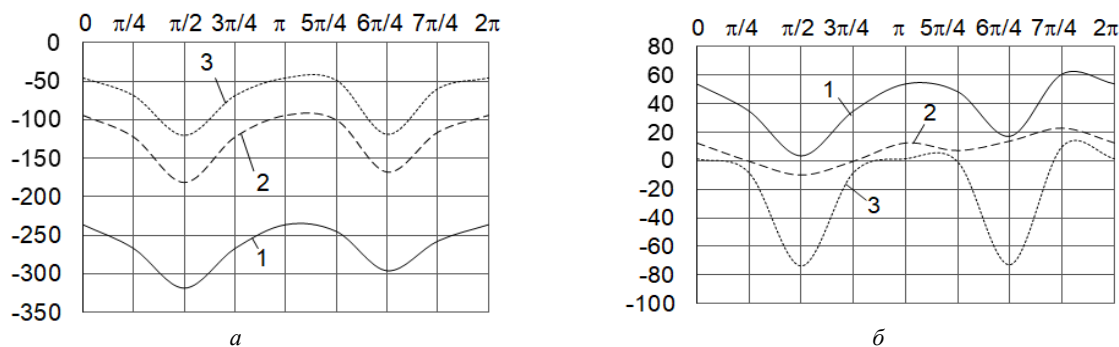


Рис. 6. Напружений стан в координатах порожнини q при $\alpha_{qp} = 3\pi/2, z = 0$: $a - \sigma_\rho$; $b - \sigma_\phi$;
 1 – при $\rho_q = R_q$; 2 – при $\rho_q = 15$ мм.; 3 – при $\rho_q = 20$ мм

Напруження σ_p (рис.6а) мають максимальні значення на поверхні порожнини q (лінія 1) з екстремальними значеннями навпроти верхньої межі шару ($\varphi_q = \pi/2$) та навпроти іншої порожнини ($\varphi_q = 6\pi/4$). По мірі віддалення від порожнини q напруження σ_p поступово зменшуються.

Напруження σ_φ (рис.6б) на поверхні порожнини q мають додатні значення. По мірі віддалення від порожнини q значення напружень σ_φ зменшуються. При наближенні до верхньої межі шару ($\varphi_q = \pi/2$) або іншої порожнини ($\varphi_q = 6\pi/4$) напруження σ_φ переходять у від'ємні та поступово збільшуються.

На рис.7 представлені напруження σ_z та $\tau_{r\varphi}$ в координатах порожнини q на різних відстанях від її поверхні, при $z = 0$ та вертикальному розташуванні порожнин, (в Н/мм²).

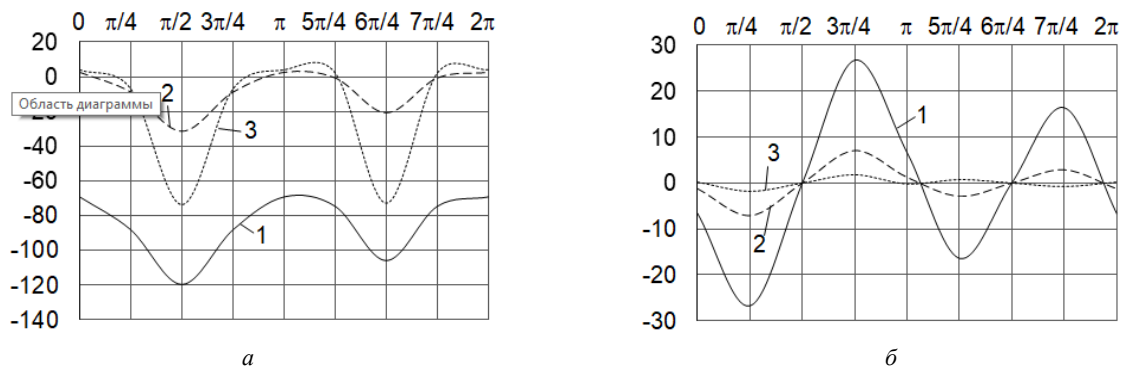


Рис. 7. Напружений стан в координатах порожнини q при $a_{qp} = 3\pi/2, z = 0$: а – σ_z ; б – $\tau_{r\varphi}$; 1 – при $\rho_q = R_q$; 2 – при $\rho_q = 15$ мм.; 3 – при $\rho_q = 20$ мм

