

# Реалізація оптимальних енергетичних переміщень робочого органу дволанкового маніпулятора за параболоїдною траєкторією

В. С. Ловейкін<sup>1</sup> • Д. О. Міщук<sup>2</sup> • Є. О. Міщук<sup>2</sup>

Received: 23 February 2022 / Accepted: 30 May 2022

**Анотація.** Інтенсивне розповсюдження автоматизованих і роботизованих систем в будівельній промисловості ставить ряд проблемних і не вирішених задач, пов'язаних з ефективністю і надійністю їхнього використання, а саме зниження динамічних навантажень у елементах конструкції роботів і маніпуляторів, зниження енерговитрат на виконання заданого процесу роботизованою системою. Особлива увага приділяється якості керування, зокрема в обмеженому робочому просторі при переміщенні робочих органів маніпуляторами з гідроприводом, які є домінуючими в будівництві.

**Проблематика:** Для зварювання металоконструкцій або при укладанні елементів будівлі із застосуванням маніпуляційних систем, технологія виконання таких робіт передбачає застосування задач переміщення спеціальних робочих органів по параболічній траєкторіям. Для реалізації поставлених завдань маніпуляторами, необхідно визначити закони керування для системи приводу. Одним зі шляхів пошуку потрібних функцій для системи керування є застосування оптимізаційних задач за енергетичними критеріями і накладеними геометричними обмеженнями.

**Мета:** Розробити і дослідити режими руху привідного механізму гідравлічного маніпулятора з реалізацією енергоємного режиму роботи механічної системи на заданому просторі переміщення робочого органу за гіперболічною траєкторією.

**Методика реалізації:** Для реалізації поставленої мети дослідження запропоновано використати оптимізаційну задачу мінімізації енерговитрат в стріловій системі дволанкового маніпулятора на заданій параболічній траєкторії переміщення його робочого органу і обмеженому робочому просторі. В даній роботі розглядається задача умовної оптимізації, де обмеження робочого простору накладаються умовами руху робочого органу та граничними обмеженнями на переміщення виконавчих механізмів. Цільову функцію оптимізації сформовано у виді рівняння Лагранжа зі складовими енерговитрат та рівняння параболі, що задає переміщення захоплювача маніпулятора.

**Результати:** Для реалізації оптимального керування дволанковим маніпулятором на заданій параболічній траєкторії, необхідно визначити екстремалі функціоналу цільової функції у виді рівняння Лагранжа за складовими, які в даному дослідженні були згортка залежності енерговитрат та заданого рівняння траєкторії переміщення робочого органу. Рішення мінімуму цільової функції отримано в числовому виді на основі чого визначено вид полінома аналітичної залежності узагальнених координат від зміни часу.

**Висновки:** В подальших дослідженнях бажано розглянути критерії які б враховували різні силові навантаження, зокрема середньоквадратичне значення привідного зусилля та інтенсивність його зміни в часі, а також потрібно розробити функції поліномів, який можна буде виражати числові рішення оптимізаційних задач.

**Ключевые слова:** маніпулятор; функція Лагранжа; метод множників Лагранжа; оптимізація; енерговитрати; керування.

## Вступ

Сучасне будівельне виробництво для забезпечення конкурентоздатності потребує застосування роботизованих і автоматизованих системи, зокрема багатофункціональних роботів-маніпуляторів [1]. Промис-

лові роботи можуть застосовуватися для автоматизації задач складання конструкцій, переміщення вантажів і матеріалів, зварювання, точного різання матеріалів, фасування, фарбування та інших робіт [2]. Такі системи здатні виконувати роботу протягом багатьох годин з мінімальними похибками, не втрачаючи ефективності та надійності [3, 4]. Таким чином, необхідно вивчати, покращувати, вміти перепрограмувати та адаптувати такі системи до різних сценаріїв задля отримання максимальної користі.

Гідравлічні маніпулятори мають великі перспективи в будівельному виробництві, так як дозволяють отримати великі робочі зусилля на своїх виконавчих

✉ Д. О. Міщук  
mischuk.do@kntuba.edu.ua

<sup>1</sup> Національний університет біоресурсів та природокористування України, м. Київ, Україна;

<sup>2</sup> Київський національний університет будівництва і архітектури, м. Київ, Україна

пристроях у порівнянні із системами на пневматичному або електромеханічному приводі [5, 6]. Одним з недоліків гідравлічних маніпуляторів є їхня складна динамічна завантаженість, що призводить до виникнення в привідних елементах подібних систем додаткових динамічних зусиль. Компенсація таких навантажень виконується системою керування, яка працює не завжди адекватно на заданих умовах роботи маніпулятора [7]. Інша актуальна проблематика дослідження маніпуляторів пов'язана з розв'язками зворотної кінематичної задачі, зокрема в пошуку функції залежності координат положення виконавчих механізмів від координат захоплювача [8, 9]. В більшості відомих досліджень вивчається одна з описаних проблем маніпуляторів [10–14] і майже не розглядається їх спільна енергетична взаємодія.

Проведені раніше дослідження дозволили розробити механізми для зменшення динамічних навантажень на ланки маніпулятора, застосовуючи оптимізовані режими руху [7, 15]. Практична реалізація подібних рішень здійснюється гідросистемою за допомогою дросельного керування [7], проте такий підхід не враховував вимог на траєкторію переміщень.

Пошук потрібних режимів руху маніпулятора із забезпеченням якісних характеристик здійснюється за допомогою оптимізаційних задач. В даному дослідженні пропонується методика визначення оптимальних режимів руху механічної системи маніпулятора з двома рухомими ланками з урахуванням обмежень на траєкторію переміщення його робочого органу.

### Огляд існуючих досліджень

Фундаментальні підходи по оптимізації руху механізмів вантажопідійомних машин наведено в роботах фахівців з Харківського політехнічного університету та Київського державного технічного університету будівництва і архітектури (наразі Київський національний університет будівництва і архітектури) [16], суть яких полягає у формуванні функції оптимізації на основі критеріальних дій, які б визначалися через параметри системи і представлялися у вигляді інтегралів з підінтегральними виразами, що характеризували б якість механічної системи машини. В якості таких критеріїв можуть бути силові фактори або енергетичні витрати, необхідні на виконання деякого процесу механізмом вантажопідійомної машини. Якісний розрахунок маніпуляційних систем роботів авторами не розглянуто.

В дослідженнях [17, 18] показано, що в якості критерію динамічного довершення для оцінки маніпуляторів можуть застосовуватися динамічні рівняння руху, побудовані з використанням принципів Даламбера та Даламбера-Лагранжа. Такий підхід дозволяє враховувати інерційні властивості ланок стрілової системи будь-якої вантажопідійомної машини,

розглядаючи її, як голономну систему із зосередженими масами.

