

Экспресс-оценка коэффициента концентрации напряжений у нагруженного болтом круглого отверстия в пластине из слоистого полимерного композиционного материала. Влияние схемы армирования

К. Н. Рудаков • Ю. Н. Дифучин

КПИ им. Игоря Сикорского, г. Киев, Украина

Received: 14 January 2020 / Accepted: 9 February 2020

Проблематика. Среди различных вариантов соединений деталей из слоистых полимерных композиционных материалов (ПКМ) значительный процент занимает болтовые соединения (БС). Для их правильного проектирования необходимо, в частности, проводить прочностные расчеты. При этом желательно заменять сложные конечно-элементные расчеты на экспресс-анализ: расчеты по простым формулам достаточной точности. Один из основных прочностных расчетов БС – расчет на разрыв сечения, ослабленного отверстием. Для БС пластин из ПКМ этот вопрос проработан недостаточно.

Цель исследования. Установление характера и степени влияния схемы укладки монослоев в композитной пластине из слоистого ПКМ на величину коэффициента концентрации напряжений (ККН) у отверстия, нагруженного болтом.

Методика реализации. Были проведены численные расчеты с применением метода конечных элементов (контактная задача) для БС пластины из слоистого ПКМ. Предполагалась 3D-ортоотропия каждого монослоя. Проверились две простые формулы экспресс-анализа. Строились графики, выявлялись наличие и степень влияния схемы укладки монослоев в пластине из слоистого ПКМ на изменение значений ККН у нагруженного болтом отверстия в ослабленном отверстием сечении пластины.

Результаты исследования. По результатам расчетов получены числовые оценки, характеризующие степень влияния схемы укладки монослоев в пластине из слоистого ПКМ и точность рассмотренных формул.

Выводы. Проведенные расчеты показали, что изменение схемы армирования слоистого ПКМ приводит к существенному изменению значений ККН у нагруженного болтом отверстия в ослабленном отверстием сечении пластины; что предложенная аппроксимация (17) имеет недостаточную точность для рассмотренных материалов и схем укладки монослоев. Необходимо продолжение поисков поправочной функции для (15) на более широкой расчетно-экспериментальной базе свойств ПКМ.

Ключевые слова: полимерный композиционный материал; болтовое соединение; коэффициент концентрации напряжений

Введение

Слоистые полимерные композиционные материалы (ПКМ) все шире применяются в новых конструкциях. Среди различных вариантов соединений деталей из ПКМ значительный процент занимает болтовые соединения (БС). Они относительно дешевы в исполнении и являются разборными. Несмотря на давнюю традицию применения БС и уже солидную – деталей из ПКМ, еще нельзя сказать, что все проблемы проектирования БС деталей с ПКМ решены [1–7].

При современном уровне развития вычислительной техники и программных комплексов (ПК), в которых реализован метод конечных элементов (МКЭ), можно рассчитать любую конструкцию, использующую ПКМ. Однако такие расчеты не должны иметь массовый характер (требуют высококлассных специалистов и значительный ресурс), и их желательно заменять на экспресс-анализ: расчеты по простым формулам достаточной точности.

В частности, инженерный поверочный расчет на разрыв пластины (расчет на прочность) в ослабленном круглым отверстием сечении традиционно проводится по формуле [2–4]:

$$\frac{N\alpha}{h(w-d)} \leq [\sigma]_t, \quad (1)$$

где N – результирующее усилие, воспринимаемое сечением, ослабленным отверстием; α – теоретический коэффициент концентрации напряжений (ККН) у отверстия, нагруженного болтом; h , w – толщина и ширина пластины в зоне отверстия; $[\sigma]_t$ – допускаемое напряжение на разрыв материала.

Есть три принципиально различных случая для расчета ККН у отверстия: отверстие свободно от нагрузки (обозначим ККН как α), отверстие заполнено другим материалом (обозначим ККН как $\hat{\alpha}$), отверстие нагружено болтом (обозначили ККН как $\underline{\alpha}$). Известно, что всегда $\underline{\alpha} > \alpha$, причем значительно [8, стр.56; 9, 10].

Примечание 1. Неверно отождествлять задачу про нагружение отверстия болтом с задачей про заполнение отверстия другим материалом, т.к. контактное взаимодействие имеет односторонний характер, а при заполнении предполагается неразрывность перемещений на всей границе раздела [11].

Принято, что величина ККН определяется из отношения значений максимального в сечении напряжения σ_{\max} к номинальному $\sigma_{\text{ном}}$:

$$\underline{\alpha} = \sigma_{\max} / \sigma_{\text{ном}}, \quad (2)$$

и при этом требуется оговорить, какое сечение использовалось для расчета $\sigma_{\text{ном}}$ [12].

Чтобы указать на наличие анизотропии материала пластины, над символом $\underline{\alpha}$ будем добавлять \sim , т.е. для отверстия в пластине из ПКМ, нагруженного болтом, в (1) вместо $\underline{\alpha}$ будем писать $\tilde{\underline{\alpha}}$.

Проблема определения ККН $\underline{\alpha}$ у отверстия сама по себе сложная, т.к. необходимо иметь решение контактной негерцевой задачи [13, 14] (зазор допускается, но относительно малый). В ПКМ добавляется анизотропия и неоднородность, т.е. проблема значительно усложняется [15].

Обычно ПКМ формализуют как совокупность монослоев, каждый из которых состоит из основы (наполнителя) и армирующей нити или ткани, причем упругие и прочностные свойства каждого монослоя предполагаются ортотропными. Монослои в ПКМ имеют различные углы укладки, поэтому назначается основное направление, от которого эти углы отсчитываются, и выписывается схема (формула) армирования ПКМ [16, 17].

Когда отверстие, нагруженное болтом, выполнено в таком слоистом ПКМ, слои на выходе в отверстие, контактируя с болтом, в различной степени сопротивляются нагрузке: сказывается и анизотропия, и углы укладки (ориентация, схема армирования), и взаимовлияние [10], вызванное условиями неразрывности деформаций, причем в литературе количественные сведения об этих явлениях и их формализации практически отсутствуют.

Очевидно, что если под чрезмерной нагрузкой начнет разрушаться наиболее нагруженный слой, то соседние слои достигнет та же участь. Поэтому, чтобы применять формулы (1) и (2), необходимо их приспособить к специфике слоистых ПКМ. Очевидно, что речь идет о величине ККН $\tilde{\underline{\alpha}}$ для монослоя.

Целью работы являлось определение характера и степени влияния схемы армирования (укладки монослоев) в композитной пластине из ПКМ на величину ККН $\tilde{\underline{\alpha}}$ у круглого отверстия, нагруженного болтом, что позволит предложить формулу экспресс-расчета ККН $\tilde{\underline{\alpha}}$ для наиболее нагруженного монослоя.

Номинальные напряжения в монослоях

Итак, в соответствии с (2), номинальное напряжение $\sigma_{\text{ном}}$ является обязательной величиной, необходимой для вычисления ККН $\tilde{\underline{\alpha}}$ при проведении экспресс-анализа. Для пластины из однородного изотропного материала $\sigma_{\text{ном}} = N / (h(w-d))$, т.е. формула (1) может быть записана как $\tilde{\underline{\alpha}} \cdot \sigma_{\text{ном}} \leq [\sigma]_l$. В пластине из многослойного композита у каждого монослоя с номером n свои значения N_n и h_n . Толщины монослоев h_n известны, а для определения N_n желательно иметь простой и достаточно точный алгоритм разложения суммарной величины $N = \sum N_n$ на составляющие N_n . Пусть $N_n = \eta_n N$, т.е. необходимо найти доли η_n в разложении N на N_n .

