Mech. Adv. Technol., Vol. 8, No. 1, 2024, pp. 98–107

DOI: 10.20535/2521-1943.2024.8.1(100).293256

УДК 539.3

Гармонічні коливання п'єзокерамічних секціонованих функціонально-градієнтних циліндрів з врахуванням дисипації енергії

Л.О. Григор'єва[1] • І.В. Янчевський[2]

Received: 15 December 2023 / Revised: 10 March 2024 / Accepted: 19 March 2024

Анотація. *Досліджуються гармонічні коливання п'єзокерамічних функціонально-градієнтних секціонованих порожнистих циліндрів з врахуванням дисипації енергії. Розглядається циліндр скінченної довжини, що складається з парної кількості секцій, поляризованих в коловому напрямку, які з'єднуються між собою за принципом зустрічної поляризації. Матеріал на основі п'зокераміки PZT-5A вважається функціонально неоднорідним в напрямку попередньої поляризації. Циліндр навантажується різницею потенціалів, прикладеною до плоских граней секцій. Розрахунок виконується методом скінченних елементів. Описується методика формування матриць демпфування та визначення коефіцієнтів, що відповідають частотно-незалежному демпфуванню, альфа- та бета-демпфуванню, демпфуванню за Релеєм на заданому частотному діапазоні зі сталою добротністю. Вказані способи демпфування пов'язуються з експериментальними даними через механічну добротність п'єзоелемента. Діелектричні втрати враховуються шляхом введення в розрахункові вирази тангенсу або матриці тангенсів діелектричних втрат. Проводиться порівняння розглянутих методів з результатом, отриманим за допомогою комплексних пружних та діелектричних модулів, та оцінюється їх відповідність вхідним даним.*

Для функціонально-градієнтного та однорідного п'єзоелементів заданої конфігурації будуються амплітудно-частотні характеристики для переміщень, заряду на електродах, електричного адмітансу та його логарифму з врахуванням демпфування. Для функціонально-неоднорідного циліндра визначаються частоти електричних резонансів, антирезонансів та відповідні коефіцієнти електромеханічного зв'язку. Максимальний коефіцієнт електромеханічного зв'язку виникає на частоті другого електричного резонансу.

Ключові слова: *секціонований п'єзокерамічний циліндр; функціонально-градієнтний матеріал; гармонійні коливання; МСЕ; затухання за Релеєм; електричний резонанс і антирезонанс.*

Вступ

П'єзокерамічні перетворювачі циліндричної форми є функціональними компонентами численних пристроїв, призначених для перетворення електричної енергії в механічну та навпаки. Вони застосовуються, зокрема, в гідроакустиці, збирачах енергії, медичній техніці, пристроях моніторингу елементів конструкцій та споруд та ін. як випромінювачі та приймачі акустоелектричного сигналу. Дослідження коливань п'єзоелектричних циліндрів та циліндричних оболонок як складових електроакустичних систем проводилися в роботах [1]–[6] та ін. В зв'язку зі складністю постановки зв'язаних задач електропружності, аналітичні розв'язки знайдено лише для обмеженого класу задач. Для двовимірних та тривимірних тіл розвиваються числово-аналітичні та числові підходи до розв'язання.

П'єзоелектрики [7] є основою багатьох сучасних адаптивних систем, для яких характерною є наявність вимірювальної (сенсорної) і виконавчої (актюаторної) компонент, що взаємодіють між собою за допомогою системи керування [3], [5], [8]–[12]. Розвиток адаптивних систем вимагає розробки нових типів матеріалів та пристроїв, що задовольняють вимогам роботи в екстремальних умовах, високопродуктивного перетворення енергії, гнучкості та високої механічної міцності при динамічних навантаженнях. Для задоволення цих вимог розробляють функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ), що отримані при механічному поєднанні

✉ *Л.О. Григор'єва*
grygorieva.lo@knuba.edu.ua

[1] *Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна*
[2] *КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна*

© The Author(s).
The article is distributed under the terms of the license CC BY 4.0.

матеріалів з різко відмінними значеннями фізико-хімічних параметрів, наприклад, при спайці кераміки з металом або полімером. Зазвичай, зміна властивостей ФГМ пов'язана з відповідним варіюванням хімічного складу чи фізичної структури матеріалу. Використання ФГМ дозволяє уникнути такого недоліку, як концентрація напружень між шарами, що виникає в багатошарових матеріалах. Їх фізико-механічні властивості неперервно змінюються вздовж однієї або кількох координатних осей. Функціональна неоднорідність матеріалу зазвичай спеціально проектується та реалізується для забезпечення особливих задач перетворення енергії, але також може виникати в процесі виготовлення внаслідок неоднорідності розподілу температурного поля, тиску або наповнення об'єму.

Дослідження коливань функціонально-градієнтних тіл на даний момент активно розвивається. Поширення пружних хвиль в багатошарових та функціонально-неоднорідних циліндрах і кулях було розглянуто в монографії [2]. Дослідження функціонально-градієнтної пластини в задачах активного керування проводилося в [10] та ін.

Технічна необхідність врахування ускладнених матеріальних характеристик, вибору оптимальних умов функціонування та забезпечення надійності п'єзоелементів вимагає швидких та надійних засобів розв'язання динамічних задач електропружності. Одним з найбільш поширених в механіці деформівного твердого тіла числовим методом є метод скінченних елементів (МСЕ), що використовується для розв'язання широкого спектру задач механіки деформівного твердого тіла. Розповсюдження цього методу пояснюється великим обсягом фізичних станів, до математичних моделей яких може бути застосований МСЕ, універсальністю, простотою застосування в інженерних обчислювальних комплексах, легкою зміною вхідних параметрів та навантажень, чіткою фізичною інтерпретацією отриманих результатів. Приклади застосувань МСЕ до задач динаміки просторових тіл із використанням промислових програмних комплексів наведені, наприклад, у публікаціях [13]–[15] та багатьох інших.

МСЕ має досить багато модифікацій та способів виведення розв'язуючих рівнянь залежно від математичної моделі досліджуваного середовища. Для п'єзоелектричних тіл використовуються підходи, що базуються на варіаційному принципі Гамільтона-Остроградського [1], [3], варіаційному рівнянні Лагранжа у згортках [8], [9], варіаційному принципі Ер Нісса [16], варіації методу Бубнова-Гальоркіна [5] та ін. Скінченноелементні симуляції динамічного електромеханічного стану п'єзоелементів є основним етапом проектування пристроїв, що функціонують на основі п'єзоефекту. Вони використовуються для підбору експлуатаційних режимів та прогнозування поведінки пристрою при можливих змінах умов роботи, в ітераційних методах визначення матеріальних характеристик, для верифікації результатів, знайдених іншими способами.

