

Розрахунково-експериментальна методика визначення модуля пружності пористих покриттів на підкладці при згинанні.

Частина 1. Теоретичні основи

М.М. Димань¹ • А.В. Молтасов¹ • С.М. Калюжний¹

Received: 24 July 2022 / Accepted: 1 October 2022

Анотація. Метою даної роботи є розробка розрахунково-експериментальної методики визначення модуля пружності одного з шарів двошарового бруса прямокутного поперечного перерізу при згинанні за умови, що модуль пружності іншого шару відомий. У представленій частині роботи із застосуванням формул переходу відносно паралельних осей отримано математичний вираз для визначення згинальної жорсткості двошарового прямокутного перерізу, який не включає відстані від центрів ваги перерізів шарів до зведеного центру ваги всього перерізу, які, в свою чергу, залежать від модулів пружності шарів. Наявність такого виразу дала змогу в замкненій формі скласти алгебраїчне рівняння, в якому в якості невідомого може виступати модуль пружності одного з шарів. В результаті було встановлено математичний зв'язок невідомого модуля пружності з відомим модулем пружності іншого шару, геометричними розмірами шарів та згинальною жорсткістю всього перерізу, яку слід визначати експериментально.

Ключові слова: модуль пружності, пористі покриття, пружно-геометричні характеристики, згинальна жорсткість, двошаровий переріз, зведений центр інерції.

Вступ

Сучасні можливості травматології та ортопедії, що базуються на наукових досягненнях в галузі медичних наук, біомеханіки та матеріалознавства, в значній мірі обумовлюють тенденцію до удосконалення методів лікування переломів та інших пошкоджень кісток опорно-рухового апарату [1]. У деяких випадках, зокрема, при переломах шийки та вивихах стегна, посттравматичному артрозі, вроджених диспластичних артрозах та деяких системних захворюваннях лікування можливе тільки шляхом повної заміни тазостегнового суглобу з використанням ендопротезів [2, 3]. На даний час існує велика кількість різних типів ендопротезів, а їх порівняно велика вартість і різноманітність характеристик підіймає питання щодо доцільності заміни одного виду ендопротеза на інший. Тому для обґрунтованого вибору оптимальних типів ендопротезів потрібна

їх оцінка з точки зору не тільки клінічних, а й механічних показників.

Однією з головних проблем при застосуванні металевих ендопротезів в ортопедії та травматології являється невідповідність модулів пружності кістки та імплантату, внаслідок чого уповільнюється регенерація і остеоінтеграція [4, 5]. Модуль пружності металевих матеріалів в 10–20 разів вищий, ніж у кістковій тканині [6], тому вирішення зазначеної проблеми можливе шляхом зниження модуля пружності за рахунок використання низько модульних сплавів, а також модифікації поверхні ендопротезу, яка контактує з кісткою.

При визначенні пружних характеристик плазмових покриттів звичайними способами [7] виникають деякі ускладнення, так як більшість з цих матеріалів руйнуються при дуже незначних деформаціях [8]. Тому перспективними для визначення фізико-механічних властивостей покриттів є акустичні методи дослідження [9], які дозволяють визначати пружні характеристики без руйнування зразків. Однак використання цих методів при дослідженні пружних характеристик багатошарових матеріалів, отриманих, наприклад, плазмовим напиленням, пов'язане зі складнощами відділення напиленого шару від поверхні основи, а також з

✉ М. М. Димань
mrs_d@ukr.net

¹ ІЕЗ ім. С.О. Патона НАН України, Київ, Україна

похибками, які вносить це відділення [10]. Тому виникає потреба у розробці методики визначення пружних характеристик покриття без відділення його від основи.

Огляд існуючих досліджень

За умов пружного деформування для визначення фізико-механічних властивостей покриття на підкладці використовують методи вимірювання шляхом випробувань на розтяг-стиск, а також на згинання [11]. Однак з урахуванням розподілу залишкових напружень в покриттях плазмового напилення [12] та їх вплив на роботу композиції в цілому найбільш доцільними виявляються випробування на згинання. Відомо [13], що для крихких та малопластичних матеріалів, якими є напилені покриття, випробування на згинання успішно замінило нерепрезентативне для них випробування на одновісний розтяг.

