

Моделі пошкоджуваності композиційних матеріалів

Я. В. Демешко¹ • М. І. Бобир¹

Received: 31 January 2024 / Revised: 24 February 2025 / Accepted: 11 March 2025

Анотація. Виконано аналіз сучасних моделей пошкоджуваності та критеріїв руйнування композитних матеріалів (КМ) на стадії зародження макротріщини та визначено межі їх застосування. Розглянуто класифікацію КМ, а також основні гіпотези та припущення, що використовуються для побудови рівнянь стану. Особливу увагу приділено стадії зародження та накопичення розсіяних пошкоджень на мікро- та мезорівнях, як ключовій фазі життєвого циклу виробу із КМ. Застосовано положення континуальної механіки пошкоджуваності, термодинаміки незворотних процесів та механіки твердого деформованого тіла.

Актуальність роботи обумовлена зростаючими вимогами до надійності та довговічності конструкцій із КМ, особливо в авіаційній, автомобільній та будівельній галузях. Незважаючи на значний прогрес у дослідженнях, існує потреба у вдосконаленні моделей пошкоджуваності, які б враховували складні мікро- та мезомасштабні процеси руйнування.

Застосовано методи континуальної механіки пошкоджуваності, термодинаміки незворотних процесів та механіки деформованого тіла. Розглянуто феноменологічні та мікроефективні моделі пошкоджуваності, що описують накопичення пошкоджень у матриці, армуючих волокнах та на міжфазних поверхнях.

Описано основні механізми мікроруйнування в армованих КМ, які включають пошкодження матриці, армуючих волокон та інтерфейсу між ними. Продемонстровано необхідність врахування комплексу феноменологічних параметрів для опису кінетики накопичення пошкоджень. Зазначено, що складні процеси в армованих КМ потребують феноменологічного моделювання пошкоджуваності із застосуванням тензорних величин і певних припущень, зокрема гіпотези «суміші». Підтверджено доцільність використання гіпотези еквівалентності питомих енергій для визначення компонентів параметра пошкоджуваності.

Ключові слова: композиційні матеріали, ламінати, моделі пошкоджуваності, граничний стан.

Вступ

Останніми роками спостерігається значний перехід від використання традиційних металевих матеріалів до полімерних композитів, зокрема тих, що базуються на епоксидних матрицях із вуглецевими та скляними волокнами, включаючи органопластики [1]. Завдяки унікальним властивостям та механічним характеристикам композитів за умов комбінованих циклічних і ударних навантажень, а також завдяки розвитку технологій їх виготовлення та обробки, їх роль

суттєво зростає. Розуміння та прогнозування процесів пошкоджуваності композитів є важливим етапом для створення безпечних і надійних силових елементів конструкцій. Зменшення витрат і підвищення міцності цих матеріалів потребує розробки нових математичних моделей, які дозволяють більш точно передбачати місця виникнення пошкоджень і процеси руйнування.

Композити можна класифікувати за наступними параметрами: за типом матриці (полімерна, металічна, керамічна, вуглецева) та за типом армування (волокнисті, ламінатні та гібридні).

Ламінати – це різновид багатошарових КМ, що складаються з кількох шарів (ламінатів), які зазвичай мають різний матеріал, структуру, орієнтацію волокон, товщину та механічні характеристики. Орієнтація волокон у кожному шарі може бути обрана таким чином, щоб забезпечити максимальну міцність у певних напрямках або стійкість до пошкоджень. [2] Ламінатні

✉ Я. В. Демешко
demeshko.yaroslav.01@gmail.com

¹ КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

композити забезпечують високу жорсткість і міцність, зокрема в напрямку волокон. Завдяки можливості контролювати орієнтацію волокон у різних шарах, можна оптимізувати механічні властивості для конкретних навантажень. Це особливо важливо в авіакосмічній, хімічній та автомобільній галузях виробництва. [3]

У загальному випадку слід вважати, що композити анізотропні та однорідні. Залежність між напруженнями і деформаціями в декартовій прямокутній системі координат x, y, z може бути представлена в такому вигляді:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ E_{51} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} & E_{56} \\ E_{61} & E_{62} & E_{63} & E_{64} & E_{65} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де E_{ij} являють собою модулі пружності КМ. Якщо врахувати умову $E_{ij} = E_{ji}$, то рівняння (1) можна записати наступним чином:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ & & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ & & & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ & & & & E_{55} & E_{56} \\ & & & & & E_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Мета роботи

Метою роботи є аналіз сучасних методів оцінки накопичення пошкоджень та граничного стану КМ на мікро-мезо рівнях, як основного етапу життєвого циклу несучих елементів конструкцій різного призначення та визначення границь їхнього використання.

Пошкоджуваність КМ

Розвиток пошкоджень та руйнування композитів описується значно складніше в порівнянні з традиційними матеріалами, оскільки пошкодження в КМ мають більш складну фізичну природу. Прогнозування поведінки композитної конструкції під різними навантаженнями є важливим завданням для забезпечення надійності та безпеки в інженерній практиці, що підкреслює необхідність використання сучасних аналітичних підходів для оцінки впливу пошкоджень на властивості матеріалів та сприяє підвищенню точності розрахунків та оптимізації конструкцій. При цьому перша стадія руйнування (стадія зародження макротріщини) в

КМ описується згідно основних положень континуальної механіки пошкоджуваності (КМП). Зупинимось детально на названій стадії. Вона є найбільш тривалою в життєвому циклі виробу з КМ.