Максимальні напруження σ_z (рис.7а) знаходяться на поверхні порожнини q (лінія 1) з екстремальними значеннями навпроти верхньої межі шару ($\varphi_q = \pi/2$) та навпроти іншої порожнини ($\varphi_q = 6\pi/4$). По мірі віддалення від порожнини q напруження σ_z зменшуються (лінія 2), але на поверхні порожнини p (лінія 3, при $\varphi_q = 6\pi/4$) та верхній межі шару (лінія 3, при $\varphi_q = \pi/2$) напруження σ_z зростають.

Дотичні напруження $\tau_{r\varphi}$ мають максимальні значення на поверхні порожнини та при віддаленні від порожнини напруження зменшуються.

На рис.8 представлений порівняльний аналіз для напружень σ_p (рис.8а) та σ_φ (рис.8б) на поверхні порожнини q при горизонтальному розташуванні порожнин (лінія 1), вертикальному розташуванні (лінія 2) та при відсутності порожнини p (лінія 3) в координатах порожнини q , при $z=0$, (в Н/мм²).

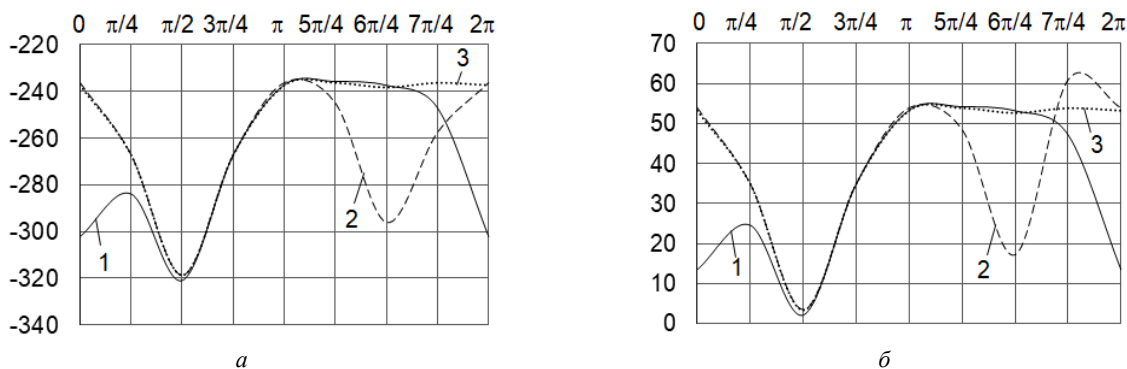


Рис. 8. Напружений стан на поверхні порожнини q : а – σ_p ; б – σ_φ ; 1 – при $a_{qp} = 0$; 2 – при $a_{qp} = 3\pi/2$; 3 – порожнина p відсутня

Максимальні напруження (рис.8), не залежно від розташування порожнини, знаходяться навпроти верхньої межі шару. Якщо циліндрична порожнина p розташована горизонтально (лінія 1) напруження на її поверхні більші ніж коли вона розташована вертикально (лінія 2). При відсутності порожнини p (рис.8, лінія 3) також відсутній стрибок напруження навпроти її ймовірного розташування.

На рис.9 представлений порівняльний аналіз для напружень σ_z (рис.9а) та $\tau_{r\phi}$ (рис.9б) на поверхні порожнини q при горизонтальному розташуванні порожнин (лінія 1), вертикальному розташуванні (лінія 2) та при відсутності порожнини p (лінія 3) в координатах порожнини q , при $z = 0$, (в Н/мм²).

Напруження σ_z на поверхні порожнини q (рис.9а) змінюються за таким саме принципом, що і напруження σ_r (рис.8а), тільки мають інші значення.

Найбільший вплив на дотичні напруження $\tau_{r\phi}$ (рис.9б) має верхня межа шару (значення при $\phi_q = \pi/4$) та $\phi_q = 3\pi/4$). При горизонтальному розташуванні порожнин (лінія 1) спостерігається зменшення максимальних від'ємних напружень $\tau_{r\phi}$ навпроти верхньої межі шару.