Згідно з існуючою на сьогоднішній день методикою розрахунку фізико-механічних властивостей покриттів, запропонованої в роботах [14, 15], модуль пружності покриття визначається за формулою:

$$E_c = \frac{12B_x - b \cdot h_b \cdot E_b (h_b^2 + 12y_b^2)}{b \cdot h_c (h_c^2 + 12y_c^2)}, \quad (1)$$

де B_x – жорсткість перерізу зразка з покриттям, яка визначається при випробуванні на консольне згинання; b – ширина зразка; E_b – модуль пружності підкладки; h_b – висота підкладки; h_c – висота покриття; y_b та y_c – відстані від центрів ваги перерізів підкладки та покриття, відповідно, до зведеного центру ваги перерізу зразка (рис. 1).

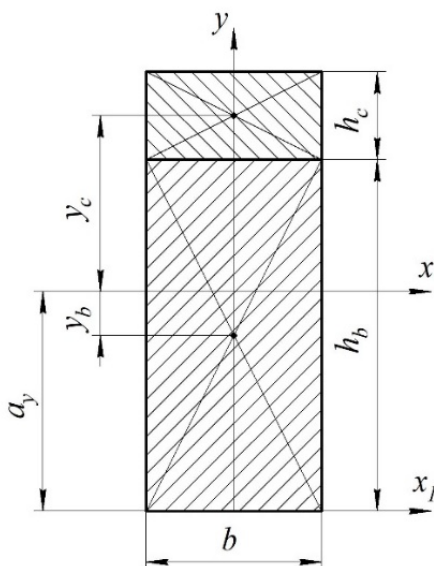


Рис. 1. Умовне зображення перерізу зразка з покриттям для випробувань на згинання

При цьому, за даними цих же робіт [14, 15], відстані y_b та y_c визначаються за формулами:

$$y_b = \frac{E_c \cdot h_c (h_b + h_c)}{2(E_b \cdot h_b + E_c \cdot h_c)} \quad (2)$$

та

$$y_c = \frac{h_b + h_c}{2} - y_b \quad (3)$$

відповідно.

Якщо підставити (2) та (3) в (1), то величина E_c буде по обидві сторони рівності і для її знаходження необхідно вирішити алгебраїчне рівняння відносно неї. Однак в роботах [14, 15] цього не було зроблено, натомість для розрахунку y_b та y_c задавалися відношенням E_c/E_b . Тобто, враховуючи, що модуль пружності підкладки E_b відомий, фактично задавалися величиною модуля пружності покриття E_c , яка і підлягає визначенню. Очевидно, що достовірність результатів розрахунку за такою методикою викликає обґрунтовані сумніви.

Тому на сьогоднішній день існує необхідність у розробці експериментально-теоретичної методики, яка дозволить визначати модуль пружності покриття при згинанні у явній формі.

Мета роботи

З огляду на вищевикладене на даному етапі роботи метою є: встановлення аналітичного зв'язку між пружно-геометричними характеристиками двошарового прямокутного перерізу при згинанні з модулями пружності його окремих шарів; обґрунтування математичних формул для розрахунку модуля пружності одного з шарів через модуль іншого шару, геометричні розміри шарів та пружно-геометричні характеристики композиції; визначення необхідних для розрахунків величин, які підлягають експериментальному встановленню.

Теоретичні дослідження

Згинальну жорсткість відносно головної осі x , яка проходить через зведений центр ваги зразка, можна визначити через жорсткість відносно паралельної осі x_1 , на якій лежить основа перерізу, за формулою [16]:

$$B_x = B_{x1} - a_y^2 \cdot A, \quad (4)$$

де a_y – відстань між осями x та x_1 (див. рис. 1); A – жорсткість перерізу при розтягу-стиску.

Згинальну жорсткість відносно осі x_1 визначимо за формулою:

$$B_{x1} = E_b \int_0^{h_b} b \cdot y^2 dy + E_c \int_{h_b}^{h_b+h_c} b \cdot y^2 dy =$$

$$= \frac{1}{3} b \cdot E_b \cdot h_b^3 + \frac{1}{3} b \cdot E_c \left[(h_b + h_c)^3 - h_b^3 \right], \quad (5)$$

а жорсткість перерізу при розтягу – за формулою [16]:

$$A = E_b \cdot b \cdot h_b + E_c \cdot b \cdot h_c. \quad (6)$$

Оскільки вісь x є головною, a_y являється координатою зведеного центру ваги перерізу відносно осі x_1 , яка визначається за формулою:

$$a_y = \frac{S_{x1}^*}{A} = \frac{E_b \int_0^{h_b} b \cdot y dy + E_c \int_{h_b}^{h_b+h_c} b \cdot y dy}{E_b \cdot b \cdot h_b + E_c \cdot b \cdot h_c} = \frac{\frac{1}{2} b \cdot E_b \cdot h_b^2 + \frac{1}{2} b \cdot E_c \left[(h_b + h_c)^2 - h_b^2 \right]}{E_b \cdot b \cdot h_b + E_c \cdot b \cdot h_c}. \quad (7)$$

де S_{x1}^* – зведений статичний момент перерізу відносно осі x_1 , який можна знайти так само, як і геометричний статичний момент площі S_{x1} , надавши кожному елементу площі ваговий коефіцієнт у вигляді величини модуля пружності у відповідній точці перерізу.

