

Інженерна методика визначення осьового моменту інерції кругового сегмента

А.В. Молтасов¹ • М.Й. Коваль¹ • М.Г. Мальгін¹ • А.М. Левчук¹

Received: 20 February 2024 / Revised: 21 May 2024 / Accepted: 28 May 2024

Анотація. Робота присвячена аналітичному дослідженню геометричних характеристик кругового сегмента, зокрема моменту інерції відносно його центральної осі, яка не проходить через центр круга. Доведено, що наведена в літературі формула для визначення досліджуваної характеристики є неправильною, тому мета роботи полягає у визначенні причини помилки та уточненні цієї формули. В роботі було виявлено причину та визначено член наявної формули, який призводить до помилки. На основі залежностей між моментами інерції при паралельному переносі осей була отримана нова формула для визначення моменту інерції кругового сегмента відносно його центральної осі. Встановлено, що при максимальному значенні центрального кута, на який опирається сегмент, запропонована формула тотожна формулі для визначення моменту інерції півкруга відносно відповідної осі, наявній в літературі. За запропонованою формулою проведені розрахунки зведеного моменту інерції при різних значеннях центрального кута. В результаті встановлено, що зі збільшенням центрального кута момент інерції збільшується, досягаючи свого граничного значення, яке відповідає півкругу. Побудовано графік залежності, який зручно використовувати для визначення величини досліджуваного моменту інерції при зміні центрального кута від ~ 20 до 180° .

Ключові слова: геометричні характеристики плоских перерізів, згинання, осьовий момент інерції, центральна вісь, круговий сегмент, півкруг.

Вступ

Велика кількість деталей та конструктивних елементів машин, які в процесі експлуатації сприймають згинальні навантаження, мають поперечний переріз у вигляді кругового сегмента або отвори чи вирізи такої форми. В якості прикладу можна навести вилкоподібні вушка шарнірних замків корпусу щокі затискання мобільних машин для контактного стикового зварювання рейок [1], [2] (рис. 1).

При проектуванні нових машин з подібним конструктивним оформленням із заданими зусиллями осадки та затискання важливо точно визначити напруження у вушку для вибору матеріалу, з якого воно буде виготовлене. Наприклад, за невисокого рівня напру-

жень більш дорого леговану сталь 30ХГСА, яка зазвичай використовується для виготовлення вушок, можна замінити більш дешевою сталлю 10ХСНД.

Постановка задачі

З курсу опору матеріалів [4] відомо, що максимальне напруження при згинанні визначається як відношення згинального моменту до мінімального осьового моменту опору поперечного перерізу:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_{\min}}, \quad (1)$$

де M – згинальний момент; W_{\min} – мінімальний осьовий момент опору поперечного перерізу.

Для асиметричних відносно центральних осей перерізів мінімальний осьовий момент опору визначається за формулою [4]:

$$W_{\min} = \frac{J_C}{y_{\max}}, \quad (2)$$

✉ А.В. Молтасов
moltasov@gmail.com

¹ ІЕЗ ім. С.О. Патона НАН України, Київ, Україна

де J_C – момент інерції перерізу відносно центральної осі; y_{\max} – відстань від центральної осі до осі, паралельної до неї, проведеної через найвіддаленішу точку перерізу.

Відомо [5], що момент інерції поперечного перерізу, який складається з декількох фігур, визначається як сума моментів інерції складових її фігур із виключенням моментів інерції вирізів, які містяться в цих фігурах. Отже, для визначення моменту інерції перерізу деталі, зображеної на рис. 1 справа, необхідно знати момент інерції вирізу у формі кругового сегменту.