Современные ПК, применяющие МКЭ как основной расчетный метод (ANSYS, Nastran, Abaqus и др.), обычно имеют “инструмент” расчета “эффективных” характеристик композиционного материала (модулей Юнга и сдвига, коэффициентов Пуассона, коэффициентов температурного удлинения и др.) для 2D-ортотропных сред. Резонно предположить, что дальнейшее использование полученных в ПК “эффективных” характеристик не противоречит результатам других расчетов в данном ПК. Поэтому для нахождения доли η_n в разложении N на N_n можно использовать изложенный ниже простой алгоритм. В нем в качестве “инструмента” использовали диалог Layers из ПК FEMAP/Nastran [18].

Рассмотрели модели пластин из ПКМ, модули упругости монослоев которых приведены в таблице 1. Данные взяты из статей [19, 20] (с пересчетом $\mu_{21} = \mu_{12} E_{22} / E_{11}$).

Таблица 1

Значения модулей упругости монослоя (I – ЭДТ-10 / ТС 36S-12К; II – УОЛ-300-1А; III – УТ-900-3А)

Монослой	Модули Юнга $\cdot 10^{-5}$, МПа			Модули сдвига $\cdot 10^{-5}$, МПа			Коэффициенты Пуассона		
	E_{11}	E_{22}	E_{33}	$G_{12} = G_{21}$	$G_{13} = G_{31}$	$G_{23} = G_{32}$	$\mu_{12} = \mu_{13}$	$\mu_{23} = \mu_{32}$	$\mu_{21} = \mu_{31}$
I	1.497	0.1756	0.1756	0.1683	0.1683	0.0763	0.2637	0.1504	0.0314
II	1.500	0.0800	0.0800	0.0440	0.0440	0.0270	0.2900	0.4800	0.0155
III	0.800	0.800	0.0850	0.0600	0.0480	0.0480	0.4000	0.3200	0.3200

Как и в [10] предположили, что искомая доля η_n равна доле, приходящейся на слой, в “эффективном” модуле Юнга в направлении действия силы N . Воспользовались формулой Фойхта (Fought), применяемой для подсчета “эффективных” упругих модулей композита (известно, что формула Фойхта дает верхнюю оценку, предполагая равенство обобщенных перемещений компонент композита) [5, 16]:

$$E_{ef} = \left(\sum h_n E_n \right) / h, \quad (3)$$

где h_n – суммарное значение толщины монослоев n -го направления укладки; E_n – соответствующий модуль упругости материала монослоя; h – суммарная толщина слоев (толщина пластины).

Моделировали пластину без отверстия, растянутую вдоль оси X равномерно распределенной по торцу пластины нагрузкой q , т.е. имели $N = N_X = qhw$. Оси X и Y лежали в срединной плоскости пластины, все толщины монослоев были одинаковы. Рассмотрели три характерных случая.

Случай 1. Для схемы армирования композита $[90/0/90/0]_s$ формулу (3) переписали как

$$(E_{11})_{ef} = [h_0(E_{11})_0 + \lambda h_{90}(E_{22})_{90}] / h, \quad (4)$$

где коэффициент приведения λ при известном значении $(E_{11})_{ef}$ позволяет уточнить (с точки зрения реализации Лауэра и слоистых конечных элементов (КЭ) в конкретном ПК) вклад модулей упругости монослоев, уложенных под углом 90 градусов к основному направлению. Из (4)

$$\lambda = \frac{h(E_{11})_{ef} - h_0(E_{11})_0}{h_{90}(E_{22})_{90}}. \quad (5)$$

Сначала из таблицы 1 использовали значения модулей для материала II (монослоя УОЛ-300-1А). В диалоге Лауэра подсчитали, что $(E_{11})_{ef} \approx 79287.5$ МПа. С учетом $h/h_0 = h/h_{90} = 2$ из (5) получили, что $\lambda = 1.071875$, и (для наглядности действий) в числах:

$$(E_{11})_{ef} = (150000 + 1.071875 \cdot 8000) / 2 = 75000 + 4287.5 \approx (0.945925 + 0.054075) \cdot 79287.5 = 79287.5 \text{ МПа.}$$

Таким образом, для материала II получили суммарные относительные вклады монослоев с разными углами укладки в сопротивление деформированию в основном направлении: $\eta_0 \approx 0.945925$ и $\eta_{90} \approx 0.054075$. Введем коэффициент $s = h/h_0$. Так как в данном случае $s = 2$, то суммарная площадь сечения монослоев с углом укладки нуль градусов $A_0 = A/s = hw/s$ и номинальное напряжение в этом сечении

$$\sigma_{nom} = N\eta_0 / A_0 = qhw\eta_0 / (hw/s) = qs\eta_0. \quad (6)$$

Итак, для формулы (6) из (4) можно сразу вычислить, что

$$\eta_0 = (E_{11})_0 / (s \cdot (E_{11})_{ef}) = h_0(E_{11})_0 / (h \cdot (E_{11})_{ef}), \quad (7)$$

а саму формулу (6) переписать как

$$\sigma_{nom} = q \cdot \frac{(E_{11})_0}{(E_{11})_{ef}} = \frac{N}{A} \cdot \frac{(E_{11})_0}{(E_{11})_{ef}}, \quad (8)$$

где под величиною A понимается площадь сечения, воспринимающая нагрузку N .

Далее, для материала II по формуле (8) получили, что при заданной нагрузке $q = 100$ МПа величина $\sigma_{nom} = 2 \cdot 94.5925 \approx 189.2$ МПа. Численное решение дало значение $(\sigma_{nom})_{FEM} \approx 189.8$ МПа, т.е. отличие численного решения от полученного по изложенной выше методике составило приблизительно 0.34%.

Аналогичные действия для материала I (монослой с нитью ТС 36S-12К) дали такие значения: $(E_{11})_{ef} \approx 84059.27$ МПа; $\lambda \approx 1.0488918$; $\eta_0 \approx 0.890443$; $\sigma_{nom} = 100 \cdot 2 \cdot 0.890443 \approx 178.1$ МПа; $(\sigma_{nom})_{FEM} \approx 179.2$ МПа, различие примерно 0.60%.

Примечание 2. В расчетах чрезмерное количество значащих цифр оставляли намеренно, т.к. большинство приведенных значений являлись промежуточными.