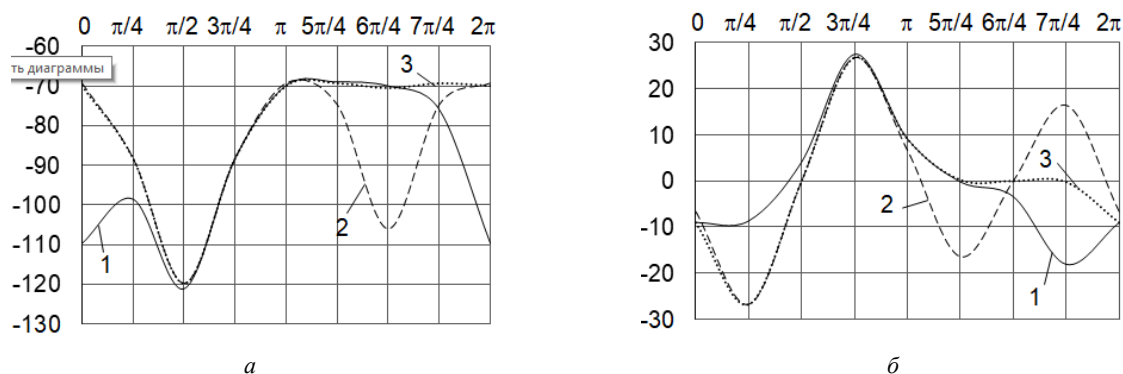


Рис. 9. Напружений стан на поверхні порожнини q : а – σ_z ; б – $\tau_{r\phi}$;
1 – при $\alpha_{qp} = 0$; 2 – при $\alpha_{qp} = 3\pi/2$; 3 – порожнина p відсутня

Висновки

На основі узагальненого методу Фур'є розроблено аналітико-чисельний алгоритм розрахунку другої основної задачі теорії пружності (на усіх граничних поверхнях задані переміщення) для шару з круговими циліндричними порожнинами, граничні поверхні яких не перетинаються. Задача зведена до сукупності нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь, які дозволяють застосування методу редукції.

Числові дослідження цієї системи дають можливість стверджувати, що її розв'язок може бути з будь якою ступінню точності знайдено методом редукції. Це підтверджується високою точністю виконання граничних умов.

Перевагою запропонованого методу над існуючими є точне задоволення граничних умов на нескінчених границях, що дозволяє застосовувати його до суттєво просторових задач, висока точність та стійкість чисельних розрахунків.

Наведені графіки дають картину розподілу напружень на поверхні шару та на поверхні «навантаженої» порожнини. Проаналізовано вплив геометричного розташування порожнин на напружений стан тіла.

З'ясовано, що, при рівному віддаленні порожнини p і верхньої межі шару від порожнини q , більший вплив на напружений стан тіла має межа шару.

Подальший розвиток цього напрямку можливий для задачі з іншими крайовими умовами та задач, в яких порожнини заповнюються пружним тілом з іншого матеріалу.

References

1. Гузь А.Н. Дифракция упругих волн / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко, М.А. Черевко. – Київ: Наук. Думка, 1978. – 307 с.
2. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – Київ: Наук. Думка, 1981. – 284 с.
3. Grinchenko V.T. An exact solution of the problem of stress distribution close to a circular hole in an elastic layer / V.T. Grinchenko, A.F. Ulitko. // Soviet Applied Mechanics. – 1968. – no. 10. – P. 31 – 37.
4. Гринченко В.Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Равновесие упругих тел канонической формы / В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко. – Київ: Наук.думка. – 1985. – 280 с.
5. Волчков В.В. Дифракция волн сдвига на внутренних туннельных цилиндрических неоднородностях в виде полости и включения в упругом слое со свободными гранями / В.В. Волчков, Д.С. Вуколов, В.И. Сторожев // Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 119 – 133.
6. Bobyleva T. Approximate Method of Calculating Stresses in Layered Array / T. Bobyleva // Procedia Engineering. – 2016. – Vol.153. – P.103 – 106. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.087>.
7. Vaysfel'd N. The axisymmetric contact interaction of an infinite elastic plate with an absolutely rigid inclusion / N. Vaysfel'd, G. Popov, V. Reut // Acta Mech. – 2015. – Vol. 226. – P. 797 – 810. <https://doi.org/10.1007/s00707-014-1229-7>.
8. Попов Г.Я. Осесимметричная задача теории упругости для бесконечной плиты с цилиндрическим включением при учете ее удельного веса / Г.Я. Попов, Н.Д. Вайсфельд // Прикладная механика. – 2014. – Том. 50, № 6. – С. 27 – 38.