Задача локальної оптимізації за критерієм швидкодії та економічності переміщення ланок маніпулятора, а також багатокритеріальну геометричну оптимізацію розглянуто в роботі [19], проте автори в якості критерію застосовують коефіцієнт оцінки об'єму робочого простору для виконання робочого процесу та коефіцієнт сервісу маніпулятора, приймаючи припущення, що чим менший об'єм буде подолано ланками механічної системи маніпулятор, тим менше енерговитрат необхідно буде прикласти на реалізацію такого переміщення, а це не завжди так.

Оптимізація руху ланок гідроманіпуляторів на основі енергетичних витрат в елементах стрілової системи та приводі розглянуто раніше в роботах [7, 20], проте авторами не враховано обмежень на траєкторію переміщення робочого органу, зокрема в стиснених умовах роботи маніпулятора.

### Мета роботи

Розробити механізми визначення оптимального режиму руху маніпулятора з гідроприводом, який враховуватиме енергетичні витрати механічної системи при переміщенні вантажу по заданій параболоїдній траєкторії та проаналізувати отримані рішення кінематичних параметрів.

Предметом дослідження розглядається кінематичні та силові параметри стрілової системи маніпулятора, а об'єктом дослідження прийнято тримасову систему, враховуючи вантаж з двома узагальненими незалежними координатами переміщення.

### Методика дослідження

В даному дослідженні розглядається одна із оптимізаційних задач, де в якості цільової функції прийнято інтегральний критерій з підінтегральним виразом, який відображає енергію витрат механічної стрілової системи маніпулятора з урахуванням обмежувальної функції траєкторії переміщення робочого органу маніпулятора по параболі. Для розв'язку даної задачі умовної оптимізації руху стріли маніпулятора з двома узагальненими незалежними координатами пропонується розглянути застосування прямого методу із заміною параметра та методом множників Лагранжа [4].

При оптимізації за методом із заміною параметра, цільова функція пошуку в загальному випадку записується через параметри маніпулятора в якій переміщення його робочого органу визначено з урахуванням заданої траєкторії руху робочого органу [16]:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f(Q_1 \dots Q_i \dots Q_z, \dot{Q}_1 \dots \dot{Q}_i \dots \dot{Q}_z, \dots, Q_1^{(n)} \dots Q_i^{(n)} \dots Q_z^{(n)}, t) dt, \quad (1)$$

де  $t$  – час;  $t_0, t_1$  – відповідно час пуску та час гальмування системи;  $z$  – кількість узагальнених координат;  $n$  – порядок диференціювання.

Екстремаль функціоналу (1) будуть інтегральні криві Ейлера-Пуассона [7, 16]:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial Q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{Q}_1} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial f}{\partial \dot{Q}_1^n} = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{Q}_i} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial f}{\partial \dot{Q}_i^n} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для методу множників Лагранжа цільова оптимізаційна функція, яка досліджувалася на пошук умовного екстремуму записується наступним чином [21]:

$$L = f(Q_1, \dots, Q_i, \dots, Q_z, \dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_i, \dots, \dot{Q}_z, t) + \sum_{j=1}^n \lambda_j \phi(x, y), \quad (3)$$

де  $\lambda_j$  – множники Лагранжа;  $f(Q_1, \dots, Q_i, \dots, Q_z, \dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_i, \dots, \dot{Q}_z, t)$  – рівняння критерію, який оцінює енергетичні витрати механічної системи маніпулятора;  $\phi(x, y)$  – рівняння, яке визначає геометричні обмеження переміщення робочого органу.

Умови мінімуму такого критерію також визначено на основі рівнянь Ейлера-Пуассона [16]:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial Q_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_1} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_1^n} = 0, \quad i=1, \dots, z; \\ \frac{\partial L}{\partial Q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_i^n} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j=1, \dots, k, \end{cases} \quad (4)$$

де  $k$  – кількість обмежуючих рівнянь.

Для визначення екстремальних кривих, які забезпечуватимуть виконання системи рівнянь (3) та (4) необхідно:

1. сформулювати граничні умови переміщення маніпулятора, які для даних системи диференціальних рівнянь приймаються крайовими умовами;
2. для системи (4) визначити залежності множників Лагранжа враховуючі які на основі варіаційного числення знайти рішення системи (4).

### Результати проведених досліджень

Розглянемо динамічну модель руху стрілової системи маніпулятора з однією шарнірною та однією призматичною кінематичними парами п'ятого класу (показано на рис. 1). Досліджувана модель містить ланку  $OA$  (стріла) масою  $m_1$ , яка обертається навколо своєї нерухомої шарнірної осі в точці  $O$  та ланку  $AK$

(рукоять) масою  $m_2$ , яка з'єднана з ланкою  $OA$  через призматичний шарнір в точці  $A$ . В точці  $K$  розміщується вантаж масою  $m_b$ , що переміщується разом із захоплювачем. Поворот ланки  $OA$  разом з ланкою  $AK$  та вантажем виконується гідроциліндром  $1$ , маса якого не враховуватиметься в подальших міркуваннях. Переміщення ланки  $AK$  відносно ланки  $OA$  здійснюється гідроциліндром  $2$  масою якого також знехтувано. Центр мас ланок  $OA$  та  $AK$  зосереджено в їх геометричних центрах, а деформація ланок до уваги не приймається. За узагальнені координати прийнято кут  $Q_1$  повороту стріли разом з рукояттю і лінійне переміщення  $Q_2$  рукояті вздовж стріли.

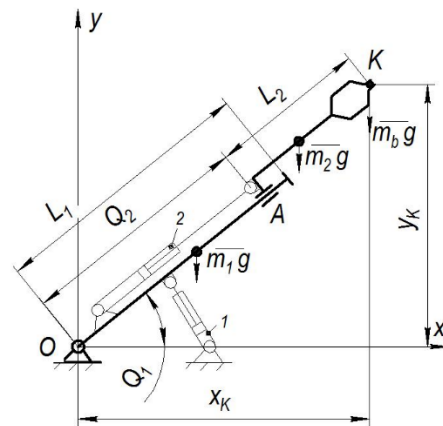


Рис. 1. Кінематична схема дволанкового маніпулятора з однією кутовою та однією лінійною кінематичними парами

Розглянемо задачу переміщення точки  $K$  захоплювача по деякій відомій параболічній траєкторії, яка описується наступним рівнянням:

$$y_K - x_K^2 = 0, \quad (5)$$

де  $x_k$  та  $y_k$  – координати робочого органу (захоплювача) маніпулятора.