Для отримання реалістичних розв'язків динамічних задач в'язкоелектропружності постановка задачі має враховувати демпфування (дисипацію енергії, внутрішнє тертя або в'язкість матеріалу). Математичний опис демпфування є однією з найбільш складних проблем при підготовці розрахункової моделі в п'єзоелектричному аналізі. На резонансних режимах демпфування може бути зведене до введення в розрахунок матеріальних сталих у формі комплексних модулів. Повний, а частіше частковий, набір тангенсів втрат знайдено в літературі лише для окремих матеріалів, що не дає змогу застосовувати цей підхід до інших матеріалів [17], [18]. На практиці процедура експериментального визначення уявних складових комплексних модулів є досить складною та неоднозначною, оскільки в загальному випадку вони залежать від робочої температури п'єзоелемента, від частоти навантаження та тривалості роботи, що в сукупності призводить до дисипативного розігріву [6], [19]. Сучасний стан дослідження термомеханічного стану п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів в задачах активного керування коливаннями в'язкопружної конструкції описано в [11].

В даній роботі для опису демпфування коливань застосовується загальноприйнятий в механіці деформівного твердого тіла механізм внутрішнього в'язкого тертя, що в чисельних підходах реалізується як демпфування за Релеєм [5], [16]. Визначальним показником в цьому підході є добротність [7], [20], що є однією з ключових характеристик п'єзоелемента.

Постановка задачі

Зв'язаний електропружний стан п'єзокерамічного тіла характеризується вектором переміщень $\mathbf{u}$, псевдо-векторами напружень та деформацій в системі позначень Фойґта $\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\right)^T$, $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\,\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}\right)^T$, вектором напруженості електричного поля $\mathbf{D} = \left(D_1, D_2, D_3\right)^T$ та вектором електричної індукції $\mathbf{E} = \left(E_1, E_2, E_3\right)^T$.

Будемо виходити з принципу Гамільтона-Остроградського, згідно до якого електропружний стан досліджуваного тіла визначається функціями, на яких функціонал досягає стаціонарного значення (перша варіація $\delta J = 0$).

Функціонал принципу Гамільтона-Остроградського можна представити в вигляді [3]:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} (K + U + A)\, dt\,. \tag{1}$$

В функціоналі (1) лагранжіан L визначається як сума кінетичної енергії K, внутрішньої енергії U та роботи зовнішніх сил та електричного поля A. Для п'єзоелектричних тіл вищеназвані компоненти енергії тіла визначаються наступним чином:

$$K=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\rho\dot{\mathbf{u}}^{T}\dot{\mathbf{u}}d\Omega\,;\quad U=-\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{T}\overline{\boldsymbol{\sigma}}+\mathbf{E}^{T}\mathbf{D}\right)d\Omega\,;$$
$$A=\int_{\Omega}\left(\mathbf{u}^{T}\mathbf{f}\right)d\Omega+\int_{S}\left(\mathbf{u}^{T}\mathbf{p}-\varphi q_{s}\right)dS\,, \tag{2}$$

де Ω – об'єм тіла; S – поверхня, що його обмежує; ρ – густина матеріалу; $\mathbf{f}$ – вектор масових сил; $\mathbf{p}$ – вектор механічного навантаження на поверхні тіла; φ – електричний потенціал, q_s – щільність поверхневих зарядів. Верхній індекс ^{T} – символ транспонування вектора; крапка над символом означає похідну за часом.

Співвідношення Коші в системі позначень Фойгта записуємо як:

$$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}=\Xi\mathbf{u}\,, \tag{3}$$

де введено диференціальний оператор:

$$\Xi=\begin{bmatrix}\partial/\partial x_1 & 0 & 0\\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0\\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3\\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2\\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1\\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0\end{bmatrix}.$$

З врахуванням співвідношень Коші (3), виразу напруженості електричного поля через електричний потенціал $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$, теореми Гауса-Остроградського і правила диференціювання добутку функцій випливає, що варіація лагранжіана L, описаного виразами (1), (2), може бути записана у вигляді:

$$\delta L=-\int_{\Omega}\left(\delta\mathbf{u}^{T}\left(\Xi^{T}\overline{\boldsymbol{\sigma}}-\rho\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{f}\right)+\delta\varphi\nabla^{T}\mathbf{D}\right)d\Omega+$$
$$+\int_{S}\left(\delta\mathbf{u}^{T}\left(\overline{\mathbf{n}}\overline{\boldsymbol{\sigma}}-\mathbf{p}\right)+\delta\varphi\left(\mathbf{n}\mathbf{D}+q_{s}\right)\right)dS\,,$$

де ∇ – оператор Гамільтона; $\mathbf{n}$ – вектор напрямних косинусів нормалі до поверхні розміром 3×1; $\overline{\mathbf{n}}$ – (3×6) – матриця напрямних косинусів.

З умови $\delta L=0$ та довільності віртуальних переміщень $\delta\mathbf{u}$ і $\delta\varphi$ випливають рівняння руху середовища та рівняння вимушеної електростатики:

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}-\Xi^{T}\overline{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{f}\,;\quad \nabla^{T}\mathbf{D}=0\,, \tag{4}$$

а також природні граничні умови:

$$\mathbf{u}\big|_{S_u}=\mathbf{U}_S\,;\quad \mathbf{n}\overline{\boldsymbol{\sigma}}\big|_{S_\sigma}=\mathbf{p}\,;\quad \varphi\big|_{S_\varphi}=V_0\,;\quad \mathbf{n}\mathbf{D}\big|_{S_q}=-q_s\,. \tag{5}$$

Постановку динамічних задач електропружності у вигляді рівнянь (4) при граничних умовах (5) потрібно доповнити матеріальними співвідношеннями:

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{c}^{E}\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}-\mathbf{e}^{T}\mathbf{E}\,; \tag{6}$$

$$\mathbf{D}=\mathbf{e}\cdot\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}+\boldsymbol{\epsilon}^{S}\cdot\mathbf{E}\,, \tag{7}$$

де $\mathbf{c}^E$ – симетрична (6×6) матриця модулів пружності, визначених при нульовій напруженості електричного поля; $\mathbf{e}^T$ – транспонована (6×3) – матриця п'єзоелектричних модулів; $\boldsymbol{\epsilon}^S$ – (3×3) – матриця коефіцієнтів діелектричної проникності при постійних деформаціях.

Постановка задач електропружності (4)–(7) не враховує дисипацію енергії, що суперечить фізичній картині коливань. Найбільш проста модель врахування дисипації енергії, що описує внутрішнє тертя в матеріалі, формується через введення в рівняння руху демпфувального доданку, пропорційного до швидкості переміщень з коефіцієнтом α_d:

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}+\alpha_d\rho\dot{\mathbf{u}}-\Xi^{T}\cdot\overline{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{f}\,. \tag{8}$$

В МСЕ введене в (8) демпфування носить назву альфа-демпфування. Врахування демпфування коливань у формі (8) є досить поширеним в чисельних розв'язках задач динаміки деформівного твердого тіла в зв'язку з простотою реалізації та інтерпретації результатів, але ця модель не отримала достатнього експериментального підтвердження, оскільки вона не враховує гістерезисної складової дисипації енергії.