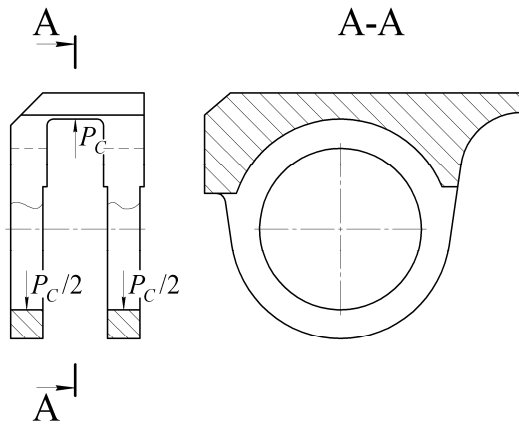


Рис. 1. Схема навантаження вилкоподібного вухка шарнірного замка центральної осі рейкозварювальної машини типу K1045 [3] зусиллям затискання

Для визначення моменту інерції кругового сегменту відносно його центральної осі x_C (рис. 2) в роботі [6] пропонується формула:

$$J_{x_C} = \frac{r^4}{8} \left(\frac{2\pi\alpha}{180} - \sin 2\alpha + 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha \right), \quad (3)$$

де r – радіус круга, якому належить сегмент; 2α – центральний кут, на який опирається сегмент.

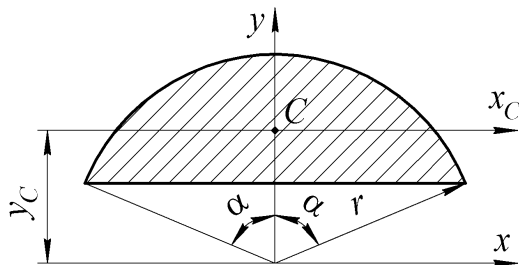


Рис. 2. Деякі характерні розміри та положення центральних осей перерізу у формі кругового сегменту

У цій же роботі [6] наведена формула для визначення моменту інерції цього ж сегменту відносно паралельної до x_C осі x , яка проходить через центр круга:

$$J_x = \frac{r^4}{8} \left(\frac{2\pi\alpha}{180} - \sin 2\alpha \cos 2\alpha \right). \quad (4)$$

Виконавши тригонометричні перетворення:

$$\begin{aligned} -\sin 2\alpha + 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha &= -\sin 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \sin^2 \alpha = \\ &= -\sin 2\alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) = -\sin 2\alpha \cos 2\alpha, \end{aligned}$$

можемо упевнитися, що формули (3) та (4) тотожно співпадають. Однак це неможливо, оскільки відомо [7], що момент інерції будь-якого перерізу відносно центральної осі завжди менше, ніж момент інерції відносно паралельної осі, проведеної на деякому віддаленні від центральної:

$$J = J_C + a^2 F, \quad (5)$$

де J – момент інерції відносно осі, паралельної до центральної; a – відстань між осями; F – площа перерізу.

Мета і задачі дослідження

Достовірність формули (4) не викликає сумнівів, оскільки детальні викладки щодо її одержання наведені у роботі [8]. Отже, представлені в даній роботі дослідження мають на меті обґрунтування альтернативної формули для визначення моменту інерції кругового сегменту відносно його центральної осі. Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні задачі: на основі залежностей між моментами інерції при паралельному переносі осей отримати формулу для визначення моменту інерції кругового сегменту відносно його центральної осі; обґрунтувати достовірність отриманої формули; провести розрахунки за отриманою формулою при різних значеннях центрального кута, на який опирається сегмент.

Дослідження

Для розглядуваного випадку формулу (5) можемо переписати у вигляді:

$$J_{x_C} = J_x - y_C^2 F, \quad (6)$$

де y_C – відстань між осями x та x_C (див. рис. 2).

З роботи [9] відомо, що координата центра інерції та площа кругового сегмента визначаються відповідно за формулами:

$$y_C = \frac{4}{3} r \frac{\sin^3 \alpha}{\frac{2\pi\alpha}{180} - \sin 2\alpha}, \quad (7)$$

та

$$F = \frac{r^2}{2} \left(\frac{2\pi\alpha}{180} - \sin 2\alpha \right). \quad (8)$$

Таблиця 1. Результати розрахунків моменту інерції кругового сегменту відносно центральної осі