Зазначимо відразу, що рівняння (5) на перший погляд є не узгодженим, тобто розмірність однієї складової рівняння не відповідає розмірності другої складової. Дане припущення не помилкове, а відображає особливість траєкторії руху робочого органу, тобто зміна однієї координати відображається зростанням величини іншої в квадраті. В подальшому це також буде відображено в цільових функціях оптимізації.

Для розглядуваної схеми визначено координати точки  $K$  через параметри механічної системи маніпулятора наступним чином:

$$y_k = (Q_2 + L_2) \sin Q_1; \quad (6)$$

$$x_k = (Q_2 + L_2) \cos Q_1, \quad (7)$$

де  $Q_1$  – кут повороту стріли від горизонтальної осі шарніра кріплення стріли;  $Q_2$ ,  $L_2$  – відповідно, лінійне переміщення висувної рукояті  $AK$  та її довжина.

Якщо вирази (6) та (7) підставити в рівняння (5), отримаємо:

$$(Q_2 + L_2) \sin Q_1 - (Q_2 + L_2)^2 \cos^2 Q_1 = 0. \quad (8)$$

Так як в даній задачі цікавим буде випадок одночасного переміщення ланок стріли маніпулятора за двома узагальненими координатами, тобто  $Q_2 \neq 0$  і повинно бути змінною, а отже

$$Q_2 = \frac{\tan Q_1}{\cos Q_1} - L_2. \quad (9)$$

З виразу (9) також отримаємо додаткове обмеження на кут, тобто  $Q_2 \neq \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{R}$ .

Складовими кінетичної енергії розглядуваної стрілової системи будуть кінетична енергія стріли  $E_{k1}$ , рукояті  $E_{k2}$  і вантажу  $E_{k3}$ .

$$E_k = E_{k1} + E_{k2} + E_{k3}. \quad (10)$$

В даному дослідженні прийнято, що всі ланки стріли маніпулятора мають форму стрижнів постійного перерізу, тоді залежність кінетичної енергії для такої системи матиме наступний вид

$$E_k = \left( \frac{1}{2} (J_{OA} + J_{AK}) \dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_b (\dot{x}_K^2 + \dot{y}_K^2) \right), \quad (11)$$

де  $J_{OA} = \frac{1}{3} m_1 L_1^2$  – момент інерції поворотної стріли відносно осі повороту в точці  $O$ ;

$J_{AK} = \frac{1}{3} m_2 (L_2^2 + 3L_2 Q_2 + 3Q_2^2)$  – момент інерції рукояті відносно точки повороту  $O$ ;  $L_1$  – довжина стріли  $OA$ ;  $\dot{x}_2$ ,  $\dot{y}_2$ ,  $\dot{x}_K$ ,  $\dot{y}_K$  – складові швидкості центра мас рукояті та вантажу за відповідними координатами.

Динамічні рівняння руху розглядуваної механічної системи маніпулятора можуть бути визначені з рівнянь Лагранжа другого роду:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{Q}_1} - \frac{\partial E_k}{\partial Q_1} = M_1 - \frac{\partial y_1}{\partial Q_1} - \frac{\partial y_2}{\partial Q_1} - \frac{\partial y_K}{\partial Q_1}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{Q}_2} - \frac{\partial E_k}{\partial Q_2} = F_2 - \frac{\partial y_2}{\partial Q_2} - \frac{\partial y_K}{\partial Q_2}, \end{cases} \quad (12)$$

де  $M_1$ ,  $F_2$  – обертальний момент, який створює гідроциліндр підймання стріли та зусилля на штоку привідного гідроциліндра висувної рукояті.

Координати вертикалей центру мас ланок розглядуваної стрілової системи маніпулятора:

– для стріли  $OA$

$$y_1 = \frac{1}{2} L_1 \sin Q_1, \quad (13)$$

– для висувної рукояті  $AK$

$$y_2 = \left( \frac{1}{2} L_2 + Q_2 \right) \sin Q_1; \quad (14)$$

– для вантажу

$$y_K = (L_2 + Q_2) \sin Q_1. \quad (15)$$

Підставивши в систему рівнянь (12) залежності кінетичної енергії (11) і складові координат центрів мас ланок стріли та виконавши диференціювання за узагальненими координатами, отримано рівняння динамічного моменту та сили на привідних механізмах маніпулятора:

$$\begin{aligned} M_1 = & 2L_2(m_2 + m_b) \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 + \ddot{Q}_1 (2m_2 + m_b) Q_2^2 + \\ & + (m_2 + m_b) \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 + \frac{1}{12} (6g(L_1 m_1 + L_2(m_2 + 2m_b)) \cos Q_1 + \\ & + (4L_1^2 m_1 + L_2^2 (7m_2 + 12m_b)) \ddot{Q}_1 + \\ & + Q_2 (2(2m_2 + m_b) \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 + \\ & + (m_2 + m_b)(g \cos Q_1 + 2L_2 \ddot{Q}_1)); \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} F_2 = & -(L_2(m_2 + m_b) + (2m_2 + m_b) Q_2) \dot{Q}_1^2 + \\ & + (m_2 + m_b)(g \sin Q_1 + \ddot{Q}_2). \end{aligned} \quad (17)$$

Використовуючи знайдену залежність кінетичної енергії (11), визначено цільову оптимізаційну функцію руху ланок маніпулятора у наступному виді

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{1}{2} (J_{OA} + J_{AK}) \dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_b (\dot{x}_K^2 + \dot{y}_K^2) \right) dt \rightarrow \min. \quad (18)$$

Враховуючи рівняння (9), визначено координати вантажу через узагальнену координату повороту стріли маніпулятора:

$$x_k = \tan Q_1; \quad y_k = \tan^2 Q_1. \quad (19)$$

Складові швидкості вантажу за умови його переміщення за заданою параболічною траєкторією (5):

$$\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt} = \frac{1}{\cos^2 Q_1} \dot{Q}_1; \quad \dot{y}_k = \frac{dy_k}{dt} = \frac{2 \tan Q_1}{\cos^2 Q_1} \dot{Q}_1, \quad (20)$$

Аналогічно, складові швидкості руху центра мас висувної лани  $AK$  визначено шляхом диференціювання його координат переміщення з урахуванням траєкторії руху (5)

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \frac{dx_2}{dt} = \left( \frac{1}{\cos^2 Q_1} + \frac{L_2 \sin Q_1}{2} \right) \dot{Q}_1, \\ \dot{y}_2 &= \frac{dy_2}{dt} = \left( \frac{2 \tan Q_1}{\cos^2 Q_1} - \frac{L_2 \cos Q_1}{2} \right) \dot{Q}_1;\end{aligned}\quad (21)$$

$$\text{де } x_2 = \tan Q_1 - \frac{L_2 \cos Q_1}{2}; \quad y_2 = \tan^2 Q_1 - \frac{L_2 \sin Q_1}{2}.$$