Експериментально встановлено [17], [18], що п'єзоелектричні матеріали в області малих деформацій і напруженостей електричного поля мають властивості лінійного спадкового середовища. Моделі спадкових п'єзоелектричних матеріалів розглядалися в роботах [1], [8], [9], [11], [20] та ін.]. Лінійні залежності спадкової теорії між компонентами векторів $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$, $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$, $\mathbf{D}$ та $\mathbf{E}$ мають вигляд [1], [9], [20]:

$$\sigma_i\left(\mathbf{x},t\right)=\int_{-\infty}^{t}C_{ij}\left(\mathbf{x},t-\tau\right)\frac{\partial\varepsilon_j\left(\mathbf{x},\tau\right)}{\partial\tau}d\tau-$$
$$-\int_{-\infty}^{t}e_{ik}\left(\mathbf{x},t-\tau\right)\frac{\partial E_k\left(\mathbf{x},\tau\right)}{\partial\tau}d\tau\,; \tag{9}$$

$$D_k\left(x,t\right)=\int_{-\infty}^{t}e_{kj}\left(\mathbf{x},t-\tau\right)\frac{\partial\varepsilon_j\left(\mathbf{x},\tau\right)}{\partial\tau}d\tau+$$
$$+\int_{-\infty}^{t}\epsilon_{kk}\left(\mathbf{x},t-\tau\right)\frac{\partial E_k\left(\mathbf{x},\tau\right)}{\partial\tau}d\tau\,. \tag{10}$$

Функції релаксації пружних сталих $C_{ij}\left(\mathbf{x},t-\tau\right)$, п'єзоелектричних модулів $e_{ik}\left(\mathbf{x},t-\tau\right)$, діелектричних проникностей $\epsilon_{kk}\left(\mathbf{x},t-\tau\right)$ характеризують фізико-механічні властивості матеріалу. Зазвичай їх беруть у формі певних зручних для обчислення функцій, параметри яких повинні визначатися експериментально. На даний момент існують експериментальні та ітераційні методи для знаходження параметрів функцій релаксації при усталених коливаннях у формі комплексних модулів. Але повні набори комплексних модулів, необхідні для тривимірного обрахунку, відомі лише для

одиничних матеріалів. За відсутності таких даних доводиться застосовувати інші моделі врахування дисипації енергії.

Одна з найпоширеніших в динаміці деформівного твердого тіла моделей демпфування коливань відома як модель в'язкопружного тіла Кельвіна-Фойґта. Вона отримується з рівняння (9) при $C_{ij}\left(\mathbf{x},t\right)=c_{ij}^{E}\left(\mathbf{x}\right)\left(1+\beta_d\delta(t)\right)$, де $\delta(t)$ – дельта-функція. Тоді співвідношення для напружень у формі (6) мають вигляд:

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}}=\mathbf{c}^{E}(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}+\beta_d\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}})-\mathbf{e}^{T}\mathbf{E}\,; \tag{11}$$

Згідно до цієї моделі внутрішнє в'язке тертя в твердому тілі пропорційне частоті і амплітуді деформації в першому степені. Гіпотеза Кельвіна-Фойґта отримала широке поширення в прикладній теорії коливань з огляду на її простоту та лінійну форму, проте численні експерименти показують, що у більшості матеріалів при середніх напруженнях і нормальних температурах внутрішнє тертя практично не залежить від частоти. В зв'язку з цим модель Кельвіна-Фойґта застосовують в обмежених частотних діапазонах, зазвичай в околі резонансної частоти, з врахуванням зв'язку коефіцієнта демпфування β_d з механічною добротністю п'єзоелемента на цій частоті. Модель (11) реалізована в МСЕ під назвою бета-демпфування.

Окрім механічних втрат, експериментально підтверджено необхідність врахування діелектричних втрат. Математично вираз (10) найпростішим чином можна представити у формі (7) як:

$$\mathbf{D}=\mathbf{e}\cdot\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}+\boldsymbol{\varepsilon}^{S}\cdot\left(\mathbf{E}+\gamma_{\mathrm{d}}\dot{\mathbf{E}}\right). \tag{12}$$

Система рівнянь електропружності відносно функцій переміщень та електричного потенціалу отримується шляхом підстановки (11), (12) в (8) з врахуванням (3) та виразу $\mathbf{E}=-\nabla\varphi$:

$$\rho\ddot{\mathbf{u}}+\alpha_{\mathrm{d}}\rho\dot{\mathbf{u}}-\Xi^{T}\cdot\left[\mathbf{c}^{E}\cdot\Xi\left(\mathbf{u}+\beta_{\mathrm{d}}\dot{\mathbf{u}}\right)+\mathbf{e}^{T}\cdot\nabla\varphi\right]=\mathbf{f}\,; \tag{13}$$

$$\nabla^{T}\cdot\left[\mathbf{e}\cdot\Xi\mathbf{u}-\boldsymbol{\epsilon}^{S}\cdot\left(\nabla\varphi+\gamma_{\mathrm{d}}\nabla\dot{\varphi}\right)\right]=0\,. \tag{14}$$

При переході до числових методів система рівнянь (13), (14) перетворюється до системи диференціальних рівнянь за часом відносно векторів $\mathbf{U}$ та $\boldsymbol{\Phi}$, що складаються з компонент векторів переміщень та значень електричного потенціалу, відповідно, у всіх вузлових точках дискретного розбиття розрахункової моделі тіла:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M}_u & [0]\\ [0] & [0]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\mathbf{U}}\\ \ddot{\boldsymbol{\Phi}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{C}_u & [0]\\ [0] & -\mathbf{C}_{\varphi}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\mathbf{U}}\\ \dot{\boldsymbol{\Phi}}\end{Bmatrix}+$$
$$+\begin{bmatrix}\mathbf{K}_u & \mathbf{K}_{u\varphi}\\ \left(\mathbf{K}_{u\varphi}\right)^{T} & -\mathbf{K}_{\varphi}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{U}\\ \boldsymbol{\Phi}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{F}_u\\ \mathbf{F}_{\varphi}\end{Bmatrix}, \tag{15}$$

де $\mathbf{M}_u$, $\mathbf{C}_u$, $\mathbf{K}_u$ – матриці мас, механічного демпфування та жорсткостей; $\mathbf{C}_{\varphi}$ – матриця діелектричних втрат; $\mathbf{K}_{u\varphi}$, $\mathbf{K}_{\varphi}$ – матриці п'єзоелектричних та діелектричних коефіцієнтів при переміщеннях та електричному потенціалі; $\mathbf{F}_u$, $\mathbf{F}_{\varphi}$ – вектори механічних та електричних навантажень, відповідно.

В методі демпфування за Релеєм, що є лінійною комбінацією альфа- та бета-демпфувань та описує в'язке тертя в матеріалі, матриця $\mathbf{C}_u$ представляється у вигляді лінійної комбінації матриць $\mathbf{M}_u$ та $\mathbf{K}_u$ з масовим коефіцієнтом демпфування α_d та жорсткісним коефіцієнтом демпфування β_d [5]:

$$\mathbf{C}_u=\alpha_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_u+\beta_{\mathrm{d}}\mathbf{K}_u\,. \tag{16}$$

З врахуванням інших моделей демпфування матриця $\mathbf{C}_u$ може мати інші доданки. При стаціонарних коливаннях компоненти матриці $\mathbf{C}_u$ мають комплексний множник і можуть трактуватися як уявна частина комплексних модулів.