Центральний кут (2α), °	20	40	60	80	100	120	140	160	180
Зведений момент інерції (J_{x_c}/r^4)	$5,58 \cdot 10^{-8}$	$6,91 \cdot 10^{-6}$	$1,12 \cdot 10^{-4}$	$7,76 \cdot 10^{-4}$	$3,35 \cdot 10^{-3}$	0,0106	0,0271	0,0583	0,1098

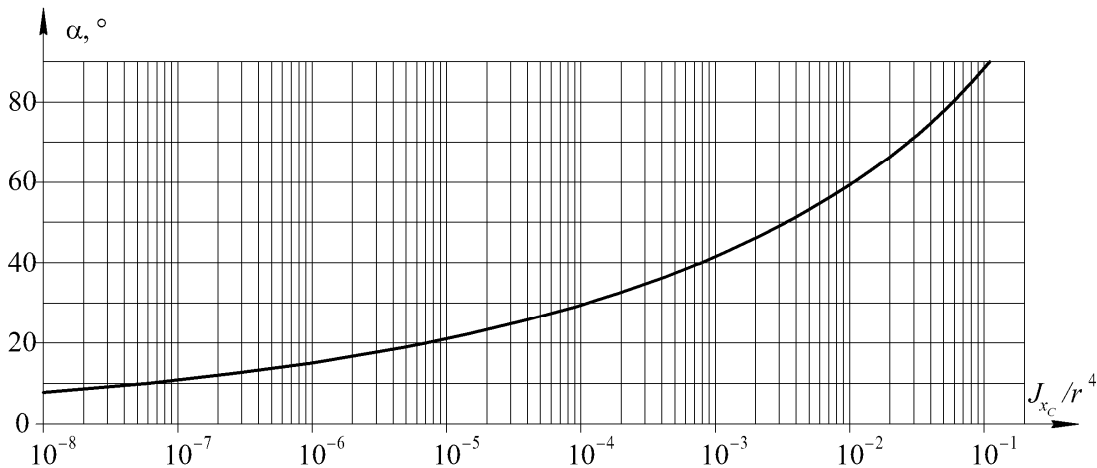


Рис. 3. Залежність зведеного моменту інерції відносно центральної осі кругового сегменту від величини центрального кута

Підставивши (4), (7) та (8) у (6), після перетворень отримаємо формулу для визначення моменту інерції сегменту відносно центральної осі x_c :

$$J_{x_c} = \frac{r^4}{8} \left[\frac{2\pi\alpha}{180} - \sin 2\alpha \cos 2\alpha - \frac{64 \sin^6 \alpha}{9 \left(\frac{2\pi\alpha}{180} - \sin 2\alpha \right)} \right]. \quad (9)$$

Для обґрунтування достовірності цієї формули зауважимо, що при $\alpha = 90^\circ$ сегмент перетворюється на півкруг, тому при підстановці в неї цього значення отримаємо формулу:

$$J_{x_c} = r^4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) \approx 0,1098r^4, \quad (10)$$

яка повністю співпадає з формулою, наведеною в роботі [10] для визначення моменту інерції півкруга відносно його центральної осі.

Очевидно, що при збільшенні α від 0 до 90° переріз сегмента буде збільшуватись від точки з нульовою інерцією до півкруга, величина моменту інерції якого визначається формулою (10). Для підтвердження проведемо розрахунки за формулою (9) при проміжних значеннях α (табл. 1).

З аналізу таблиці 1 можна побачити, що зі збільшенням центрального кута момент інерції збільшує-

ться, досягаючи свого граничного значення, яке відповідає півкругу. Оскільки в діапазоні можливих значень центрального кута зведений момент інерції змінюється на декілька порядків, при побудові графіка залежності (рис. 3) величини останнього будемо відкладати на логарифмічній шкалі.

Як бачимо, графік функції $J_{x_c}(\alpha)$ є монотонно зростаючим на всьому проміжку зміни α , чим засвідчується адекватність запропонованої формули (9).