Случай 2. Для схемы армирования композита $[-45/45/90/0]_s$ формулу (3) переписали как

$$(E_{11})_{ef} = [h_0(E_{11})_0 + h_{90}(E_{22})_{90} + \lambda h_{45}(E_{11})_{\pm 45}] / h. \quad (9)$$

Из (9)

$$\lambda = \frac{h(E_{11})_{ef} - h_0(E_{11})_0 - h_{90}(E_{22})_{90}}{h_{45}(E_{11})_{\pm 45}}. \quad (10)$$

Сначала из таблицы 1 использовали значения модулей для материала II. В диалоге Layups подсчитали, что $(E_{11})_{ef} \approx 56266.64$ МПа. С учетом $h_0 = h_{90} = h_{\pm 45} / 2 = h / 4$, получили, что для материала II $\lambda \approx 0.2235552$, и (в числах)

$$(E_{11})_{ef} = (150000 + 8000 + 2 \cdot 0.2235552 \cdot 150000) / 4 = (0.666470 + 0.035545 + 0.297985) \cdot 56266.64 = 56266.64 \text{ МПа.}$$

Таким образом, для материала II имеем суммарные относительные вклады монослоев с разными углами укладки в сопротивление деформированию в основном направлении: $\eta_0 \approx 0.666470$, $\eta_{90} \approx 0.035545$ и $\eta_{\pm 45} \approx 0.297985$. Так как $h/h_0 = s$, то площадь сечения монослоя с углом укладки нуль градусов $A_0 = A/s = hw/s$ и номинальное напряжение в этом сечении $\sigma_{nom} = N\eta_0/A_0 = qhw\eta_0/(hw/s) = qs\eta_0$. Формула совпала с (6).

Далее, для материала II получили, что при заданной нагрузке $q = 100$ МПа величина $\sigma_{nom} = 100 \cdot 4 \cdot 0.666470 \approx 266.6$ МПа. Такое же значение дает прямое применение формулы (8). Численное решение дало значение $(\sigma_{nom})_{FEM} \approx 270.1$ МПа, т.е. отличие численного решения от полученного по изложенной выше методике составило приблизительно 1.7%.

Аналогичные действия для материала монослоев I дали такие значения: $(E_{11})_{ef} \approx 69231.7$ МПа; $\lambda \approx 0.366289$; $\eta_0 \approx 0.540576$; $\sigma_{nom} = 100 \cdot 4 \cdot 0.540576 \approx 216.2$ МПа; $(\sigma_{nom})_{FEM} \approx 222.4$ МПа, различие примерно 2.8%.

Аналогичные действия для пластины с монослоями из материала II с углами укладки 0 и 90 градусов и материала III с углами укладки -45 и +45 градусов (II&III) дали такие значения: $(E_{11})_{ef} \approx 62958.52$ МПа; $\lambda \approx 0.312780$; $\eta_0 \approx 0.595630$; $\sigma_{nom} = 100 \cdot 4 \cdot 0.595630 \approx 238.3$ МПа; $(\sigma_{nom})_{FEM} \approx 239.3$ МПа, различие примерно 0.4%.

Таким образом, показана высокая и вполне достаточная для композитов точность формулы (8) для определения номинального напряжения σ_{nom} в монослое ПКМ, воспринимающем относительно большую часть нагрузки, передаваемой сечением пластины. Применение формул (5) – (7) для определения величины σ_{nom} не требуется.

Случай 3. Однонаправленная укладка монослоев. Тривиальное решение, все слои одинаково сопротивляются нагрузке. Считали, что угол укладки монослоев $\varphi = 0$ или $\varphi = 90$ градусов, т.е. все $E_n = E_{11}$ или $E_n = E_{22}$ соответственно. Поэтому $\sigma_{nom} = N/A = qhw/(hw) = q$, а $s = 1$.

Коэффициент концентрации напряжений у круглого отверстия, нагруженного болтом: некоторые простые формулы экспресс-анализа

Как отмечено в [21], имеется несколько вариантов аналитических решений для пластины единичной толщины из ортотропного материала, через функции комплексного переменного [15, 22, 23]. Но их практическое применение затруднено. В статье [24] предложили “облегченный” (приближенный) вариант, основанный на решении De Jong [15]. Сначала задали синусоидальный характер распределения усилий на контуре отверстия (в зоне предполагаемого контакта) по закону $(4ph/\pi)\sin\theta$. Тогда действующая на отверстие (и болт) результирующая сила $F = \pi dh$. Решение рассматривали как суперпозицию двух решений:

первое – о 2D-ортоотропной пластине со свободным отверстием, растянутой на удалении распределенным усилием $q/2$; второе – о такой же пластине с отверстием, контактирующем (без зазора и трения) с неподвижным жестким стержнем (pin-loaded hole) и при “потоковом” нагружении таким же распределенным усилием $q/2$ (см. рис.2 в [21]). Из условия равновесия величина $q = p\zeta$, где $\zeta = d/w$; d – диаметр отверстия (болта); w – условная ширина пластины, приходящаяся на одно отверстие. Оговорено ограничение $\zeta \leq 0.5$. Из полученного решения [23] путем несложных преобразований в [21] получена формула для определения ККН в болтовом соединении, у ослабленного отверстием сечения монослоя, находящегося в составе пластины из слоистого композита:

$$\tilde{\alpha}(\zeta) = \frac{1-\zeta}{\zeta} \left[\frac{\zeta}{2} + \left(\frac{\zeta}{2} + \frac{4}{\pi^2} \right) \frac{\sqrt{2(\sqrt{E_{YY}/E_{XX}} - \mu_{YY}) + E_{YY}/G_{YY}}}{\sqrt{E_{YY}/E_{XX}}} \right], \quad (11)$$

где направление X соответствует направлению действия растягивающей силы в плоскости пластины и совпадает с направлением главной оси ортоотропии 1; направление Y ортогонально направлению X и также лежит в плоскости пластины, совпадает с направлением главной оси ортоотропии 2; E_{XX} , E_{YY} , G_{XY} , μ_{XX} – модули Юнга, сдвига и коэффициент Пуассона соответственно. Если известно значение μ_{XY} , а не μ_{XX} , то подсчитывается $\mu_{XX} = E_{YY}\mu_{XY}/E_{XX}$.

Еще один вариант определения ККН в болтовом соединении, у ослабленного отверстием сечения монослоя, предложен в работе [21]. Формула получена для практически важного диапазона $0.15 \leq \zeta \leq 0.5$ компиляцией хорошо обоснованных аппроксимаций и формул, полученных экспериментально и теоретически:

$$\tilde{\alpha}(\zeta) \approx \underline{\alpha}(\zeta) \cdot \{1 + (1-\zeta) \cdot [\tilde{\alpha}(0) - 3] / \alpha(\zeta)\}, \quad (12)$$

где $\alpha(\zeta) \approx 3.000 - 3.140\zeta + 3.667\zeta^2 - 1.527\zeta^3$ [12, табл.17.1], $\underline{\alpha}(\zeta) \approx 12.882 - 52.714\zeta + 89.762\zeta^2 - 51.667\zeta^3$ [25, стр.358] и $\tilde{\alpha}(0) = 1 + \sqrt{2(\sqrt{E_{XX}/E_{YY}} - \mu_{XY}) + E_{XX}/G_{XY}}$ [26].

Коэффициент концентрации напряжений у круглого отверстия, нагруженного болтом: расчеты

В статье [10, табл.1] в численных расчетах было получено, что конечно-элементная модель (один КЭ по толщине пластины) с отверстием $d = 5$ мм в пластине шириною $w = 30$ мм, с размером гексагонального КЭ второго порядка аппроксимации в зоне концентрации напряжений 0.025 мм на 0.025 мм (относительный размер КЭ – $0.005d$) давала точность определения ККН не хуже 2%. Поэтому взяли эту модель слоя КЭ за основу, размножили слои в количестве $3 \times 4 = 12$ (по 3 КЭ по толщине каждого из 4-х монослоев), они заполнили половину толщины пластины, каждому монослою задавали необходимый угол укладки.