На усталених режимах роботи демпфування коливань в міжрезонансних діапазонах проявляється мало, але в околі резонансу є дуже важливою властивістю, оскільки в експерименті при резонансі спостерігається пік з обмеженою амплітудою. Для опису цього явища на резонансній частоті $f_k=\omega_k/2\pi$ використовується поняття добротності п'єзоелемента $Q_{\mathrm{d}k}$. Добротність є однією з найважливіших характеристик осцилятора з врахуванням демпфування і може бути виміряна експериментально як відношення резонансної частоти до ширини резонансного піку на рівні 0,707 висоти резонансної кривої. В околі конкретної власної частоти ω_k при відомій добротності $Q_{\mathrm{d}k}$ використовується альфа-демпфування

$$\alpha_{\mathrm{d}}=2\omega_k\xi_{\mathrm{d}k}\,;\quad \beta_{\mathrm{d}}=0 \tag{17}$$

або бета-демпфування:

$$\alpha_{\mathrm{d}}=0\,;\quad \beta_{\mathrm{d}}=\frac{2\xi_{\mathrm{d}k}}{\omega_k}. \tag{17a}$$

Тут ξ_{dk} – частотно-незалежний коефіцієнт демпфування, що визначається як $\xi_{dk}=1/(2Q_{dk})$.

Якщо вважати добротність сталою $Q_{dk}=Q_d$ на інтервалі частот $\left[f_b,f_e\right]$, то формули для визначення коефіцієнтів демпфування α_d та β_d мають вигляд [5]:

$$\alpha_{\mathrm{d}}=\frac{2\pi f_b f_e}{\left(f_b+f_e\right)Q_{\mathrm{d}}}\,;\quad \beta_{\mathrm{d}}=\frac{1}{2\pi\left(f_b+f_e\right)Q_{\mathrm{d}}}. \tag{18}$$

Важливою характеристикою роботи п'єзоелемента в електричному колі є також його провідність, або електричний адмітанс Y [7], [17]:

$$Y = \frac{I}{\Delta V} = \frac{I^a}{V^a} = \frac{i\omega Q^a}{V^a}. \quad (19)$$

Амплітудно-частотні характеристики адмітанса або його логарифма мають екстремуми на частотах електричного резонансу або антирезонансу. Визначивши ці частоти, можемо знайти коефіцієнт електромеханічного зв'язку (КЕМЗ) п'єзоелемента за формулою [1], [17]

$$k_{\text{d}k} = \sqrt{\left(f_{\text{a}k}^2 - f_{\text{r}k}^2\right)} \Big/ f_{ak}. \quad (20)$$

Квадрат КЕМЗ показує, яка частина підведеної до п'єзоелектрика енергії перетвориться в енергію іншого виду.

Числові результати

Проведемо розрахунок гармонічних коливань функціонально-градієнтного п'єзокерамічного секціонованого циліндра. Вважається, що циліндр складається з $N = 12$ поляризованих в коловому напрямку секцій, при чому сусідні секції зустрічно поляризовані. Внутрішній радіус циліндра $R_1 = 3$ см, зовнішній радіус $R_2 = 5$ см, висота $2H = 10$ см, матеріал – функціонально-градієнтна п'єзокераміка на основі PZT-5A [9], [20]:

$$c_{11}^E = 121 \text{ ГПа}; \; c_{12}^E = 75{,}2 \text{ ГПа}; \; c_{13}^E = 75{,}2 \text{ ГПа};$$

$$c_{33}^E = 111 \text{ ГПа}; \qquad c_{44}^E = 21{,}1 \text{ ГПа};$$

$$\epsilon_{11}^S = 916\epsilon_0; \; \varepsilon_{33}^S = 830\epsilon_0; \; e_{31} = -5{,}5 \; \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2};$$

$$e_{33} = 15{,}8 \; \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}; \; e_{42} = 12{,}3 \; \frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}; \; \rho = 7500 \; \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Вважаємо, що матеріальні характеристики ФГМ змінюються лінійно в коловому напрямку з пропорційно до функції:

$$b(\theta) = 0{,}8 + 0{,}4\,N\theta/2\pi, \quad \theta \in \left[0, \; 2\pi/N\right].$$

Функція $b(\theta)$ моделює неоднорідність заповнення форми порошковою сумішшю складових цирконат-титанат свинцю на етапі виготовлення елемента конструкції з розрахунком на відхилення його вихідних параметрів від табличних в межах 20 % за рахунок неоднорідного пресування. При цьому при осередненні за об'ємом матеріальні характеристики дорівнюють табличним. Розподіл може бути обраний у вигляді іншої функції та описувати комбінацію різних матеріалів, що повинна відповідати технічним вимогам щодо конкретного конструктивного елементу та технологічним можливостям виробника.

Задача розв'язується із застосуванням програми ANSYS. На першому етапі у циліндричній системі координат $r\theta z$ створюється секція циліндра в області $R_1 \le r \le R_2$, $0 \le \theta \le \alpha_N$ $\left(\alpha_N = 360^\circ/N\right)$, $0 \le z \le H$. Для реалізації неоднорідності матеріалу геометрична модель у напрямку координати θ розбивається на M частин, для кожної з яких створюється окремий матеріал з характеристиками $a_{*j} = a_* b_j$ ($j = 1...M$; M – кількість матеріалів), де a_* – табличне значення матеріальної характеристики, а $b_j = 0.8 + 0{,}4 \cdot \left(j/M\right)$ – коефіцієнт, що описує лінійне відхилення від однорідного стану в коловому напрямку. Для однорідного матеріалу $b_j = 1$.

Для кожного з M матеріалів задаються таблиці пружних, п'єзоелектричних та діелектричних сталих у вигляді:

$$c_{yAN}^E = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{13}^E & c_{12}^E & & & \\ c_{13}^E & c_{33}^E & c_{13}^E & & 0 & \\ c_{12}^E & c_{13}^E & c_{11}^E & & & \\ & & & c_{44}^E & & \\ & 0 & & & c_{44}^E & \\ & & & & & c_{66}^E \end{bmatrix};$$

$$e_{yAN} = \begin{bmatrix} 0 & e_{31} & 0 \\ 0 & e_{33} & 0 \\ 0 & e_{31} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_{15} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \varepsilon_{yAN}^S = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^S & & 0 \\ & \varepsilon_{33}^S & \\ 0 & & \varepsilon_{11}^S \end{bmatrix},$$

що визначають поляризацію в напрямку осі $x_2 = \theta$ та задають порядок складових векторів $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{AN} = \left(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}\right)^T$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{AN} = \left(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\,\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}\right)^T$, реалізованих в ANSYS. На поверхні $\theta = 0$ задається нульовий потенціал $\left(\varphi_0 = 0\right)$, а при $\theta = \alpha_N$ задається $\varphi_\alpha = V^a$.