Після підстановки виразів (20) та (21) в цільову функцію (18) остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned}I = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{768 \cos^6 Q_1} (40L_1^2 m_1 + 1008m_2 + 70L_2^2 m_2 + \\ + 960m_b + 3(20L_1^2 m_1 - 192(m_2 + m_b) + 35L_2^2 m_2) \cos(2Q_1) + \\ + 6(4L_1^2 m_1 - 8m_2 + 7L_2^2 m_2) \cos(4Q_1) + 4L_1^2 m_1 \cos(6Q_1) + \\ + 7L_2^2 m_2 \cos(6Q_1) - 96L_2 m_2 \sin(Q_1) - \\ - 144L_2 m_2 \sin(3Q_1) - \\ - 48L_2 m_2 \sin(5Q_1)) \dot{Q}_1^2 dt \rightarrow \min\end{aligned}\quad (22)$$

Застосовуючи рівняння Ейлера-Пуассона (2) для заданого функціоналу, отримаємо наступне диференціальне рівняння другого порядку, розв'язок якого задаватиме оптимальний режим руху за мінімум кінетичної енергії системи на заданій параболічній траєкторії переміщення вантажу:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{768 \cos^7 Q_1} (48(-3 + \cos(2Q_1))(3L_2 m_2 + \\ + 4L_2 m_2 \cos(2Q_1) + L_2 m_2 \cos(4Q_1) - 50m_2 \sin Q_1 \\ - 48m_b \sin Q_1 - 2m_2 \sin(3Q_1)) \dot{Q}_1^2 + \\ + 2 \cos Q_1 (40L_1^2 m_1 + 1008m_2 + 70L_2^2 m_2 + 960m_b + \\ + 3(20L_1^2 m_1 - 192(m_2 + m_b) + 35L_2^2 m_2) \cos(2Q_1) + \\ + 6(4L_1^2 m_1 - 8m_2 + 7L_2^2 m_2) \cos(4Q_1) + 4L_1^2 m_1 \cos(6Q_1) + \\ + 7L_2^2 m_2 \cos(6Q_1) - 98L_2 m_2 \sin Q_1 - \\ - 144L_2 m_2 \sin(3Q_1) - 48L_2 m_2 \sin(5Q_1)) \ddot{Q}_1 = 0.\end{aligned}\quad (23)$$

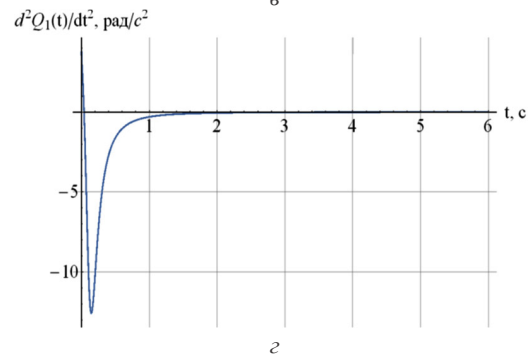
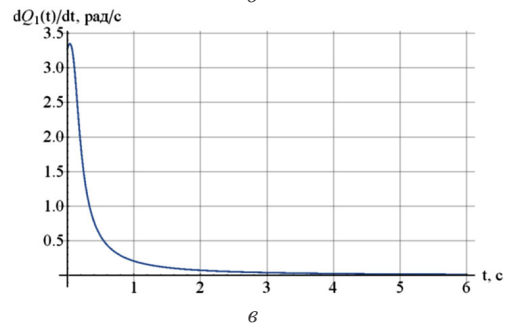
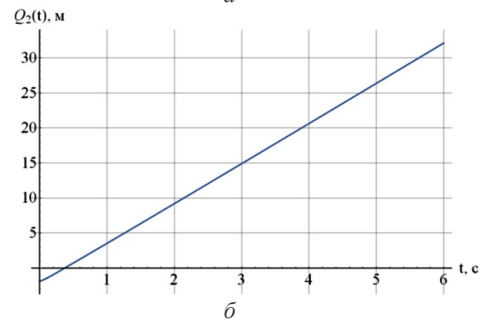
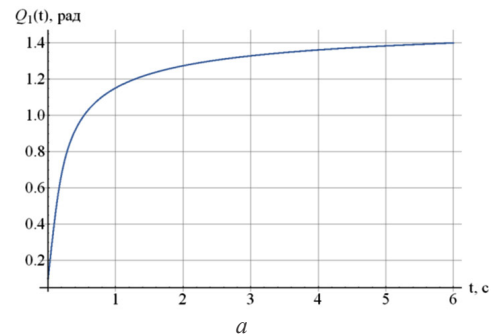
Аналізуючи отриману залежність, зазначимо, що в даному випадку достатньо визначити лише закон зміни кута повороту стріли маніпулятора, а переміщення висувної ланки вздовж стріли буде залежить від кута повороту.

Крайовими умовами руху системи для даного випадку будуть наступні:

$$\begin{cases} Q_1(t_0) = Q_{1n}; \\ Q_1(t_1) = Q_{1k}. \end{cases}\quad (24)$$

Для заданих параметрів маніпулятора  $m_1 = 200$  кг,  $m_2 = 500$  кг,  $m_b = 100$  кг,  $L_1 = 2$  м,  $L_2 = 2$  м,  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = 6$  с,  $Q_1(0) = 0,1$  рад.,  $Q_1(6) = 1,4$  рад., чисельним способом в системі Mathematica 10 отримано розв'язок рівняння (23). На рис. 2 показано графіки зміни

узагальнених координат досліджуваної схеми маніпулятора, які відображають рішення рівняння (23).



**Рис. 2.** Графік зміни кута повороту стріли (а), переміщення висувної рукояті відносного стріли (б), кутової швидкості (в) та кутового прискорення (г) стріли для оптимального швидкісного режиму руху вантажу за параболічною траєкторією

Розв'яжемо цю ж саму оптимізаційну задачу методом множників Лагранжа. Цільова функція оптимізації руху буде наступною:

$$L = \frac{1}{2} (J_{OA} + J_{AK}) \dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) +$$

$$+\frac{1}{2}m_b(\dot{x}_K^2 + \dot{y}_K^2) + \lambda(y_K - x_K^2) \rightarrow \min, \quad (25)$$

де  $x_2 = (\frac{L_2}{2} + Q_2) \cos Q_1$ ;  $x_K = (L_2 + Q_2) \cos Q_1$ .