В модели использовали наличие двух плоскостей симметрии: XoY (в центральной плоскости пластины) и XoZ (вдоль пластины), т.е. модель содержала $1/4$ соединения. Все узлы конечно-элементной модели, лежащие на плоскостях рассечения, закрепляли в направлении нормали. Кроме того, узлам, лежащим на выступающем (на 1 мм выше поверхности пластины) торце цилиндра, запрещали перемещения в направлении осей X и Z .

Материалу цилиндра задавали модуль Юнга, характерный для стали, завышенный в 1000 раз. Т.е. делали его очень жестким, чтобы практически исключить его изгиб. Исходный зазор между цилиндром и отверстием, а также трение, не задавали. Применяли современную модель контакта типа “поверхность–поверхность”, с автоматическим определением и корректировкой зоны контакта.

Растягивающую распределенную нагрузку q задавали на торце пластины, рассчитанную в соответствии с формулой (8) с поправкой на уменьшение сечения отверстием. Т.е. вместо (8) применяли формулу

$$\sigma_{nom} = \frac{q}{1-\zeta} \cdot \frac{(E_{11})_0}{(E_{11})_{ef}} = \frac{N}{A} \cdot \frac{1}{1-\zeta} \cdot \frac{(E_{11})_0}{(E_{11})_{ef}}, \quad (13)$$

из которой

$$q = \frac{N}{A} = \sigma_{nom} (1-\zeta) \cdot \frac{(E_{11})_{ef}}{(E_{11})_0}. \quad (14)$$

Для облегчения анализа результатов нагрузки q задавали такую, чтобы в ослабленном сечении реализовывалось $\sigma_{nom} = 100$ МПа. Эти значения приведены в таблице 2.

Таблица 2

Значения распределенной нагрузки q (МПа), задаваемой на торце пластины, при $\zeta = 1/6$ (для получения $\sigma_{nom} = 100$ МПа)

Пластина из монослоев	$[0/0/0/0]_S$	$[90/90/90/90]_S$	$[90/0/90/0]_S$	$[-45/45/90/0]_S$
I	83.3(3)	83.3(3)	46.793	38.539
II			44.049	31.259
II&III	–	–	–	34.977

На рис. 1 привели графики изменения напряжений в ослабленном отверстием сечении пластины из материала I вдоль линии, соответствующей центру монослоя с углом укладки нуль градусов.

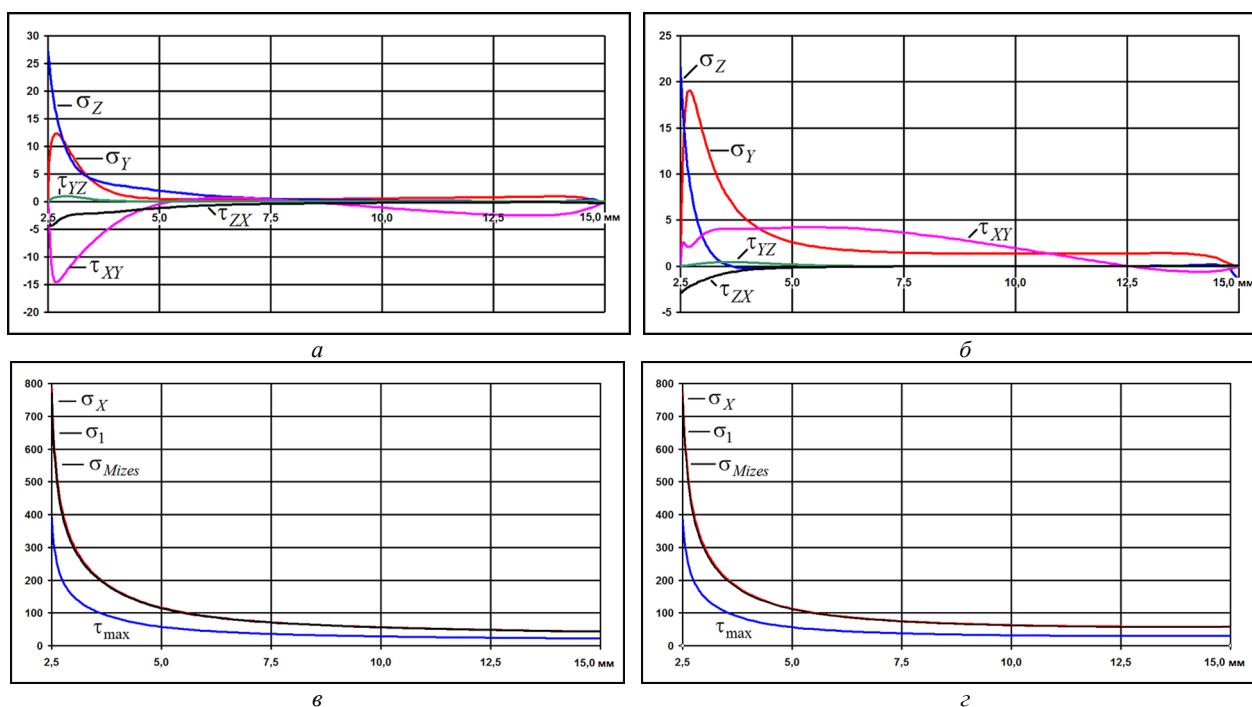


Рис. 1. Напряжения (МПа) в ослабленном отверстием сечении пластины (из монослоев с нитью ТС 36S-12К) вдоль линии, соответствующей центру монослоя с углом укладки нуль градусов. Схемы армирования: а), в) – $[-45/45/90/0]_S$, б), г) – $[90/0/90/0]_S$

Из их сравнения следует, что графики напряжений σ_X , максимальных σ_1 и эквивалентных σ_{Mises} весьма близки, а напряжения $\sigma_Y, \sigma_Z, \tau_{XY}, \tau_{YZ}$ и τ_{ZX} – относительно малы. Поэтому в расчетах на разрыв ослабленного сечения последние можно не учитывать, а проводить анализ лишь на основе $\sigma_1 = \sigma_X$.

Для пластины из материалов II и II&III графики аналогичны.

Примечание 3. Напряжения $\tau_{max} \approx \sigma_X / 2$ и реализуются в плоскости монослоя под углом примерно 45 градусов по отношению к оси X . Они могут вызывать расслоение композитной пластины. Но это уже другой тип нарушения прочности пластины с отверстием, нагруженным болтом, который здесь не рассматривается.

На рис.2 показаны графики σ_X / σ_{nom} в ослабленном отверстием сечении пластины вдоль оси Y указанных схем армирования и материалов ПКМ, полученных при нагрузках q , указанных в таблице 2 и в наиболее нагруженном слое. Кривые очень близки, кроме непосредственно пиковых значений. И еще один вывод: чем меньше отношение E_{XX} / E_{YY} , тем меньше расслоение этих графиков.

В таблице 3 приведены расчетные числовые значения ККН, полученные рассмотренными формулами экспресс-анализа и с применением МКЭ, оценены погрешности по сравнению с решением МКЭ.