Підставивши (5)–(7) у (4), після перетворень отримаємо формулу для визначення згинальної жорсткості:

$$B_x = \frac{b \left(E_b^2 \cdot h_b^4 + 4E_b \cdot E_c \cdot h_b^3 \cdot h_c + 6E_b \cdot E_c \cdot h_b^2 \cdot h_c^2 + 4E_b \cdot E_c \cdot h_b \cdot h_c^3 + E_c^2 \cdot h_c^4 \right)}{12 \left(E_b \cdot h_b + E_c \cdot h_c \right)} \rightarrow \leftarrow \quad (8)$$

Тут необхідно зауважити, що для однорідного матеріалу ($E_b = E_c = E$) формула (8) набуде вигляду:

$$B_x = E \frac{b \cdot (h_b + h_c)^3}{12} = E \frac{b \cdot h^3}{12}. \quad (9)$$

Враховуючи що осьовий момент інерції прямокутного перерізу визначається за формулою [17]:

$$J_x = \frac{b \cdot h^3}{12},$$

отримаємо формулу для визначення згинальної жорсткості перерізу з постійним модулем пружності з роботи [16]:

$$B_x = E \cdot J_x,$$

чим підтверджується правильність отриманої вище формули (8) для згинальної жорсткості двошарового перерізу.

Шляхом перетворень формули (8) одержимо рівняння:

$$h_c^4 \cdot E_c^2 + 2h_c \left[E_b \cdot h_b \left(2h_b^2 + 3h_b \cdot h_c + 2h_c^2 \right) - \frac{6B_x}{b} \right] \times \\ \times E_c + E_b^2 \cdot h_b^4 - 12 \frac{B_x}{b} E_b \cdot h_b = 0,$$

вирішуючи яке відносно модуля пружності покриття, отримаємо:

$$E_c = \frac{1}{h_c^3} \left[\frac{6B_x}{b} - \Psi \right] + \frac{1}{h_c^3} \sqrt{\left(\Psi - \frac{6B_x}{b} \right)^2 - E_b^2 \cdot h_b^4 \cdot h_c^2 + 12 \frac{B_x}{b} E_b \cdot h_b \cdot h_c^2} \quad (10)$$

де $\Psi = E_b \cdot h_b \left(2h_b^2 + 3h_b \cdot h_c + 2h_c^2 \right)$.

Аналізуючи отриману формулу, можемо бачити, що експериментальному визначенню підлягають модуль пружності підкладки E_b та згинальна жорсткість зразка B_x .

Висновки

1. Обґрунтовані теоретичні засади нової експериментально-теоретичної методики для визначення модуля пружності покриття при згинанні без відділення його від основи.

2. Отримані математичні формули для визначення у явному вигляді модуля пружності одного з шарів двошарового бруса прямокутного перерізу через геометричні розміри шарів, модуль пружності іншого шару та згинальну жорсткість всього перерізу, причому дві останні характеристики визначаються експериментальним шляхом.

References

- [1] H.V. Haiko “Stan ortopedo-travmatolohichnoi dopomohy v Ukraini ta priorytetni napriamky yii udoskonalennia”, in *Proc. Zbirnyk naukovykh prats XIII zizdu ortopediv-travmatolohiv Ukraine*, Donetsk, pp. 5–8, 2001.
- [2] A.I. Protsyk et al., “Novyi pidkhid do tekhnolohii likuvannia perelomiv shyiky stehnovoi kistky”, *Visnyk ortopedii, travmatolohii ta protezuvannia*, No. 2, pp. 55–58, 2005.
- [3] M.V. Poluliakh et al., “Pervynne endoprotezuvannia pry cherez- ta mizhvertelnykh perelomakh stehnovoi kistky u khvorykh pokhyloho ta starechoho viku”, *Ukrainskyi zhurnal ekstremalnoi medytsyny imeni H. O. Mozhaieva*, No. 2 (9), pp. 93–96, 2008.
- [4] H. Shi et al., “Functional gradient metallic biomaterials: techniques, current scenery, and future prospects in the biomedical field”, *Frontiers Bioengineering and Biotechnologies*, Vol. 8, 2021. doi.org/10.3389/fbioe.2020.616845