9. Meleshko V. V. Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings / V.V. Meleshko, Yu.V. Tokovyy // J.Eng. Math. – 2013. – Vol. 78. – P. 143 – 166. <https://doi.org/10.1007/s10665-011-9524-y>.
10. Khoroshun L.P. Mathematical models and method of the mechanics of stochastic composites/ L.P. Khoroshun // International Applied Mechanics. – 2000. – Vol. 36. – no. 10. – P. 1284 – 1316. <https://doi.org/10.1023/a:1009482032355>.
11. Николаев А.Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости / А.Г. Николаев, В.С. Проценко. – Харьков: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. – 344 с.
12. Проценко В.С. Пространственная задача Кирша / В.С. Проценко, А.Г. Николаев // Математические методы анализа динамических систем. – 1982. – Вып. 6. – С. 3 – 11.
13. Николаев А.Г. Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сферической полостью / А.Г. Николаев, Е.М. Орлов // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вып. 20. – С. 253 – 259.
14. Miroshnikov V.Yu. First basic elasticity theory problem in a half-space with several parallel round cylindrical cavities / V.Yu. Miroshnikov // Journal of Mechanical Engineering. – 2018. – Vol. 21, no. 2. – P. 12 – 18.
15. Protsenko V. Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned / V. Protsenko, V. Miroshnikov // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2018. – Vol. 4, no. 7 (94). – P. 43 – 50. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139567>.
16. Николаев А.Г. Распределение напряжений в ячейке однонаправленного композиционного материала, образованного четырьмя цилиндрическими волокнами / А.Г. Николаев, Е.А. Танчик // Вісник Одеського національного університету. Математика. Механіка. – 2013. – Том.18, Вип. 4(20). – С. 101–111.
17. Мірошніков В.Ю. Перша основна задача теорії пружності у півпросторі з декількома паралельними круговими циліндричними порожнинами / В.Ю. Мірошніков // Міжнародна наукова конференція “Сучасні проблеми механіки та математики” Львів, Україна, 25.05.2018, С. 63 – 64.
18. Мірошніков В.Ю. Третя основна задача теорії пружності для півпростору з круговими циліндричними порожнинами / В.Ю. Мірошніков // Матеріали І Міжнародної науково-технічної конференції “Динаміка, міцність та моделювання в машинобудуванні”, Харків, Україна, 14.09.2018, С. 114 – 115.
19. Мірошніков В.Ю. Визначення напруженого стану двошарового композиту з повздовжнім циліндричним отвором / В.Ю. Мірошніков // 74 Науково-технічна конференція ХНУБА, Харків, Україна, 22.03.2019, С.130.
20. Проценко В.С., Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью / В.С. Проценко, Н.А. Украинец // Вісник Запорізького національного університету. – 2015.– Вып. 2. – С. 193 – 202.

Исследование второй основной задачи теории упругости для слоя с несколькими цилиндрическими полостями

В. Ю. Мирошников

Проблематика. При проектировании пространственных конструкций, деталей и механизмов, подземных сооружений и коммуникаций, необходимо иметь представление о напряженном состоянии такой конструкции.

Цель исследования. Необходимо, с высокой точностью, найти перемещения и напряжения в теле слоя, которое имеет продольные цилиндрические полости, а также проанализировать его напряженно-деформированное состояние. На границах слоя и на границах полостей заданы перемещения.