Для схемы армирования $[0/0/0/0]_S$ ошибки относительно небольшие, хотя и не являются консервативными. Для схемы $[90/90/90/90]_S$ они значительно больше, причем в статье [24] была зафиксирована аналогичная ситуация. Отметим, что для схемы $[90/90/90/90]_S$ отчетливо проявился эффект сдвига максимума значения σ_X в сторону контактного пятна (примерно на 6 градусов), как и на рис.4 статьи [21], и в ослабленном сечении значение $(\sigma_X)_{\max}$ уже примерно на 10% было ниже максимального в отверстии. Поскольку формулы (11) и (12) предназначены для ослабленного сечения, то и $(\sigma_X)_{\max}$ из расчетов МКЭ тоже брали для ослабленного сечения.

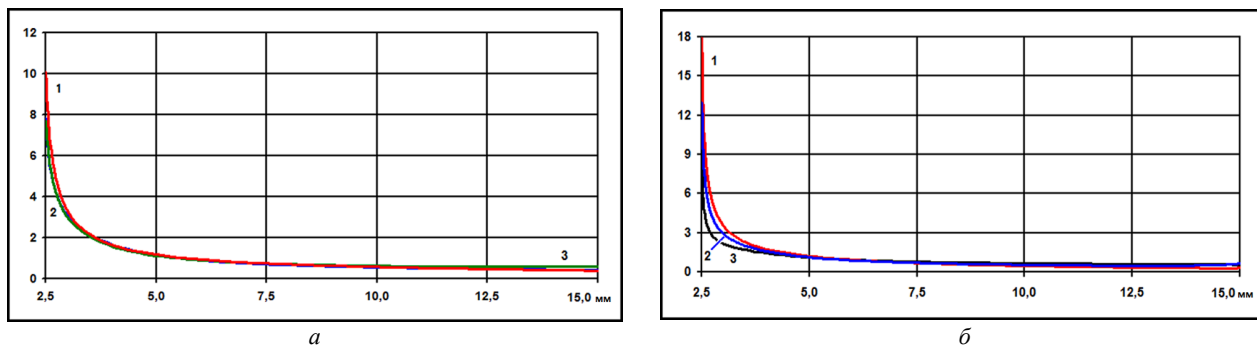


Рис. 2. Графики $\sigma_X / \sigma_{ном}$ в ослабленном отверстии сечении пластины вдоль оси Y . Схемы армирования: 1 – $[0/0/0/0]_S$; 2 – $[90/0/0/90]_S$; 3 – $[-45/45/90/0]_S$. Монослой: а) – I; б) – II

Таблица 3

Значения коэффициентов концентрации напряжений $\tilde{\alpha}$ у круглого отверстия в пластине, нагруженного жестким болтом (без зазора и трения)

Пластина из монослоев	Схема армирования	Способ получения / отклонение от МКЭ, %		
		Формула (11)	Формула (12)	МКЭ
I	$[0/0/0/0]_S$	9.62 / -4.75	10.0 / -1.00	10.1
	$[90/90/90/90]_S$	3.57 / -18.9	4.89 / +11.1	4.40
II	$[0/0/0/0]_S$	16.3 / -3.00	15.6 / -7.14	16.8
	$[90/90/90/90]_S$	4.08 / -32.9	5.32 / -12.5	6.08

Расчетные данные, приведенные в таблице 4, показывают, что взаимовлияние слоев в пластине из ПКМ, уложенных с разными углами ориентации, имеется, существенно и приводит к снижению значений ККН $\tilde{\alpha}$ у нагруженного болтом отверстия в сечении пластины, ослабленном отверстием.

Таблица 4

Значения коэффициентов концентрации напряжений $\tilde{\alpha}$ у круглого отверстия в пластине из монослоев I / II / II&III, нагруженного жестким болтом (без зазора и трения)

Схема армирования	Значение (МКЭ)	Среднее значение	Отклонение от среднего, %
$[90/90/0/0]_S$	7.73 / 14.2 / -	7.72 / 14.1 / -	+0.1 / +0.7 / -
$[90/0/90/0]_S$	7.68 / 14.1 / -		-0.5 / 0.0 / -
$[90/0/0/90]_S$	7.72 / 13.8 / -		-0.00 / -2.1 / -
$[0/0/90/90]_S$	7.75 / 14.6 / -		+0.4 / +3.5 / -
$[0/90/0/90]_S$	7.71 / 14.2 / -		-0.1 / +0.7 / -
$[0/90/90/0]_S$	7.70 / 13.6 / -		-0.3 / -3.5 / -
$[-45/45/90/0]_S$	7.91 / 7.58 / 8.82	8.03 / 7.83 / 8.57	-1.5 / -3.2 / +2.9
$[-45/90/45/0]_S$	8.02 / 7.41 / 8.40		-0.1 / -5.4 / -2.0
$[90/-45/45/0]_S$	8.13 / 7.61 / 8.58		+1.2 / -2.8 / +0.1
$[90/-45/0/45]_S$	8.20 / 8.13 / 8.68		+2.1 / +3.8 / +1.3
$[0/-45/90/45]_S$	7.93 / 8.17 / 8.36		-1.2 / +4.3 / -2.5
$[0/-45/45/90]_S$	8.00 / 8.13 / 8.57		-0.4 / +3.8 / 0.0

Для проведения экспресс-оценки величины ККН $\underline{\alpha}$ формулы (1) у нагруженного болтом отверстия в пластине из слоистого ПКМ с более сложными схемами армирования (см. таблицу 4) необходимо получить функциональную зависимость между значениями $\underline{\alpha}$ таблицы 4 и значениями ККН, полученными по формулам (11), (12) или аналогичных для однонаправленных схем армирования (типа $[0/0/0/0]_S$ или $[90/90/90/90]_S$, см. таблицу 3). В первом приближении предположили, что такая функциональная зависимость однородна по параметру $\underline{\alpha}(\zeta)$, полученному формулами типа (11), (12) или аналогичными, т.е.

$$\underline{\alpha} \approx \underline{\alpha}(\zeta) \cdot f(r_1, \dots, r_n), \tag{15}$$

где r_i – параметры поправочной функции.

Очевидно, что поправочная функция $f(r_1, \dots, r_n)$ должна учитывать соотношения упругих свойств материалов, составляющих композитную пластину, схему армирования, а также в предельном переходе должна равняться единице.

В качестве параметра r_1 рассмотрели уже использовавшееся выше отношение, одновременно учитывающее и упругие свойства материалов, и схему армирования:

$$r_1 = (E_{11})_{ef} / (E_{11})_0. \tag{16}$$

В первом приближении для $f(r_1, \dots, r_n)$ использовали линейную функцию

$$f \approx k_1 r_1 + (1 - k_1) \cdot 1 = 1 - k_1(1 - r_1), \tag{17}$$

где весовой коэффициент $k_1 \in [0,1]$. Она удовлетворяет требованию предельного перехода, т.к. для пластин с однонаправленными схемами армирования $r_1 = 1$ (сомножитель при $(1 - k_1)$ в первой части формулы (17)) и $f = 1$. Возможные значения коэффициента k_1 определили пересчетом данных из таблицы 3 и 4 (см. таблицу 5) по формуле, полученной из (15) и (17):

$$k_1 \approx \frac{1 - \underline{\alpha} / \underline{\alpha}(\zeta)}{1 - r_1}. \tag{18}$$

В этой формуле использовали значения ККН $\underline{\alpha}(\zeta)$, подсчитанные по формулам (11) и (12), а ККН $\underline{\alpha}$ – подсчитанные с использованием МКЭ. Определили и усредненное значение k_1 .