Основний розрахунок проводився на сітці 5×5×10 елементів. Використовувався квадратичний скінченний елемент, кожен вузол якого має чотири ступені свободи ($u_r, u_\theta, u_z, \varphi$). Порівняння з результатами, отриманих на сітці 10×10×25 елементів, показало відхилення між переміщеннями в межах 2 %.

З модального аналізу при закорочених електродах визначаємо резонансні частоти:

$$f_{\text{г}} = \begin{Bmatrix} 10085; \; 11536; \; 17031; \; 23259; \; 30323; \\ 32642; \; 37652; \; 39242; \; 42936; \; 44610... \end{Bmatrix} \text{Гц}.$$

Антирезонансні частоти визначаються при розімкнутих електродах:

$$f_{\mathrm{a}} = \begin{Bmatrix} 11253;\ 13656;\ 17745;\ 23260;\ 30376; \\ 32687;\ 37655;\ 39242;\ 42937;\ 44610... \end{Bmatrix} \text{Гц}$$

Відповідні коефіцієнти електромеханічного зв'язку (20) дорівнюють:

$$k_{\mathrm{d}} = \begin{Bmatrix} 0{,}4950;\ 0{,}6335;\ 0{,}2926;\ 0{,}0093; \\ 0{,}0592;\ 0{,}0525;\ 0{,}0126;\ 0;\ 0{,}0068;\ 0... \end{Bmatrix}$$

Бачимо, що найбільш ефективними для перетворення енергії є перші три резонанси.

Проаналізуємо гармонічні коливання без врахування втрат енергії. На рис. 1 наведено амплітудні значення та фазові кути радіальних та поздовжніх переміщень точки 1 з координатами $(R_2, 0, H)$ циліндра при $V^a = 100\ V$. Бачимо, що перші два резонанси на частотах $f_{\mathrm{r}1} = 10085$ Гц, $f_{\mathrm{r}2} = 11536$ Гц відображаються і в радіальному, і в поздовжньому напрямку. Третя резонансна частота $f_{r3} = 17031$ Гц виражена лише для u_z. Четвертий резонанс на переміщеннях не відображається. На п'ятому і шостому резонансі переміщення досягають відносно великих значень, але ці частоти не є робочими через малий КЕМЗ.

Розглянемо способи реалізації демпфування в ANSYS. Матриця демпфування $\mathbf{C}_u$ для механічних полів визначається наступним чином:

$$\mathbf{C}_u = \alpha_{\mathrm{d}}\mathbf{M}_u + \left(\beta_{\mathrm{d}} + \frac{\xi_{\mathrm{d}}}{2\pi\Omega}\right)\mathbf{K}_u + \\ + \sum_{j=1}^{M}\left(\alpha_{\mathrm{d}j}\mathbf{M}_{uj} + \left(\beta_{\mathrm{d}j} + \frac{\xi_{\mathrm{d}j}}{2\pi\Omega}\right)\mathbf{K}_{uj}\right). \qquad (21)$$

Тут α_{d}, β_{d} – глобальні параметри демпфування за Релеєм. Матеріально залежне демпфування описується коефіцієнтом альфа-демпфування $\alpha_{\mathrm{d}j}$ або бета-демпфування $\beta_{\mathrm{d}j}$ (j – номер матеріалу), що задаються як властивості конкретного лінійного матеріалу. Таблиці даних можуть залежати від частоти, температури або часу. Частотно-залежні властивості підтримуються лише для повного гармонічного аналізу. Частотно-незалежний коефіцієнт демпфування ξ_{d} задається для тіла в цілому, матеріальний коефіцієнт демпфування $\xi_{\mathrm{d}j}$ – для матеріалу номер j.

Гістерезисне структурне демпфування може бути включено в гармонічний і демпфований модальний п'єзоелектричний аналіз з використанням кількох структурних коефіцієнтів демпфування або у формі матриць тангенсів втрат:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \left(\mathbf{c}^E(1 + i\beta_d) + i\boldsymbol{\psi} \circ \mathbf{c}^E\right)\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{e}^T\mathbf{E}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left(\boldsymbol{\epsilon}^S - i\, tg\delta\, \boldsymbol{\epsilon}^S - i\boldsymbol{\varsigma} \circ \boldsymbol{\epsilon}^S\right)\mathbf{E}. \end{aligned} \qquad (22)$$

де i – уявна одиниця; $\boldsymbol{\psi}$ – симетрична матриця пружних тангенсів втрат; $\boldsymbol{\varsigma}$ – діагональна матриця діелектричних тангенсів втрат; $tg\delta = \gamma_d\omega$ – тангенс діелектричних втрат; $\circ$ – оператор поелементного множення матриць. Зазвичай тангенс діелектричних втрат наводиться в технічних таблицях матеріальних сталих для п'єзокераміки або визначається через електричну добротність як $tg\delta = 1/Q_{\mathrm{e}}$.

Для PZT-5A взято наступні тангенси втрат [9], [20]:

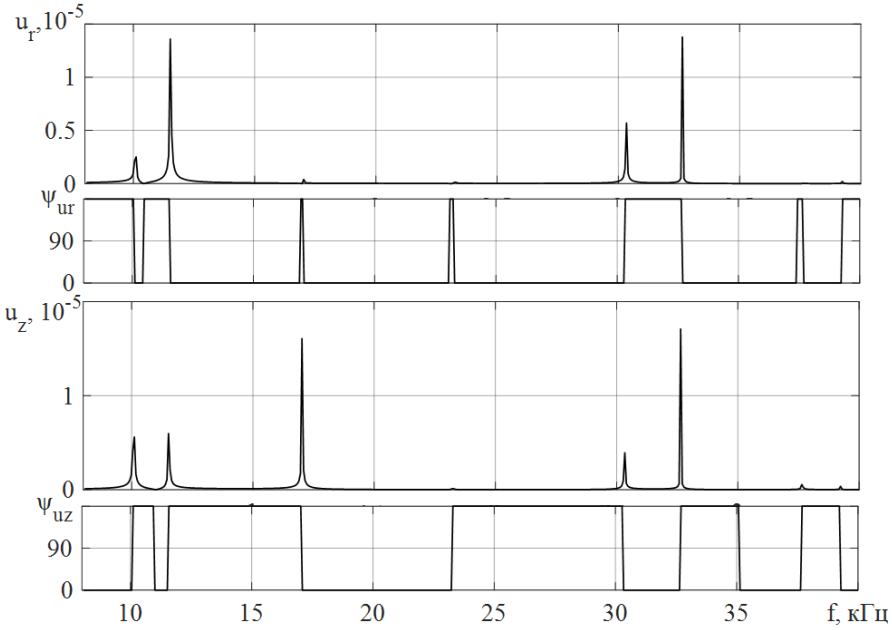

Рис. 1. Амплітудно-частотні характеристики переміщень точки $(R_1, 0, H)$

$$tg\left(c_{11}^{E}\right)=0{,}0111\,;\; tg\left(c_{12}^{E}\right)=-0{,}0062\,;$$
$$tg\left(c_{13}^{E}\right)=-0{,}0012\,;\; tg\left(c_{33}^{E}\right)=0{,}0067\,;$$
$$tg\left(c_{55}^{E}\right)=0{,}0332\,;\; tg\left(c_{66}^{E}\right)=0{,}0167\,;$$
$$tg\left(\varepsilon_{11}^{S}\right)=tg\left(\varepsilon_{33}^{S}\right)=-0{,}02\,.$$