Знайдено швидкості за відповідними координатами для рівняння (25):

$$\dot{x}_2 = \frac{x_2}{dt} = \dot{Q}_2 \cos Q_1 - \dot{Q}_1 (\frac{L_2}{2} + Q_2) \sin Q_1; \quad (26)$$

$$y_2 = \frac{y_2}{dt} = \dot{Q}_2 \sin Q_1 + \dot{Q}_1 (\frac{L_2}{2} + Q_2) \cos Q_1,$$

$$\dot{x}_K = \frac{x_K}{dt} = \dot{Q}_2 \cos Q_1 - \dot{Q}_1 (L_2 + Q_2) \sin Q_1; \quad (27)$$

$$\dot{y}_K = \frac{y_K}{dt} = \dot{Q}_2 \sin Q_1 + \dot{Q}_1 (L_2 + Q_2) \cos Q_1.$$

Пошук мінімум функції (25) еквівалентний розв'язку наступної системи рівнянь Ейлера:

$$\left\{ \begin{aligned} &L_2 \lambda \cos Q_1 + L_2^2 \lambda \sin(2Q_1) - 2L_2(m_2 + 2m_b) \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \\ &- (\frac{1}{3} L_1^2 m_1 \ddot{Q}_1 + \frac{7}{12} L_2^2 m_2 - L_2^2 m_b) \ddot{Q}_1 + \\ &+ Q_2 (\lambda \cos Q_1 (1 + 4L_2 \sin Q_1) - 2(2m_2 + m_b) \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \\ &- 2L_2(m_2 + 2m_b) \ddot{Q}_1) + \\ &+ Q_2^2 (\lambda \sin(2Q_1) - (2m_2 + m_b) \ddot{Q}_1) = 0; \\ &- L_2 \lambda - L_2 \lambda \cos(2Q_1) + \lambda \sin Q_1 + L_2(m_2 + m_b) \dot{Q}_1^2 \\ &+ Q_2 (-2\lambda \cos^2 Q_1 + (2m_2 + m_b) \dot{Q}_1^2 - \\ &- (m_2 + m_b) \ddot{Q}_2) = 0; \\ &(L_2 + Q_2) \sin Q_1 - \cos^2 Q_1 (L_2 + Q_2)^2 = 0. \end{aligned} \right. \quad (28)$$

З другого рівняння системи (28) знайдено коефіцієнт узгодження Лагранжа:

$$\lambda = - \frac{\ddot{Q}_2(m_2 + m_b) - L_2 \ddot{Q}_1^2(m_2 + m_b) - \dot{Q}_1^2 Q_2 (2m_2 + m_b)}{L_2 + L_2 \cos(2Q_1) + Q_2 2 \cos^2 Q_1 - \sin Q_1}. \quad (29)$$

Після підстановки коефіцієнта (21) в перше рівняння системи (20) та з урахування третього рівняння системи (20), отримано диференційне рівняння другого порядку відносно зміни кута повороту стріли, яке за змістом і формою аналогічне рівнянню (23). Таким чином розв'язок задачі переміщення робочого органу маніпулятора з вантажем по параболічній траєкторії з мінімумом кінетичної енергії методом множників Лагранжа, як і в попередній задачі аналогічний до рішення представленого графічно на рис. 2.

З графіків на рис. 2 відмітимо, що реалізувати оптимальний режим руху стріли маніпулятора за мінімумом витрат кінетичної енергії із забезпечення параболічної траєкторії переміщення вантажу можливо лише за умови, що на початку руху стріла матиме

деяку задану кутову швидкість руху та прискорення. Реалізувати практично такий підхід можливо лише для ділянки сталого руху. Результати за рис. 2 показують, що по при заданих граничних умовах руху, переміщення висувної рукояті відбуватиметься з положення для якого відносна координата має початкове від'ємне значення. Це вказує на те, що початкові умови руху потрібно вибирати обґрунтовано виходячи із заданої траєкторії переміщення робочого органу маніпулятора. Застосовуючи рівняння (9) зв'язку узагальнених координат, на рис. 3 представлено графічну залежність яка відображає характер взаємозв'язку між координатами кута повороту стріли та відносним переміщенням висувної рукояті маніпулятора. Довжина рукояті  $L_2$ , як видно з графіка, сильно не впливає на характер зміни координат  $Q_1$  та  $Q_2$ , а для реалізації параболоїдної траєкторії переміщення робочого органу маніпулятора при довжині його стріли  $L_2 = 2$  м початковий кут підйому повинен становити  $Q_{1n} = 0,9$  рад. При цьому мінімальне значення складає  $Q_{2n} = 0,027$  м, що допустимо для багатьох систем.

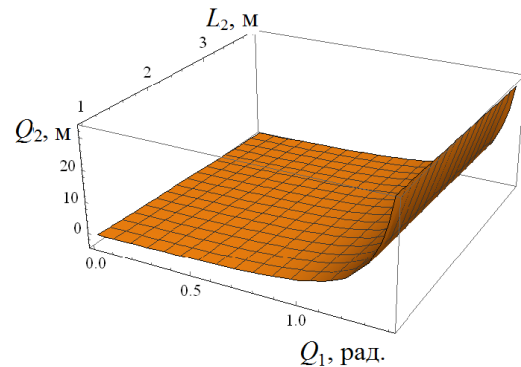


Рис. 3. Залежність зміни координати  $Q_1$  від  $Q_2$  та  $L_2$

Методом множників Лагранжа також досліджено оптимізаційну задачу з цільовою функцією оптимізації руху ланок досліджуваного маніпулятора у вигляді “енергії” прискорень [20] та параболічної обмежувальної траєкторії переміщення робочого органу:

$$L = \frac{1}{2} (J_{OA} + J_{AK}) \dot{Q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_b (\dot{x}_K^2 + \dot{y}_K^2) + \lambda (y_K - x_K^2) \rightarrow \min. \quad (30)$$

Крайові умови руху для розглядуваного випадку можуть бути записані в наступному виді:

$$\begin{cases} Q_1(t_0) = Q_{1n}, \dot{Q}_1(t_0) = 0; \\ Q_1(t_1) = Q_{1k}, \dot{Q}_1(t_1) = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Екстремальми функціоналу (30) будуть інтегральні криві наступного рівняння Ейлера-Пуассона:

$$\begin{cases}
 L_2 \lambda \cos Q_1 + L_2^2 \lambda \sin(2Q_1) - 2L_2(m_2 + 2m_b) \dot{Q}_1^3 \dot{Q}_2 + \\
 + (2m_2 \dot{Q}_2^2 - \frac{3}{2} L_2^2 (m_2 + 4m_b) \dot{Q}_1^2) \ddot{Q}_1 + \\
 + (4L_2 m_2 + 6L_2 m_b) \ddot{Q}_1 \ddot{Q}_2 + \\
 + 4L_2(m_2 + m_b) \dot{Q}_2 \ddot{Q}_1 + 2L_2(m_2 + 2m_b) \dot{Q}_1 \ddot{Q}_2 + \\
 + (\frac{1}{3} L_1^2 m_1 + \frac{7}{12} L_2^2 m_2 + L_2^2 m_b) \overset{IV}{Q}_1 + Q_2 (\lambda \cos Q_1 + \\
 + 2L_2 \lambda \sin(2Q_1) - 4(m_2 + m_b) \dot{Q}_1^3 \dot{Q}_2 - \\
 - 6L_2(m_2 + 2m_b) \dot{Q}_1^2 \ddot{Q}_1 + 2(4m_2 + 3m_b) \dot{Q}_1 \ddot{Q}_2 + \\
 + (8m_2 + 4m_b) \dot{Q}_2 \ddot{Q}_1 + 4(m_2 + m_b) \dot{Q}_1 \ddot{Q}_2 + \\
 + 2L_2(m_2 + m_b) \overset{IV}{Q}_1) + Q_2^2 (\lambda \sin(2Q_1) - \\
 - 6(m_2 + m_b) \dot{Q}_1^2 \ddot{Q}_1 + (2m_2 + m_b) \overset{IV}{Q}_1) = 0; \\
 -L_2 \lambda - L_2 \lambda \cos(2Q_1) + \lambda \sin Q_1 + \\
 + \frac{1}{2} L_2 (m_2 + 2m_b) \dot{Q}_1^4 - \\
 - L_2(m_2 + 3m_b) \ddot{Q}_1^2 - 6(m_2 + m_b) \dot{Q}_1^2 \ddot{Q}_2 - \\
 - 2\dot{Q}_1 (6(m_2 + m_b) \dot{Q}_2 \ddot{Q}_1 + L_2(m_2 + 2m_b) \ddot{Q}_1) - \\
 - Q_2 (2\lambda \cos^2 Q_1 - (m_2 + m_b) \dot{Q}_1^4 + \\
 + (2m_2 + 3m_b) \dot{Q}_1^2 + \\
 + 4(m_2 + m_b) \dot{Q}_1 \ddot{Q}_1) + (m_2 + m_b) \overset{IV}{Q}_2 = 0; \\
 (L_2 + Q_2) \sin Q_1 - \cos^2 Q_1 (L_2 + Q_2)^2 = 0.
 \end{cases} \quad (32)$$

Коефіцієнт узгодження Лагранжа з рівняння (24) дорівнюватиме:

$$\begin{aligned}
 \lambda = & \frac{1}{2(L_2 + L_2 \cos(2Q_1) + 2Q_2 \cos^2 Q_1 - \sin Q_1)} \times \\
 & \times (L_2(m_2 + 2m_b) + 2(m_2 + m_b)Q_2) \dot{Q}_1^4 - \\
 & - 24(m_2 + m_b) \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \ddot{Q}_1 - \\
 & - (2L_2 m_2 + 6L_2 m_b + 4m_2 Q_2 + 6m_b Q_2) \ddot{Q}_1^2 - \\
 & - 12(m_2 + m_b) \dot{Q}_1^2 \ddot{Q}_2 - (4L_2 m_2 + 8L_2 m_b + \\
 & + 8Q_2 m_2 + 8Q_2 m_b) \dot{Q}_1 \ddot{Q}_1 - 2(m_2 + m_b) \overset{IV}{Q}_2). \quad (33)
 \end{aligned}$$

Числові розв'язки системи диференціальних рівнянь (32) за граничних умов (31) у вигляді графічних залежностей представлено на рис. 4.

Як видно з представлених рафіків на рис. 4 динамічний режим руху дволанкового маніпулятора з переміщенням робочого органу по параболічній траєкторії може бути реалізований на заданій руху зі швидким розгоном та повільним гальмування механічної системи.

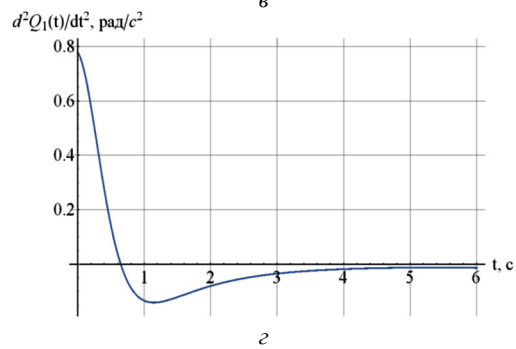
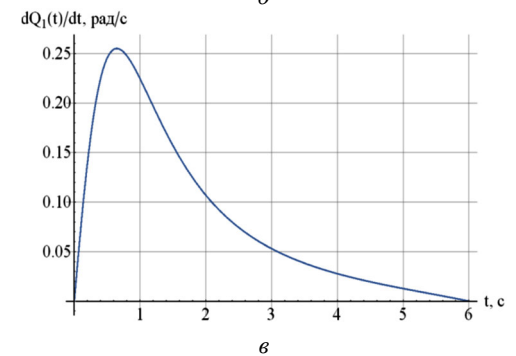
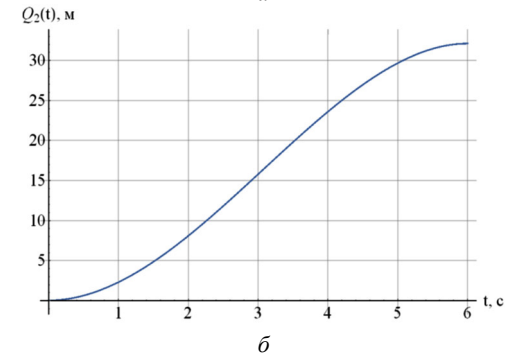
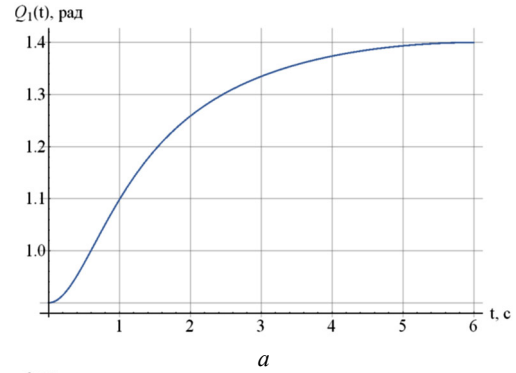


Рис. 4. Графік зміни кута повороту стріли (а), переміщення висувної рукояті відносного стріли (б), кутової швидкості (в) та кутового прискорення (г) стріли для оптимального динамічного режиму руху вантажу за параболічною траєкторією

### Обговорення результатів

Аналіз літературних джерел з проблем керування механічними системами показав, що запропонована методика оптимізації переміщень робочого обладнання маніпулятора методами варіаційного

числення може бути застосована для визначення режимів роботи приводних механізмів з реалізацією параболічних траєкторій руху робочого органу [7–9, 15].