- [5] H. Mehboob and S.-H. Chang, "Evaluation of the development of tissue phenotypes: Bone fracture healing using functionally graded material composite bone plates", *Composite Structures*, No. 1 (117), pp. 105–113, 2014. doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.06.019
- [6] M. Long, H. J. Rack "Titanium alloys in total joint replacement - A materials science perspective", *Biomaterials*, No. 18 (19), pp. 1621–1639, 1998. doi.org/10.1016/S0142-9612(97)00146-4
- [7] V.S. Zolotarevskij, *Mekhanicheskie ispytaniya i svoystva metallov*, I.I. Novikova Ed., Moscow: Metallurgiya, 1974.
- [8] V.A. Barvinok, "Opreделение uprugih harakteristik plazmennyh pokrytij akusticheskim metodom", *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Mashinostroenie*, No. 6, pp. 99–103, 1980.
- [9] I.V. Zashchuk, *Elektronika i akusticheskie metody ispytanij stroitel'nyh materialov*, Moscow: Vysshaya shkola, 1968.
- [10] V.A. Barvinok, *Upravlenie napryazhyonnyim sostoyaniem i svoystva plazmennyh pokrytij*, Moscow: Mashinostroenie, 1990.
- [11] I.F. Arutyunova *et al.*, "Methods of evaluating the service properties of protective coatings", *Welding International*. No. 2 (16), pp. 155–157, 2002. DOI:10.1080/09507110209549510
- [12] L. Nyu, V. A. Tarasov and A. F. Puzryakov, "A model of the formation of residual stresses in the component-coating system in plasma spraying processes", *Welding International*, No. 3 (19), pp. 238–242, 2005. doi.org/10.1533/wint.2005.3432
- [13] V.V. Kudinov, F.I. Kitaev and A.G. Tsidulko, "Strength characteristics of plasma-sprayed coatings from mixed nickel-aluminum powders", *Soviet Powder Metallurgy and Metal Ceramics*, No. 8 (14), pp. 637–642, 1975. doi.org/10.1007/BF00794465
- [14] E.A. Zelenina, S.V. Loskutov and A.V. Ershov, "Metod raschyota fiziko-mekhanicheskikh harakteristik plazmennogo pokrytiya na podlozhke pri ispytanii obrazcov na izgib", *Novi materiali i tekhnologii v metalurgii ta mashinobuduvanni*, No. 2, pp. 107–110, 2016.
- [15] E.A. Zelenina *et al.*, *Napryazhenie i deformaciya plazmennogo pokrytiya pri izgibe podlozhki*, No. 1, pp. 39–42, 2017.
- [16] I.A. Birger and R.R. Mavlyutov, *Soprotivlenie materialov*, Moscow: Nauka, uchebnoe posobie, 1986.
- [17] G.S. Pisarenko, O.L. Kvitka and E S. Umans'kij, *Opir materialiv*, G.S. Pisarenka Ed., Kyiv: Vishcha shkola, 2004.

Calculation and experimental procedure for determining the modulus of elasticity of porous coatings on a substrate during bending.

Part 1. Theoretical foundations

M.M. Dyman, A.V. Moltasov, S.M. Kalyuzhny

Abstract. *The purpose of this work is to develop a design and experimental technique for determining the modulus of elasticity of one of the layers of a two-layer bar of rectangular cross section during bending, provided that the modulus of elasticity of the other layer is known. In this part of the work, using the transition formulas of relatively parallel axes, a mathematical expression has been obtained to determine the bending stiffness of a two-layer rectangular section, which does not include distances from the centers of weight of sections of layers to the pivot center of weight of the entire section, which, in turn, depend on the elastic modulus of layers. The presence of such an expression made it possible to form an algebraic equation in which the modulus of elasticity of one of the layers can act as an unknown. As a result, the mathematical connection of the unknown modulus of elasticity with the known modulus of elasticity of the other layer, geometric dimensions of layers and bending stiffness of the entire section was established, which should be determined experimentally.*

Keywords: *modulus of elasticity, porous coatings, elastic-geometric characteristics, bending rigidity, double-layer section, composite center of inertia.*