Відповідна механічна добротність визначається за формулою:

$$Q_m=\frac{\mathrm{Re}\left(\tilde{c}_{11}^{E}-\left(\tilde{c}_{13}^{E}\right)^2\Big/\tilde{c}_{33}^{E}\right)}{\mathrm{Im}\left(\tilde{c}_{11}^{E}-\left(\tilde{c}_{13}^{E}\right)^2\Big/\tilde{c}_{33}^{E}\right)}, \qquad (23)$$

де $\tilde{c}_{ij}^{E}=c_{ij}^{E}\left(1+i\cdot tg(c_{ij}^{E})\right)$ – комплексні модулі. Для вибраного матеріалу $Q_m=75$.

Порівняння різних способів врахування демпфування наведено на Рис. 2.

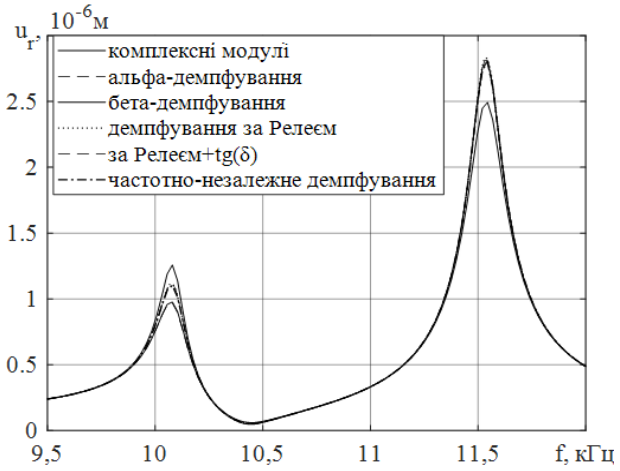

Рис. 2. АЧХ для різних методів затухання

На рис. 2 наведено амплітудно-частотні криві радіальних переміщень в діапазоні від 9,5 кГц до 12 кГц, що включає в себе перші два резонанси. Перша крива відповідає результатам, отриманим з врахуванням комплексних модулів; друга крива – альфа-демпфування (17) на другій власній частоті з коефіцієнтом $\alpha_{\mathrm{d}}=2\omega_2\xi_{\mathrm{d}}$, $\xi_{\mathrm{d}}=1/(2Q_{\mathrm{d}})$, $Q_{\mathrm{d}}=Q_{\mathrm{m}}=75$; третя крива – бета-демпфування на другій власній частоті при $\beta_{\mathrm{d}}=2\xi_{\mathrm{d}}/\omega_2$; четверта крива – демпфування за Релеєм з коефіцієнтами (18) в діапазоні $f_b=9$ кГц, $f_e=12$ кГц; п'ята – демпфування за Релеєм в сукупності з тангенсом діелектричних втрат $tg\delta=1/50=0{,}02$; шоста – частотно-незалежне демпфування коливань при $\xi_{\mathrm{d}}=1/(2Q_{\mathrm{d}})$. При порівнянні результатів виявилося, що на першому резонансі переміщення, тримані за допомогою комплексних модулів та альфа-демпфування повністю співпали: $u_r^a(f_1)=0{,}98$ мкм; криві демпфування за Релеєм без врахування та з врахуванням тангенсу діелектричних втрат та частотно незалежне демпфування набули значення $u_r^a(f_1)=1{,}1$ мкм і при застосуванні бета-демпфування $u_r^a(f_1)=1{,}26$ мкм. Маємо відхилення між результатами в 12 %. На другому резонансі з врахуванням комплекних модулів маємо $u_r^a(f_2)=2{,}5$ мкм, всі інші методи видали $u_r^a(f_2)=2{,}8$ мкм. Співпадіння результатів пояснюється тим, що в околі конкретної резонансної частоти частотно-незалежний коефіцієнт демпфування, альфа-демпфування, бета-демпфування, демпфування за Релеєм з коефіцієнтами (18) дають тотожні результати, що відповідають заданій механічній добротності п'єзоелемента. Для цих кривих добротність визначається з графіка та на обох резонансах дорівнює заданому значенню $Q_d=75$. Для графіка комплексних модулів має-мо $Q_d=65$.

Четверта і п'ята крива повністю співпали, що свідчить про те, що врахування тангенса діелектричних втрат при заданому навантаженні не є суттєвим. Відмінність між кривими з'являється при $tg\delta\geq 0{,}1$. П'єзоелектричні втрати не враховуються, оскільки можливість їх враховувати в середовищі Ansys поки що не реалізована. Але очевидно, що вплив п'єзоелектричних втрат менший, ніж діелектричних, тому в даному розрахунку будемо ними нехтувати.

Надалі зупинимось на демпфуванні за Релеєм (18) в діапазоні $f_b=8$ кГц, $f_e=18$ кГц. Тоді коефіцієнти демпфування (18) дорівнюють:

$$\alpha_{\mathrm{d}}=\frac{2\pi\cdot 8\cdot 18\cdot 10^6}{(8+18)\cdot 10^3\cdot 75}=464\,;$$

$$\beta_{\mathrm{d}}=\frac{1}{2\pi(8+18)\cdot 10^3\cdot 75}=8{,}17\cdot 10^{-8}\,.$$

Відповідні амплітудно-частотні залежності для переміщень точки 0 з координатами $(R_2,0,0)$ та точки 1 з координатами $(R_2,0,H)$ функціонально-градієнтного та однорідного циліндра наведені на рис. 3. При заданому навантаженні максимальні переміщення зовнішньої поверхні для ФГ циліндра виникають в радіальному напрямку на частоті 10085 Гц. В поздовжньому напрямку перший резонанс також більше виражений, ніж другий. В однорідному циліндрі резонансні частоти вищі, ніж в ФГМ, приблизно на 90 Гц, а амплітудні значення переміщень відрізняються на 1–2 %. Бачимо, що неоднорідність матеріалу знижує робочу частоту елемента.

Амплітудно-частотні характеристики комплексного адмітансу, обчисленого за формулою (19), його фазового кута та логарифма для функціонально-градієнтного та однорідного циліндра наведені на рис. 4.