Описаний підхід потрібно буде розвинути до застосування цільових оптимізаційних функцій у виді функціоналів, які містять диференціальні вирази високих порядків, що позитивно відобразатиметься на плавності руху стрілової системи маніпулятора.

Інтегрувати отримані системи диференціальні рівняння (23) і (33) відповідно для оптимального швидкісного та динамічного режимів руху аналітично практично не можливо, що ускладнює подальший аналіз отриманих числових залежностей на предмет визначення впливів зовнішніх чинників та типу траєкторії переміщення робочого органу на динаміку роботи стрілової системи маніпулятора. Реалізуючи розроблені режими роботи системи приводу маніпулятора системою керування потрібно знати залежність зміни узагальнених координат в часі, які пропонується визначати шляхом апроксимації розрахункових даних кута повороту стріли у вигляді поліномів.

Для оптимального швидкісного режиму руху найкраще підходить функція апроксимації:

$$Q_1(t) = a_1 t^{0,5} + a_2 t^{0,4}, \quad (34)$$

а для оптимального динамічного режиму руху:

$$Q_1(t) = a_0 + a_1 t^{0,2} + a_2 t^{0,4} + a_4 t^{0,5}, \quad (35)$$

де  $a_1, a_2, a_3, a_4$  – коефіцієнти, які визначаються на основі регресійного аналізу на вибірці отриманих даних для кута повороту  $Q_1$ .

В даному дослідженні застосовано функцію «NonlinearModelFit» системи Mathematica 10 за допомогою якої ітераційним шляхом підібрано коефіцієнти  $a_1, a_2, a_3$  і  $a_4$  (при кількості ітерацій 200). Остаточне рівняння (34) і (35) матимуть наступний вид:

$$Q_1(t) = 3,39071t^{0,4} - 2,2669t^{0,5}; \quad (36)$$

$$Q_1(t) = 0,9077 - 1,5391t^{0,2} + 3,9455t^{0,4} - 2,19007t^{0,5}. \quad (37)$$

Для порівняння на рис. 5 зображено порівняння графіків зміни кута повороту та кутової швидкості стріли маніпулятора, які побудовані для числового розв’язку та для апроксимуючих функцій за досліджуваними оптимальними режимами руху.

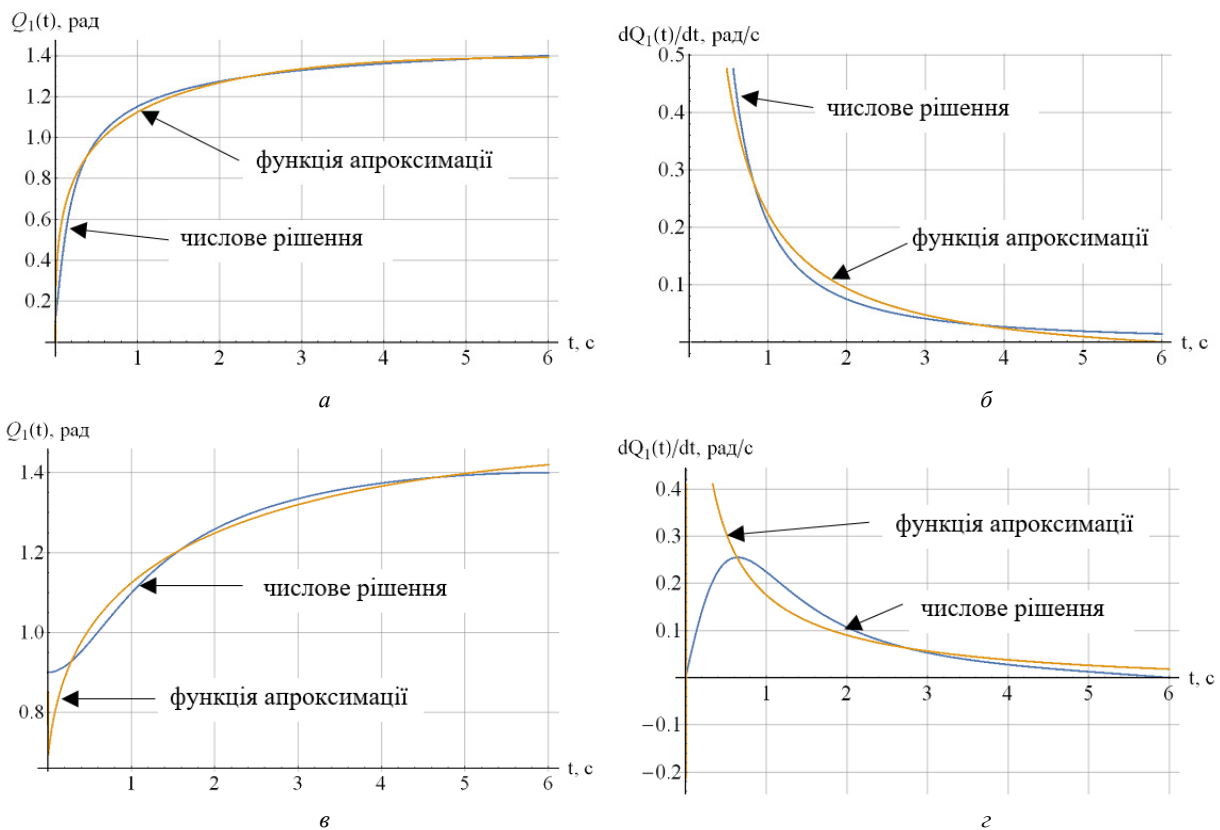


Рис. 5. Порівняння числових рішень з функціями апроксимації для оптимального швидкісного (а) та оптимального динамічного режимів руху маніпулятора



## Висновки

Розроблено оптимальні швидкісний та динамічний режими руху стріли дволанкового, які дозволяють реалізувати переміщення робочого органу по заданій параболічній траєкторії руху. Отримані числові рішення можуть бути реалізовані системою керування із застосуванням апроксимуючих функцій,

проте для точного керування необхідно детально дослідити властивості поліномів та сформувавши їх набір для кожного оптимального режиму руху.

В подальших дослідженнях бажано розглянути критерії які б враховували силове навантаження та інтенсивність його зміни в часі. Це важливо для розробки оптимальних режимів руху з мінімальними динамічними навантаженнями на систему приводу та елементи металокопструкції.