Методика реализации. Для достижения задекларированной цели разработан аналитико-численный метод для слоя с круговыми бесконечными цилиндрическими полостями, параллельными между собой и поверхностями слоя. Решение пространственной задачи теории упругости получено обобщенным методом Фурье относительно системы уравнений Ламе в цилиндрических координатах, связанных с цилиндрами, и декартовых координатах, связанных с границами слоя. Применены особые формулы для перехода между системами координат для базисных решений. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, полученные в результате удовлетворения граничных условий, решены методом редукции. Численное исследование определителя дает основания утверждать, что эта система уравнений имеет единственное решение. В результате были получены перемещения и напряжения в различных точках упругого тела слоя. Параметры редукции были выбраны таким образом, что точность выполнения граничных условий достигла 10^{-4} .

Результаты исследования. Проведен анализ напряженно - деформированного состояния тела слоя при разном геометрическом расположении в нем двух цилиндрических полостей. Выяснилось, что при равном удалении полости и границы слоя от поверхности рассматриваемого цилиндра, большее влияние на напряженное состояние тела имеет граница слоя.

Выводы. С увеличением параметра редукции, точность выполнения граничных условий увеличивается, но также увеличивается продолжительность вычисления.

Приведенный анализ можно использовать для предварительного выбора расчетной модели, а предложенный метод для расчета, с высокой точностью, выбранной расчетной схемы.

Ключевые слова: цилиндрические полости в слое, уравнения Ламе, обобщенный метод Фурье.

Investigation of the second main problem of the theory of elasticity for a layer with several cylindrical cavities

V. Yu. Miroshnikov

Background. When designing spatial structures, parts and mechanisms, underground structures and communications, it is necessary to have an idea of the stress state of such a structure.

Objective. It is necessary, with high accuracy, to find displacements and stresses in the body of the layer, which has longitudinal cylindrical cavities, and also to analyze its stress-strain state. At the boundaries of the layer and at the boundaries of the cavities, displacements are given.

Methods. To achieve the declared goal, an analytical-numerical method has been developed for a layer with circular endless cylindrical cavities parallel to each other and to the surfaces of the layer. The solution of the spatial problem of the theory of elasticity is obtained by the generalized Fourier method with respect to the system of Lamé equations in cylindrical coordinates associated with cylinders and Cartesian coordinates associated with layer boundaries. Special formulas are applied for the transition between coordinate systems for basic solutions. The infinite systems of linear algebraic equations obtained as a result of satisfying the boundary conditions are solved by the reduction method. A numerical study of the determinant gives reason to argue that this system of equations has a unique solution. As a result, displacements and stresses at various points of the elastic body of the layer were obtained. The reduction parameters were chosen so that the accuracy of the boundary conditions reached 10⁻⁴.

Results. The analysis of the stress - strain state of the layer body at different geometric locations of two cylindrical cavities in it is carried out. It turned out that with equal distance between the cavity and the layer boundary from the surface of the cylinder in question, the layer boundary has a greater effect on the stress state of the body.

Conclusions. With an increase in the reduction parameter, the accuracy of fulfilling the boundary conditions increases, but the calculation time also increases.

The above analysis can be used for preliminary selection of the calculation model, and the proposed method for calculation, with high accuracy, the selected calculation scheme.

Keywords: cylindrical cavities in a layer, Lamé equations, generalized Fourier method.