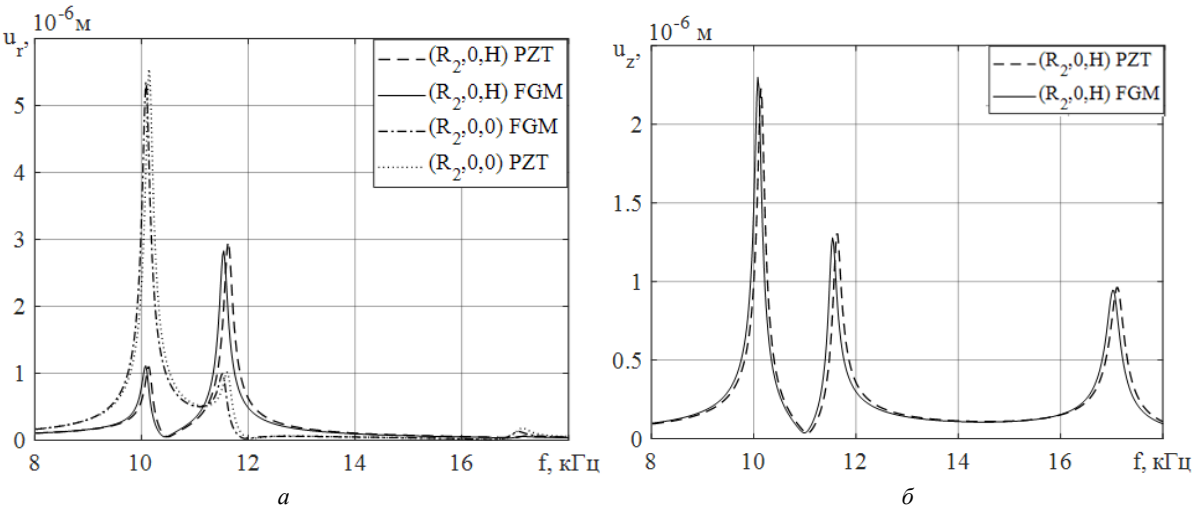

Рис. 3. АЧХ для функціонально-градієнтного та однорідного циліндрів: *а* – радіальні переміщення, *б* – поздовжні переміщення

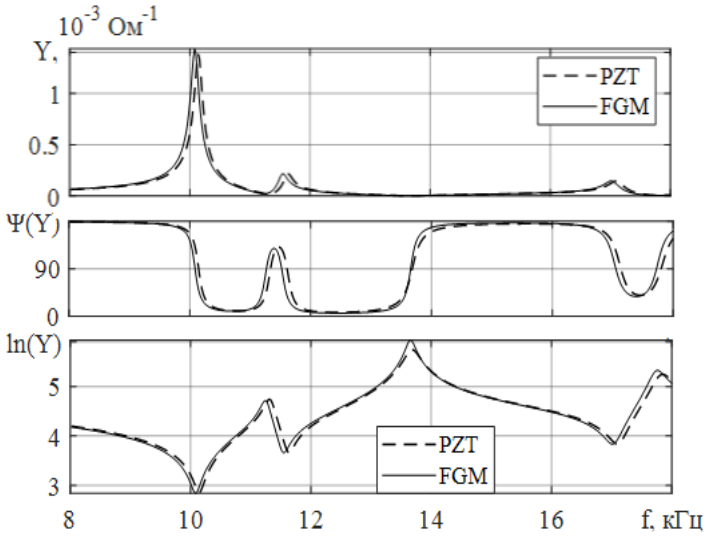

Рис. 4. АЧХ адмітансу п’єзоелемента

Адмітанс має максимуми, а його логарифм – мінімуми на частотах електричного резонансу. Ці частоти для ФГМ співпадають з визначеними раніше $f_r \approx \{10{,}1;\ 11{,}5;\ 17;...\}$ кГц. Локальні максимуми логарифма провідності відповідають антирезонансним частотам $f_a \approx \{11{,}25;\ 13{,}65;\ 17{,}75...\}$ кГц. Врахування діелектричних втрат згладжує піки кривих логарифму адмітансу на антирезонансних частотах на 2–3 %. Значення КЕМЗ для однорідного циліндра $k_d = \{0{,}494;\ 0{,}619;\ 0{,}295;...\}$, тобто на перших двох резонансах КЕМЗ для ФГМ вищі.

Висновки

Застосування методу скінченних елементів (МСЕ) надає можливість здійснювати детальне дослідження динамічного електромеханічного стану п’єзоелементів складної геометрії. Зокрема, у даній роботі представлені амплітудно-частотні характеристики для радіальних та поздовжніх переміщень п’єзокерамічного порожнистого секціонованого циліндра, логарифму його провідності з врахуванням функціональної неоднорідності матеріальних характеристик та демпфування за Релеєм. Виконані чисельні експерименти показали, що альфа-демпфування, бета-демпфування,

демпфування за Релеєм та задання частотно-незалежного коефіцієнта демпфування, що визначаються через добротність п'єзоелемента, в околі конкретного резонансу дають майже однакові результати, що відповідає фізичній стороні задачі. Розрахунок за допомогою комплексних модулів видав результати, що відрізняються від демпфування за Релеєм на 13 %.

Визначено, що в функціонально-градієнтному циліндрі розглянутої конфігурації власні частоти нижчі, ніж в однорідному. Частоти електричного резонансу та антирезонансу п'єзоелемента відповідають екстремумам кривої логарифма адмітанса. Визначено відповідні коефіцієнти електромеханічного зв'язку (КЕМЗ). Встановлено, максимальні переміщення виникають на першій резонансній частоті, хоча максимальний КЕМЗ для ФГ відповідає другому резонансу. При цьому відбувається періодичне випучування циліндричної поверхні в радіальному напрямку, і циліндр скорочується.

Таким чином, застосований підхід дозволяє проводити тривимірний розрахунок гармонічних коливань функціонально-градієнтних п'єзоелементів ускладненої геометрії. Розглянуті підходи врахування демпфування коливань при врахуванні добротності матеріалу корелюються з врахуванням дисипативних властивостей матеріалу за допомогою комплексних модулів. Визначені частоти електричного резонансу та антирезонансу та відповідні КЕМЗ дають можливість вибрати найбільш ефективний експлуатаційний режим п'єзоелемента.

References

[1] N. A. Shulha and A. M. Bolkysev, *Kolebanyia pezokeramycheskykh tel*., Kyiv: Nauk. dumka, 1990.

[2] Y. Grigorenko, W. H. Müller and I. A. Loza, *Selected Problems in the Elastodynamics of Piezoceramic Bodies*. Cham: Springer Int. Publishing, 2021. https://doi.org/10.1007/978-3-030-74199-0

[3] V. Yanchevskyi, *Nestatsionarni kolyvannia bimorfnykh elektropruzhnykh til*. Kyiv: Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, 2023.

[4] O. Leiko, N. Bogdanova, O. Bogdanov, O. Drozdenko and K. Drozdenko, "Possibilities of Controlling the Dynamic Properties of a Cylindrical Piezoceramic Acousto-electronic Device with Two-frequency Resonance Excitation," *J. Nano- Electron. Phys*., Vol. 12, No. 6, p. 06003–1–06003–6, 2020, doi: 10.21272/jnep.12(6).06003.