## References

- [1] D. Mishchuk, "The review and analysis of designs robots for construction works", *Girnichy, budivelni, dorozhni ta meliorativni mashini*, No. 82, pp. 28-37, 2013. <https://doi.org/10.26884/damu.a13827>
- [2] B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani & G. Oriolo, *Robotics: Modelling, Planning and Control*, (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing), 1st ed. 2009 ed., Springer, 2008. <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-642-1>
- [3] I. López, M. Castelan, F.J. Castro, M. Peña, R. Osorio. "Using object's contour, form and depth to embed recognition capability into industrial robots", *Journal of Applied Research and Technology*, 11, pp. 5–17, 2013, [http://dx.doi.org/10.1016/S1665-6423\(13\)71511-6](http://dx.doi.org/10.1016/S1665-6423(13)71511-6)
- [4] C. Urrea, J. Cortés, J. Pascal, "Design, Construction and control of a SCARA manipulator with 6 degrees of freedom", *Journal of Applied Research and Technology. JART*, Vol. 14, Issue 6, pp 396–404. <https://doi.org/10.1016/j.jart.2016.09.005>
- [5] Yu.A. Vilman, *Fundamentals of robotics in construction*, Moscow, High School, p. 271, 1989, ISBN 5-06-000483-X.
- [6] L.E. Pelevin, K.I. Pochka, O.M. Garkavenko, D.O. Mishchuk, I.V. Rusan, *Sintez robototekhnichnih sistem v mashinobuduvanni*, Kyiv, NVP Interservis, p. 28, 2016. ISBN 978-617-696-447-6.
- [7] V.S. Loveykin and D.O. Mishchuk, *Optimizaciya rezhimu zmini vilotu manipulyatora z gidroprivodom*. Monografiya, Kyiv, CP Komprint, p. 206, 2013. ISBN 978-617-7144-22-8.
- [8] S.M. Lavalle, *Planning algorithms*, Cambridge University Press, 2006. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511546877>
- [9] F. Blanchini, G. Fenu, G. Giordano, & F. Pellegrino, "A convex programming approach to the inverse kinematics problem for manipulators under constraints", *European Journal of Control*, 33, 11–23. 2017. <https://doi.org/10.1016/j.ejcon.2016.09.001>
- [10] J. Lenarčič, & B. Roth, *Advances in Robot Kinematics: Mechanisms and Motion (2006th ed.)*, Springer, 2006. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4941-5>
- [11] J. Jakubiak, K. Tchoń & W. Magiera, "Motion planning in velocity affine mechanical systems", *International Journal of Control*, 83(9), pp. 1965-1974, 2010. <https://doi.org/10.1080/00207179.2010.501390>
- [12] K. Tchon, "Optimal Extended Jacobian Inverse Kinematics Algorithms for Robotic Manipulators", *IEEE Transactions on Robotics*, 24(6), 1440–1445, 2008. <https://doi.org/10.1109/tro.2008.2006240>
- [13] S. Cubero, *Industrial Robotics: Theory, Modelling and Control*, InTech, 951, 2006. <https://doi.org/10.5772/44>
- [14] A. Ratajczak, J. Karpińska, & K. Tchoń, "Task-priority motion planning of underactuated systems: an endogenous configuration space approach", *Robotica*, 28(6), 885–892, 2009. <https://doi.org/10.1017/s0263574709990737>
- [15] D. Mishchuk, "Increasing efficiency manipulator by optimal control", *Girnichy, budivelni, dorozhni ta meliorativni mashini*, 85, pp.43-50, 2015. <https://doi.org/10.26884/damu.a158508>
- [16] O.V. Grigorov, V.S. Loveykin, *Optimal control of the movement of the mechanisms of hoisting machines*, KIZMN, p. 264, 1997.
- [17] E.I. Vorobyov, K.V. Frolova, *Mechanics of industrial robots*, Ch. 3, Moscow, High School, p. 303, 1988.
- [18] I.S. Vittenburg, *Dinamika sistem tverdyh tel*, Monografiya, Moscow, Mir, p. 294, 1980.
- [19] A.A., Kobrinskij, A.E., Kobrinskij, *Manipulyacionnye sistemy robotov*, Moscow, Nauka, p. 343, 1985.
- [20] V.S. Loveykin, Yu.O. Romasevich, O.O. Spodoba, *Optimizaciya rezhimiv ruhu krana-manipulyatora z gidroprivodom: monografiya*, Kyiv, CP "KOMPRINT", p. 264, 2021.
- [21] F.G. Vashuk, O.G. Laver & N.Ya. Shumilo, *Matematichne programuvannya ta elementi variacijnogo chislennya*, Navchalnij posibnik, Kyiv, Znannya, p. 368, 2008.

## Implementation of optimal energy displacements of the working tool of the two-link manipulator along the parabolic trajectory

V.S. Loveykin, D.O. Mishchuk, Ye.O. Mishchuk

**Abstract.** The intensive spread of automated and robotic systems in the construction industry poses a number of problematic and unsolved problems related to the efficiency and reliability of their use, namely: reducing dynamic loads in the structural elements of robots and manipulators, reducing energy costs to perform a given process by a robotic system. Particular attention is paid to the quality of control, in particular, in a limited working space when moving working bodies with hydraulically actuated manipulators, which are dominant in construction.

**Problems:** For welding of metal structures or when laying building elements using handling systems, the technology for performing such work involves the use of the tasks of moving special working bodies along parabolic trajectories. To implement the tasks set by manipulators, it is necessary to determine the control laws for the drive system. One of the ways to find the necessary functions for the control system is the use of optimization problems according to energy criteria and imposed geometric restrictions.

**Purpose:** to develop and investigate the modes of movement of the drive mechanism of a hydraulic manipulator with the implementation of an energy-intensive mode of operation of a mechanical system in a given space of movement of the working body along a hyperbolic trajectory.

**Methodology:** To achieve the goals of the study, it is proposed to use the optimization problem of minimizing energy consumption in the boom system of a two-link manipulator on a given parabolic trajectory of movement of its working body in a limited working space. In this paper, we consider the problem of conditional optimization, where the restrictions of the working space are imposed by the conditions of movement of the working body and the limiting restrictions on the movement of actuators. The objective optimization function is formed in the form of Lagrange equations from the components of energy consumption and the equation of a parabola that specifies the movement of the manipulator grip.

**Results:** To implement the optimal control of a two-link manipulator on a given parabolic trajectory, it is necessary to determine the extremals of the objective function functional in the form of the Lagrange equation for the components, which in this study were convolutions from the dependencies of energy consumption and the given equation for the trajectory of movement of the working body. The search for the minimum of the objective function is obtained in numerical form, based on which the form of the polynomial of the analytical dependence of the generalized coordinates on time is determined.

**Conclusions:** In further research, it is desirable to consider criteria that take into account various force loads, in particular, the root-mean-square value of the drive force and the intensity of its change over time, and it is also necessary to develop polynomial functions that can be used to express numerical solutions to optimization problems.

**Keywords:** manipulator; Lagrange function; method of Lagrange multipliers; optimization; energy costs; control.