References

- Guz', A.N., Kubenko, V.D. and Cherevko, M.A. (1978), *Difraktsiya uprugikh voln* [Diffraction of elastic waves], Nauk. Dumka, Kiev, Ukraine.
- Grinchenko, V.T. and Meleshko, V.V. (1981), *Garmonicheskiye kolebaniya i volny v uprugikh telakh* [Harmonic vibrations and waves in elastic bodies], Nauk. Dumka, Kiev, Ukraine.
- Grinchenko, V.T. and Ulitko, A.F. (1968), "An exact solution of the problem of stress distribution close to a circular hole in an elastic layer", *Soviet Applied Mechanics*, no. 10, pp. 31 – 37.
- Grinchenko, V.T. and Ulitko, A.F. (1985), *Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti i plastichnosti. Ravnovesiye uprugikh tel kanonicheskoy formy* [Spatial problems of the theory of elasticity and plasticity. Balance of elastic bodies of canonical form], Nauk. Dumka, Kiev, Ukraine.
- Volchkov, V.V., Vukolov, D.S. and Storojev, V.I. (2016), "Diffraction of shear waves by internal tunneling cylindrical non-homogeneities in the form of a cavity and inclusion in an elastic layer with free faces", *Solid mechanics*, vol. 46, pp. 119 – 133.
- Bobyleva, T. (2016), "Approximate Method of Calculating Stresses in Layered Array", *Procedia Engineering*, vol.153, pp.103 – 106. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.087>.
- Vaysfel'd, N. (2015), "The axisymmetric contact interaction of an infinite elastic plate with an absolutely rigid inclusion", *Acta Mech*, vol. 226, pp. 797 – 810. <https://doi.org/10.1007/s00707-014-1229-7>.
- Popov, G.Ya. and Vasfeld, N.D. (2014), "Axisymmetric problem of the theory of elasticity for an infinite slab with a cylindrical inclusion, taking into account its specific weight", *International Applied Mechanics*, vol. 50, no. 6, pp. 27 – 38.
- Meleshko, V.V. (2013), "Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings", *J.Eng. Math.*, vol. 78, pp. 143 – 166. <https://doi.org/10.1007/s10665-011-9524-y>.
- Khoroshun, L.P. (2000), "Mathematical models and method of the mechanics of stochastic composites", *International Applied Mechanics*, vol. 36, no. 10, pp. 1284 – 1316. <https://doi.org/10.1023/a:1009482032355>.
- Nikolayev, A.G., Protsenko, V.S. (2011), *The generalized Fourier method in spatial problems of the theory of elasticity*, Nats. aerokosm. universitet im. N.Ye. Zhukovskogo "KHAI", Kharkov, Ukraine.
- Protsenko, V.S., Nikolaev, A.G. (1982), "Kirsch spatial problem", *Mathematical methods for analyzing dynamic systems*, vol. 6, pp. 3 – 11.
- Nikolayev, A.G., Orlov, Ye.M., (2012), "Solution of the first axisymmetric thermoelastic boundary value problem for a transversely isotropic half-space with a spheroidal cavity", *Problems of computational mechanics and structural durability*, vol. 20, pp. 253 – 259.
- Miroshnikov, V.Yu. (2018), "First basic elasticity theory problem in a half-space with several parallel round cylindrical cavities", *Journal of Mechanical Engineering*, vol. 21, no. 2, pp. 12 – 18.
- Protsenko, V., Miroshnikov, V. (2018), "Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned", *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, vol. 4, no. 7 (94), pp. 43 – 50. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.139567>.
- Nikolayev, A.G., Tanchik, Ye.A. (2013), "Stress distribution in a cell of a unidirectional composite material formed by four cylindrical fibers", *Bulletin of the Odessa National University. Maths. Mechanics*, vol. 4, pp. 101 – 111.
- Miroshnikov, V.Yu. (2018), "The first major problem of the theory of elasticity in a half-space with several parallel circular cylindrical cavities", *Mizhnarodna naukova konferentsiya "Suchasni problemy mekhaniky ta matematyky"* [International scientific conference "Modern problems of mechanics and mathematics"], Lviv, Ukraine, 25.05.2018, pp. 63 – 64.
- Miroshnikov, V.Yu. (2018), "The third major problem of the theory of elasticity for a half-space with circular cylindrical cavities", *Materialy I Mizhnarodnoyi naukovno-tekhnichnoyi konferentsiyi "Dynamika, mitsnist' ta modelyuvannya v mashynobuduvanni"* [Materials of the I International Scientific and Technical Conference "Dynamics, Strength and Modeling in Mechanical Engineering"], Kharkiv, Ukraine, 14.09.2018, pp. 114 – 115.
- Miroshnikov, V.Yu. (2019), "Determination of the stress state of a two-layer composite with a longitudinal cylindrical cavity", *74 Naukovo-tekhnichna konferentsiya KhNUBA* [74 Scientific-Technical Conference of KhNUCA], Kharkiv, Ukraine, 22.03.2019, p. 130.
- Protsenko, V.S., Ukrainets N.A. (2015), "Application of the generalized Fourier method to the solution of the first main problem of the theory of elasticity in a half-space with a cylindrical cavity", *Visnyk Zaporiz'kogo natsional'nogo universytetu*, vol. 2, pp. 193 – 202.