[5] S. J. Rupitsch, *Piezoelectric Sensors and Actuators*, Berlin, Heidelberg: Springer, 2019, doi: 10.1007/978-3-662-57534-5.

[6] F. Kirichok and O. A. Cherniushok, "Forced Vibration and Self-Heating of a Thermoviscoelastic Cylindrical Shear Compliant Shell with Piezoelectric Actuators and Sensors*," *Int. Appl. Mechanics*, Jan. 2021, doi: 10.1007/s10778-021-01049-7.

[7] F. Kyrychok, Y. O. Zhuk, O. A. Chernyushok and A. P. Tarasov, "Axisymmetric Resonant Vibrations and Vibration Heating of an Inelastic Cylindrical Shell Compliant to Shear with Piezoelectric Actuators and Rigidly Fixed End Faces," *J. Math. Sci*., May 2023, doi: 10.1007/s10958-023-06480-4.

[8] V. M. Zaika, "Metody ta zasoby proektuvannia piezokeramichnykh peretvoriuvachiv dlia kompiuternykh akustychnykh vymiriuvalnykh system," *Dysertatsiia na zdobuttia naukovoho stupenia kandydata tekhnichnykh nauk*, Cherkasy, 2016.

[9] J. Kocbach, "Finite Element Modeling of Ultrasonic Piezoelectric Transducers", a dr. scient. project., Univ. Bergen, Bergen, 2000.

[10] V. T. Rathod, "A Review of Electric Impedance Matching Techniques for Piezoelectric Sensors, Actuators and Transducers", *Electronics*, Vol. 8, pp. 169, Feb. 2019, doi: 10.3390/electronics8020169.

[11] V. Dubenets, O. Savchenko and O. Derkach, "Active damping of nonstationary vibrations in a beam with electro-viscoelastic patches," *Visn. Chernih. derzh. tekhnol. un-tu*, Vol. 71, pp. 43–49, Jan. 2014.

[12] R. D. Yershov, O. V. Savchenko, A. P. Zinkovskii and O. L. Derkach, "Electronic System for Calculation-Experimental Determination of the Modal and Damping Characteristics of Active Viscoelastic Beams", in *Proc. 2020 IEEE 40th Int. Conf. Electron. Nanotechnol. (ELNANO)*, Kyiv, Ukraine, 22–24 of april. 2020. IEEE, 2020, doi: 10.1109/elnano50318.2020.9088927.

[13] J. Li, Y. Xue, F. Li and Y. Narita, "Active vibration control of functionally graded piezoelectric material plate," *Composite Struct*., Vol. 207, pp. 509–518, Jan. 2019, doi: 10.1016/j.compstruct.2018.09.053.

[14] V. G. Karnaukhov, I. F. Kirichok and V. I. Kozlov, "Thermomechanics of Inelastic Thin-Walled Structural Members with Piezoelectric Sensors and Actuators Under Harmonic Loading (Review)," *Int. Appl. Mechanics*, Vol. 53, pp. 6–58, Jan. 2017, doi: 10.1007/s10778-017-0789-3.

[15] I. A. Guz, Y. A. Zhuk and C. M. Sands, "Analysis of the vibrationally induced dissipative heating of thin-wall structures containing piezoactive layers," *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 47, pp. 105–116, Mar. 2012, doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.004.

[16] O. Ishchenko and M. Kryshchuk, "Safety margin determination of the nuclear power plant reactor pressure vessel with taking into account warm pre-stress effect," *Mech. Adv. Technol*., vol. 6, no. 3, Dec. 2022, doi: 10.20535/2521-1943.2022.6.3.268515

[17] K. Rudakov, "Procedure of the updated calculations of disks of aero – engines with removable blades a finite element method in three – dimensional statement in the environment of Femap/Nastran," *Mech. Adv. Technol*., vol. 5, no. 1, pp. 22–32, Jun. 2021, doi: 10.20535/2521-1943.2021.5.1.226931.

[18] O. Krivenko, Y. Vorona, and A. Kozak, "Finite element analysis of nonlinear deformation, stability and vibrations of elastic thin-walled structures," *Strength Mater. Theory Struct*., no. 107, pp. 20–34, Oct. 2021 doi: 10.32347/2410-2547.2021.107.20-34.

[19] M. O. Shulha and V. L. Karlash, *Rezonansni elektromekhanichni kolyvannia piezoelektrychnykh plastyn*, Kyiv: Nauk. dumka, 2008.

[20] K. Uchino, Y. Zhuang and S. O. Ural, "Loss determination methodology for a piezoelectric ceramic: new phenomenological theory and experimental proposals," *J. Adv. Dielectrics*, Vol. 01, pp. 17–31, Jan. 2011, doi: 10.1142/s2010135x11000033.

Harmonic oscillations of a piezoceramic functional-graded sectional cylinders with account of energy dissipation

L.O. Hryhorieva[1] • I.V. Yanchevskyi[2]

[1] *Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine*
[2] *Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine*

Abstract. *Harmonic oscillations of piezoceramic functional-gradient sectioned hollow cylinders are studied, taking into account energy dissipation. A cylinder of finite length is considered. Cylinder consists of an even number of sections polarized in the circular direction, which are connected to each other by similar sides. The material is considered to be functionally heterogeneous in the direction of the previous polarization. The cylinder is loaded by the potential difference applied to the flat faces of the sections. The calculation is performed by the finite element method.*

Damping matrices forming and determining of coefficients corresponding to methods of introducing frequency-independent damping and Rayleigh damping is described. Electric losses are taken into account by entering the dielectric loss tangent or dielectric loss tangent matrix. The result of calculations is compared with the result obtained with the help of complex elastic and dielectric moduli. Amplitude-frequency characteristics are constructed for movements, charge on the electrodes, electrical admittance and its logarithm, taking into account damping. Energy dissipation consideration is related to the experimental data due to the mechanical quality factor of the piezo element. The frequencies of electrical resonances, anti-resonances and corresponding electromechanical coupling coefficients for functionally inhomogeneous and homogeneous cylinders are determined. For the functional-gradient piezoelectric element of the considered configuration, the maximum CEMC occurs at the frequency of the second electrical resonance. At this frequency, the dynamic stress-strain state of the cylinder is investigated. Forms of oscillations and distribution of stress amplitude values are constructed. The largest normal stresses according to the Coulomb-Mohr strength theory are determined and compared with the von Mises strength theory.

FEA allows three-dimensional calculation of harmonic oscillations of functional-gradient piezo elements of complicated geometry. The determined frequencies of electrical resonance and anti-resonance and the corresponding CEMC make it possible to choose the most effective operating mode of the piezo element. The FEM mathematical apparatus makes it possible to quickly and qualitatively evaluate the strength, determine the charge on the electrodes, the current in the circuit, build the amplitude-frequency characteristics of admittance and impedance, and evaluate the efficiency of energy conversion.

Keywords: *sectioned piezoceramic cylinder; functional-gradient material; harmonic response; FEM; Rayleigh damping; electrical resonance and antiresonance.*