Висновки

Математично обґрунтовано, що відома з літературних джерел формула для визначення моменту інерції кругового сегменту відносно центральної осі, яка не проходить через центр круга, є неправильною. Запропоновано нову уточнену формулу для визначення цієї геометричної характеристики, яка була виведена на базі перевірених залежностей. Наведені переконливі докази того, що запропонована формула адекватно відображає закономірності зміни досліджуваної характеристики в залежності від величини центрального кута, на який опирається сегмент. Для зручності розрахунків побудовано графік залежності зведеного моменту інерції від центрального кута в широкому діапазоні зміни останнього.

References

- [1] S. I. Kuchuk-Yatsenko et al., “Flash-butt welding of high-strength rails of nowadays production,” *The Paton Welding Journal*, No. 5-6, pp. 4–12, Jul. 2016, doi: 10.15407/tpwj2016.06.01.
- [2] I. V. Ziakhor et al., “Modern technologies of welding railway rails (Review),” *The Paton Welding Journal*, No. 8, pp. 4–16, Aug. 2023, doi: 10.37434/tpwj2023.08.01.
- [3] A. V. Moltasov, P. M. Tkach and K. Krasnowski, “Method for strength calculating of structural elements of mobile machines for flash butt welding of rails”, *Mech. Adv. Technol.*, No. 3(81), pp. 5–9, Dec. 2017, doi: 10.20535/2521-1943.2017.81.114528.
- [4] G. S. Pysarenko, O. L. Kvitka and E.S. Umans'kyi, *Opir materialiv, pidruchnyk*, 2nd Ed., G.S. Pysarenko Ed., Kyiv: Vysycha Shkola, Ukraine, 2004, ISBN 966-642-056-2.
- [5] O. A. Kornilov, *Opir materialiv*, 4th Ed., Kyiv: Osnova, Ukraine, 2005, ISBN 966-699-118-7.
- [6] G. S. Pysarenko, A. P. Yakovlev and V. V. Matveev, *Spravochnik po soprotivleniyu materialov*, Naukova dumka, Kiev, Ukraine, 1975.
- [7] B. A. Obodovskiy and S.Ye. Khanin, *Soprotivleniye materialov v primerah i zadachah*, 4th Ed., Kharkov: Vysycha Shkola, Ukraine, 1981.
- [8] N. M. Belya'ev et al., *Sbornik zadach po soprotivleniyu materialov*, V. K. Kachurin Ed., Moscow: Nauka, 1970.
- [9] V. I. Shvab'yuk, *Opir materialiv*, Kyiv: Znannja, Ukraine, 2016, ISBN 978-617-07-0306-4.
- [10] H. G. Hahn, *Technische Mechanik fester Körper*, 2. Aufgabe, Carl Hanser Verlag, München, Deutschland, Wien, Österreich, 1990, ISBN 3-446-17149-5.

Engineering method for determining the axial moment of inertia of a circular segment

A.V. Moltasov¹ • M.Y. Koval¹ • M.G. Malgin¹ • A.M. Levchuk¹

¹ E.O. Paton Electric Welding Institute of the National Academy of Science of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Abstract. The work is devoted to the analytical study of the geometric characteristics of a circular segment, in particular the moment of inertia relative to its central axis, which does not pass through the center of the circle. It is proved that the formula given in the literature for determining the studied characteristic is incorrect, therefore the purpose of the work is to determine the cause of the error and clarify this formula. The paper identified the cause and determined the member of the existing formula that led to the error. On the basis of the dependences between the moments of inertia during the parallel transfer of axes, a new formula was obtained for determining the moment of inertia of a circular segment relative to its central axis. It was established that at the maximum value of the central angle on which the segment rests, the proposed formula is identical to the formula for determining the moment of inertia of a semicircle relative to the corresponding axis available in the literature. Based on the proposed formula, calculations of the reduced moment of inertia at different values of the central angle were carried out. As a result, it was found that as the central angle increases, the moment of inertia increases, reaching its limit value, which corresponds to a semicircle. A graph of dependence is constructed, which is convenient to use to determine the value of the investigated moment of inertia when the central angle changes from ~ 20 to 180° .

Keywords: geometric characteristics of plane sections, bending, axial moment of inertia, central axis, circular segment, semicircle.