Таблица 5

Значения весового коэффициента k_1 для поправочной функции (17)

Пластина из монослоев	ККН $\underline{\alpha}(\zeta)$ и способ его получения Формула (11) / (12)	Схема армирования	ККН $\underline{\alpha}$ (МКЭ)	r_1	k_1	
					Формула (18)	Среднее
I	9.62 / 10.0	$[90/0/0/90]_S$	7.72	0.5615	0.4504 / 0.5200	0.54
		$[-45/45/90/0]_S$	8.03	0.4625	0.3075 / 0.3665	
II	16.3 / 15.6	$[90/0/0/90]_S$	14.1	0.5286	0.2863 / 0.2040	
		$[-45/45/90/0]_S$	7.83	0.3751	0.8315 / 0.7971	
II&III		$[0/-45/45/90]_S$	8.57	0.4197	0.8172 / 0.7766	

Из таблицы видно, что весовой коэффициент менялся в широком диапазоне, и это не новый факт из практики использования весовых коэффициентов линейной аппроксимации. Особенно сильно это проявляется при относительно близких значениях.

Из теории численных методов известно, что наибольшую теоретическую точность имеют весовые схемы с весовым коэффициентом, равным 0.5. Поэтому приняли $k_1 = 0.5$ и в таблице 6 представили результаты экспресс-оценки величины ККН $\underline{\alpha}$ для формулы (1) с применением этого значения.

Обсуждение

Очевидно расширение в применении формулы (8): монослой с углом укладки 90 градусов не обязателен, а углы укладки монослоев могут быть не только ± 45 градусов, а и любые другие. И еще очевидно ограничение

в применении формулы (8): только схемы армирования ПКМ, симметричные относительно продольной вертикальной плоскости XoZ и срединной плоскости пластины (горизонтальной плоскости XoY).

Известно, что погрешности вычислений имеют свойство накапливаться. Также известно, что МКЭ “срезает” пиковые значения напряжений. К тому же пики значений $(\sigma_x)_{\max}$ смещаются в сторону зоны контакта. Поэтому в итоговой таблице 6 значения погрешностей отнюдь не точны и представлены всего двумя значащими цифрами.

Таблица 6

Результаты экспресс-оценки коэффициентов концентрации напряжений $\tilde{\alpha}$ у круглого отверстия в пластине из монослоев I / II / II&III, нагруженного жестким болтом (без зазора и трения)

Пластина из монослоев	ККН $\tilde{\alpha}(\zeta)$ и способ его получения	Схема армирования	ККН α (МКЭ)	r_1	Формулы (15) – (17), $k_1 = 0.5$	
	Формула (11) / (12)				ККН α	отклонение от МКЭ, %
I	9.62 / 10.0	$[0/0/0/0]_S$	10.1	1	9.62 / 10.0	-4.7 / -1.0
		$[90/0/0/90]_S$	7.72	0.5615	7.51 / 7.81	-2.7 / +1.1
		$[-45/45/90/0]_S$	8.03	0.4625	7.03 / 7.31	-12 / -8.9
II	16.3 / 15.6	$[0/0/0/0]_S$	16.8	1	16.3 / 15.6	-3.0 / -7.1
		$[90/0/0/90]_S$	14.1	0.5286	12.5 / 11.9	-12 / -15
		$[-45/45/90/0]_S$	7.83	0.3751	11.2 / 10.7	+43 / +37
II&III		$[0/-45/90/45]_S$	8.57	0.4197	11.6 / 11.1	+35 / +29

На первый взгляд, погрешности значительны, особенно для практически важных случаев схем армирования типа $[0/-45/90/45]_S$. Однако применение даже рассмотренных выше неточных экспресс-оценок все же лучше, чем, например, применение в формуле (1) значения $\alpha=3$ под тем предлогом, что схема армирования $[0/-45/90/45]_S$ является симметричной и приводит к квазиизотропии. А ведь $\alpha=3$ здесь не годится уже потому, что эта оценка – для *ненагруженного* круглого отверстия в очень широкой пластине. А у нагруженного отверстия в изотропной пластине при $\zeta \leq 1/6$ он как минимум в два раза больше [21].

Кстати, ничто не мешает на практике пренебрегать влиянием схем укладки, снижающих величину α . То есть использовать консервативные экспресс-оценки α по формулам типа (11) и (12).

Смена знака погрешности при смене материала монослоев (таблица 6) указывает на наличие как минимум еще одного параметра влияния в формуле (15), или, что тоже вероятно, ее ошибочности. Т.е. поиск необходимой аппроксимации нельзя назвать законченным.

Выводы

Проведенные расчеты показали, что:

- взаимовлияние монослоев и схемы армирования слоистого ПКМ имеется, существенно и приводит к снижению значений ККН у нагруженного болтом отверстия в ослабленном отверстии сечении пластины;
- при варьировании схемы армирования ПКМ в условиях сохранения соотношения между количеством слоев с конкретными углами их ориентации и наличия симметрии относительно вертикальной плоскости XoZ значение ККН меняется незначительно (таблица 4);
- предложенная аппроксимация имеет недостаточную точность для рассмотренных материалов и схем укладки монослоев. Необходимо продолжение поисков поправочной функции $f(r_1, \dots, r_n)$ на более широкой расчетно-экспериментальной базе свойств ПКМ.

References

1. Карпов Я.С. Соединения деталей и агрегатов из композиционных материалов / Я.С. Карпов. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т “Харьк. авиац. ин-т”, 2006. – 359 с.
2. Василевский Е.Т. Система экспериментального обеспечения расчета на прочность механических соединений деталей из композитов / Е.Т. Василевский, А.З. Двейрин, Я.С. Карпов, С.П. Кривенда // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Х.: НАКУ “ХАИ”, 2010. – № 47. – С. 42–52.
3. Киркач А.Б. Проблемы прочности болтовых соединений на основе слоистых композиционных пластиков / А.Б. Киркач // Вестник ХПИ. Серия “Динамика и прочность машин”. – 2011. – № 63. – С. 45–54.
4. ECSS-E-HB-32-20. Part 1A. Structural materials handbook – Part 1: Overview and material properties and applications. (2011), available at : http://www.ecss.nl/wp-content/uploads/handbooks/ecss-e-hb/ECSS-E-HB-32-20_Part1A.pdf

5. ECSS-E-HB-32-20, Part 2A. Structural materials handbook – Part 2: Design calculation methods and general design aspects. (2011), available at : http://www.ecss.nl/wp-content/uploads/handbooks/ecss-e-hb/ECSS-E-HB-32-20_Part2A.pdf
6. Двейрин А.З. Обзор и анализ состояния проблемы расчетно-экспериментального обеспечения проектирования агрегатов самолета из полимерных композитов с механическими соединениями деталей / А.З. Двейрин // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – 2014. – № 66. – С. 5–19.
7. Проектирование и конструирование изделий из композиционных материалов. Теория и практика: учебник / П.М. Гагауз, Ф.М. Гагауз, Я.С. Карпов, С.П. Кривенда; под общ. ред. Я.С. Карпова – Х. : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского “Харьк. авиац. ин-т”, 2015. – 672 с.
8. Grover, H.J. (1966), NAVAIR 01-1A-13. Fatigue of Aircraft Structures. NAVAL Air Systems Command Department of the NAVY
9. Решетникова Р.Ю. Влияние осевого натяга на локальное напряженное состояние в односрезных болтовых соединениях / Р.Ю. Решетникова // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов: сб. науч. тр. Нац. аэрокосм. ун-та им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”. – Вып. 1 (73). – Х., 2013. – С. 87–99.
10. Рудаков К.Н. О расчетах болтового соединения на разрывное разрушение ослабленного отверстием сечения композитной пластины / К.Н. Рудаков, Ю.Н. Дифучин // Mechanics and Advanced Technologies. #1(82), 2018. – С. 58–66. <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2018.82.121050>
11. Савин Г.И. Механика деформируемых тел. Избранные труды. Киев : “Наукова думка”, 1979. – 466 с.
12. Young, W.C. and Buynas, R.G. (2002), Roark's Formulas for Stress and Strain. Seventh Edition. McGraw-Hill. 852 p.
13. Johnson, K.L. (1985), Contact mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain.
14. Ciavarella, M., Baldini, A., Barber, J.R. and Strozzi, A. (2006), Reduced dependence on loading parameters in almost conforming contact. Int. J. Mech. Sci., 48, pp. 917–925
15. De Jong, T. (1977), Stresses around pin-loaded holes in elastically orthotropic or isotropic plates. J. Compos. Mater. vol. 11. pp. 313–331.
16. Болотин В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин, Ю.Н. Новичков. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
17. Milton Graeme W. (2004), The Theory of Composites. Cambridge University Press. 719 p.
18. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. К., 2011. – 317 с. <http://www.cad.dp.ua/stats/FEMAP-102.php>
19. Дифучин Ю.М. Чисельне моделювання болтових з'єднань з ПКМ. Повідомлення 1. Створення змішаних 3D-моделей / Ю.М. Дифучин, К.М. Рудаков // Вісник НТУУ “КПІ”. Сер. машинобудування. №2(77), 2016. – С. 100–107. <https://doi.org/10.20535/2305-9001.2016.77.76975>
20. Рудаков К.Н. К определению модулей упругости пластины с однонаправленным армированием высокомодульным углеродным волокном материала / К.Н. Рудаков, В.Н. Маслей // Mechanics and Advanced Technologies. #3(87), 2019. – С. 7–15. DOI: 10.20535/2521-1943.2019.87.189220
21. Рудаков К.Н. Коэффициент концентрации напряжений у контактирующего с болтом нагруженного отверстия в монослое ортотропного композиционного материала / К.Н. Рудаков, Ю.Н. Дифучин, С.А. Бабиенко // Mechanics and Advanced Technologies #1(85), 2019. – С. 41–48. <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2019.85.155702>
22. Waszczak, J.P. and Cruse, T.A. (1971), Failure mode and strength predictions of anisotropic bolt bearing specimens. J. Compos. Mater. vol. 5. pp. 421–425.
23. Zhang, K. and Ueng, C. (1985), Stresses around a pin-loaded hole in orthotropic plates with arbitrary loading direction. Compos. Struct. vol. 3. pp. 119–143.
24. Echavarría, C., Haller, P. and Salenikovich, A. (2007), Analytical study of a pin-loaded hole in elastic orthotropic plates. Composite Structures. vol. 79. pp. 107–112, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.11.038>
25. Pilkey, W.D. and Pilkey, D.F. (2008), Peterson's Stress Concentration Factors. Third Edition. John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey, Canada.
26. Теория упругости анизотропного тела. Изд. 2-е. / С.Г. Лехницкий. – М. : Главная редакция физ-мат. лит-ры изд-ва “Наука”, 1977. – 416 с.

Експрес-оцінка коефіцієнта концентрації напружень біля навантаженого болтом круглого отвору в пластині із шаруватого полімерного композиційного матеріалу. Вплив схеми армування

К. М. Рудаков, Ю. М. Дифучин

Проблематика. Серед різних варіантів з'єднань деталей із шаруватих полімерних композиційних матеріалів (ПКМ) значний відсоток займають болтові з'єднання (БЗ). Для їх правильного проектування необхідно, зокрема, проводити розрахунки на міцність. При цьому бажано замінювати складні скінчено-елементні розрахунки на експрес-аналіз: розрахунки за простими формулами достатньої точності. Один з основних розрахунків на міцність БЗ - розрахунок на розрив перетину, ослабленого отвором. Для БЗ пластин з ПКМ це питання опрацьовано недостатньо.

Ціль дослідження. Встановлення характеру і ступеня впливу схеми укладання моношарів пластини з шаруватого ПКМ на величину коефіцієнта концентрації напружень (ККН) біля отвору, навантаженого болтом.

Методика реалізації. Були проведені чисельні розрахунки із застосуванням методу скінчених елементів (контактна задача) для БЗ пластини з шаруватого ПКМ. Передбачалася 3D-ортотропія кожного моношару. Перевірялися дві прості

формули експрес-аналізу. Бувалися графіки, виявлялися наявність і ступінь впливу схеми укладання моношарів пластини з шаруватого ПКМ на зміну значень ККН біля навантаженого болтом отвору в ослабленому отвором перетині пластини.

Результати дослідження. За результатами розрахунків отримані числові оцінки, що характеризують ступінь впливу схеми укладання моношарів в пластині з шаруватого ПКМ і точність розглянутих формул.

Висновки. Проведені розрахунки показали, що зміна схеми армування шаруватого ПКМ призводить до істотної зміни значень ККН біля навантаженого болтом отвору в ослабленому отвором перетині пластини; що запропонована апроксимація (17) має недостатню точність для розглянутих матеріалів і схем укладання моношарів. Необхідне продовження пошуків поправочної функції для (15) на більш широкій розрахунково-експериментальній базі властивостей ПКМ.

Ключові слова: полімерний композиційний матеріал; болтове з'єднання; коефіцієнт концентрації напружень

Express estimation of stress concentration factor near the hole loaded with a bolt in a plate from a layered polymeric composite material. Impact of monolayers stacking sequence

Konstantin Rudakov, Yury Dyfuchyn

Problematic. Among the various options for joining parts from layered polymer composite materials (PCM), a significant percentage is bolted joints (BJ). For their proper design, it is necessary, in particular, to carry out strength calculations. In this case, it is desirable to replace complex finite element calculations with express analysis: calculations using simple formulas of sufficient accuracy. One of the main strength calculations of BJ is the calculation of tensile strength of the section weakened by the hole. For BJ plates made from PCM, this question has not been worked out enough.

Research objective. Establish of the impact degree of the monolayers stacking sequence of a PCM plate on the value of the stress concentration factor (SCF) near the hole loaded with a bolt.

Realization technique. Numerical calculations were carried out using the finite element method (contact problem) for a BJ plate made of layered PCM. A 3D-orthotropy of each monolayer was assumed. Two simple express analysis formulas were tested. Diagrams were built, the presence and impact degree of the monolayers stacking sequence in a laminated PCM plate on the change of the SCF values were established.

The results of research. Based on the calculation results, numerical estimates are obtained that characterize the impact degree of the monolayers stacking sequence in a laminated PCM plate and the accuracy of the considered formulas.

Conclusions. The calculations showed that change of the monolayers stacking sequence of the layered PCM leads to a significant change of the SCF values near the bolt-loaded hole in the plate section weakened by the hole; that the proposed approximation (17) has insufficient accuracy for the considered materials and monolayers stacking sequences. It is necessary to continue the search for the correction function for (15) on a wider calculation and experimental base of PCM properties.

Keywords: polymer composite material; bolted joints; stress concentration factor

References

1. Karpov, Ya.S. (2006), *Soedineniya detalei i agregatov iz kompozitsionnykh materialov* [Junctions of details and units from composite materials], Nats. aerokosm. un-t "Khar'k. aviats. in-t", Khar'kov, Ukraine.
2. Vasilevskii, E.T., Dveirin, A.Z., Karpov, Ya.S. and Krivenda, S.P. (2010), "System of experimental support for strength calculation of composites mechanical joints", *Otkrytye informatsionnye i komp'yuternye integrirovannye tekhnologii, NAKU "KhAI"*, no. 47. pp. 42–52.
3. Kirkach, A.B. (2011), "Problemy prochnosti boltovykh soedinenij na osnove sloistyh kompozitsionnykh plastikov" [Strength problems of bolted joints on the basis of layered composites], *Vestnik HPI. Serija "Dinamika i prochnost' mashin"*, no. 63. pp. 45–54.
4. ECSS-E-HB-32-20. Part 1A. Structural materials handbook – Part 1: Overview and material properties and applications. (2011), available at : http://www.ecss.nl/wp-content/uploads/handbooks/ecss-e-hb/ECSS-E-HB-32-20_Part1A.pdf
5. ECSS-E-HB-32-20, Part 2A. Structural materials handbook – Part 2: Design calculation methods and general design aspects. (2011), available at : http://www.ecss.nl/wp-content/uploads/handbooks/ecss-e-hb/ECSS-E-HB-32-20_Part2A.pdf
6. Dvejrjn, A.Z. (2014), "Review and analysis of problem state of experiment-calculated support of design of aircraft units from polymer composites with mechanical junction of parts", *Otkrytye informacionnye i komp'yuternye integrirovannye tekhnologii*, no. 66, pp. 5–19.
7. Gagauz, P.M., Gagauz, F.M., Karpov, Ya.S. and Krivenda, S.P. (ed.) (2015), "Proektirovanie i konstruirovaniye izdelii iz kompozitsionnykh materialov praktika", [Projection and constructing of articles from composite materials. The theory and practice], Nats. aerokosm. un-t im. N.E. Zhukovskogo "Khar'k. aviats. in-t". Kharkov, Ukraine.
8. Grover, H.J. (1966), *NAVAIR 01-1A-13. Fatigue of Aircraft Structures*. NAVAL Air Systems Command Department of the NAVY.
9. Reshetnikova, R.Y. (2013), "Vlijanie oseвого natjaga na lokal'noe naprjazhennoe sostojanie v odnosreznykh boltovykh soedinenijah" [Influence of an axial tightness on a local stresses condition in single-shear bolted joints], *Voprosy proektirovanija i proizvodstva konstrukcij letatel'nyh apparatov*, sb. nauch. tr. *Nac. ajerokosm. un-ta im. N.E. Zhukovskogo "HAI"*, vol. 1, no. 73, pp. 87–99.

10. Rudakov, K. and Dyfuchyn, Y. (2018), "About calculations of net-tension failure of a bolted joint on the weakened by hole cross-section of composite plate", *Mechanics and Advanced Technologies*, vol. 82, no. 1, pp. 58–66. <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2018.82.121050>
11. Savin, G.I. (1979), *Mekhanika deformiruemyykh tel. Izbrannyye trudy* [Mechanics of deformable bodies. The Selected transactions], Naukova dumka, Kiev, Ukraine.
12. Young, W.C. and Buynas, R.G. (2002), *Roark's Formulas for Stress and Strain. Seventh Edition*, McGraw-Hill.
13. Johnson, K.L. (1985), *Contact mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, Great Britain.
14. Ciavarella, M., Baldini, A., Barber, J.R. and Strozzi, A. (2006), Reduced dependence on loading parameters in almost conforming contact. *Int. J. Mech. Sci.*, 48, pp. 917–925.
15. De Jong, T. (1977), Stresses around pin-loaded holes in elastically orthotropic or isotropic plates, *J. Compos. Mater.* vol. 11, pp. 313–331.
16. Bolotin, V.V. and Novichkov, Ju.N. (1980), *Mehanika mnogoslojnyh konstrukcij* [Mechanic of multilayered structures], Mashinostroenie, Moscow, Russia.
17. Milton Graeme W. (2004), *The Theory of Composites*. Cambridge University Press.
18. Rudakov, K.N. (2011), FEMAP 10.2.0. *Geometricheskoe i konechno-elementnoe modelirovanie konstruktsii* [Geometrical and FEM of designs], Kiev, Ukraine, available at : <http://www.cad.dp.ua/stats/FEMAP-102.php>
19. Dyfuchyn, Y.N. and Rudakov, K.N. (2016), "Numerical Modelling of Bolted Joints from Composite. The Message 1. Creation of the Mixed 3D-Models", *Journal of Mechanical Engineering NTUU "Kyiv Polytechnic Institute"*, vol. 77, no. 2, pp. 100–107, <https://doi.org/10.20535/2305-9001.2016.77.76975>
20. Rudakov, K. and Maslyey, V. (2019) "To definition of elasticity modules of plate from unidirectional high-modules carbon fibre", *"Mechanics and Advanced Technologies"*, vol. 87, no. 3, pp. 7–15,
21. Rudakov, Konstantin, Dyfuchyn, Yury and Babienko, Sergey (2019), "Stress concentration factor near loaded hole contacting with the bolt in the monolayer of orthotropic composite material", *Mechanics and Advanced Technologies*, vol. 85, no. 1, pp. 41–48, <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2019.85.155702>
22. Waszczak, J.P. and Cruse, T.A. (1971), Failure mode and strength predictions of anisotropic bolt bearing specimens. *J. Compos. Mater.*, vol. 5. pp. 421–425.
23. Zhang, K. and Ueng, C. (1985), Stresses around a pin-loaded hole in orthotropic plates with arbitrary loading direction. *Compos. Struct.* vol. 3. pp. 119–143.
24. Echavarría, C., Haller, P. and Salenikov, A. (2007), Analytical study of a pin-loaded hole in elastic orthotropic plates, *Composite Structures*, vol. 79. pp. 107–112, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.11.038>
25. Pilkey, W.D. and Pilkey, D.F. (2008), *Peterson's Stress Concentration Factors*. Third Edition, John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey, Canada
26. Lehnickij, S.G. (1977), *Teorija uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of isotropic elasticity], 2nd ed., Glavnaja redakcija fizmat. lit-ry izd-va "Nauka", Moscow, Russia.