Найбільш зручним для інженерного використання є феноменологічний підхід в КМП. В якості базового експерименту в ньому використовують закономірності деградації основних фізико-механічних характеристик КМ в залежності від термосилових параметрів експлуатаційного навантаження. Модуль Юнга та модуль зсуву – це константи пружного матеріалу які зазвичай використовуються в інженерії. Відповідні скалярні параметри пошкодження D традиційно визначаються в термінах ефективних інженерних коефіцієнтів пружності для характеристики стану пошкодження; виходячи з еквівалентності пошкодженого та непошкодженого КМ за параметрами деформації або питомої енергії, відповідно:

$$D_E = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \quad D_G = 1 - \frac{\tilde{G}}{G} \quad D_K = 1 - \frac{\tilde{K}}{K}$$

або $D_E = 1 - \sqrt{\frac{\tilde{E}}{E}} \quad D_G = 1 - \sqrt{\frac{\tilde{G}}{G}} \quad D_K = 1 - \sqrt{\frac{\tilde{K}}{K}} \quad (3)$

де \tilde{E} , \tilde{G} , \tilde{K} модулі пружності першого, другого роду; та об'ємний модуль пошкодженого КМ.

Для розрахунку напружено-деформованого стану та несучої здатності несучих елементів конструкцій із КМ використовують правило суміші, теорію комірок та теорію ортотропних матеріалів.

Достатньо широке застосування отримав метод “правила суміші”. Згідно цього методу армований композит можна представити на мікрорівні шаром армуючого елемента та шаром матриці з використанням припущення, що розподілення навантажень та деформацій в обох шарах є рівномірними. Тоді будуть справедливими такі залежності для знаходження модуля пружності та напруження [3]:

$$E_c = \alpha E_f V_f + E_m V_m; \quad \sigma_R = \beta \sigma_{fu} V_f + (\sigma_m)_{\varepsilon_{fu}} V_m, \quad (4)$$

де E_f та E_m - модулі пружності волокна та матриці відповідно; E_c та σ_R - модуль пружності першого роду та напруження при руйнуванні композита; σ_{fu} - напруження волокна при руйнуванні; $(\sigma_m)_{\varepsilon_{fu}}$ - напруження в матриці, що відповідає руйнівній деформації волокна; α та β - коефіцієнти, що залежать від розташування волокна (при однонаправленому зміцненні $\beta = 1,0$; при ортогональному $\beta = 0,5$; при випадковому розташуванні $\beta \approx 3/8$), V_f та V_m - об'ємний вміст волокна та матриці КМ відповідно.

Ще одним важливим методом є “теорія комірок” [3]. Розглядається композит армований неперервними волокнами, які розташовані під кутом θ до осі x

(рис. 1). При цьому врахується, що в даному випадку має місце двовимірна деформація.

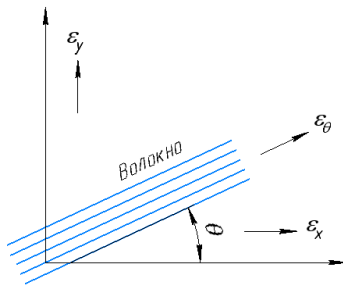


Рис. 1. Розташування волокна в системі координат

Деформацію ϵ_θ , в напрямку волокна, можна представити наступним чином:

$$\epsilon_\theta = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta . \quad (5)$$

В даному випадку для окремого ламінату рівняння (1) можна записати наступним чином:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} . \quad (6)$$

Для випадку, коли волокна рівномірно розподілені у всіх напрямках, маємо наступні формули для модулів пружності [6]:

$$E_{11} = E_{22} = \frac{3}{8} E_f V_f \quad E_{12} = \frac{1}{8} E_f V_f \quad E_{16} = E_{26} = 0 . \quad (7)$$

Тоді модуль пружності першого роду E_c , модуль пружності другого роду G_c та коефіцієнт Пуассона ν_c можна записати наступним чином:

$$\begin{aligned} E_c &= E_{11} - \frac{E_{12}^2}{E_{22}} = \frac{1}{3} E_f V_f \\ G_c &= E_{12} = \frac{1}{8} E_f V_f \\ \nu_c &= \frac{E_c}{2G_c} - 1 = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (8)$$

Іншим підходом розгляду КМ є теорія ортотропного пружного матеріалу [6]. В цьому випадку вибирають характеристичні вісі L та T згідно основних напрямків композиту (рис. 2). А залежності між напруженнями та деформаціями в цьому випадку будуть набувати вигляду:

$$\epsilon_L = \frac{\sigma_L}{E_L} - \nu_{LT} \frac{\sigma_T}{E_T} ;$$

$$\epsilon_T = -\nu_{LT} \frac{\sigma_L}{E_L} + \frac{\sigma_T}{E_T} ; \quad \nu_{LT} = \frac{\tau_{LT}}{G_{LT}} , \quad (9)$$

де ν_{LT} та ν_{TL} - коефіцієнти Пуассона.

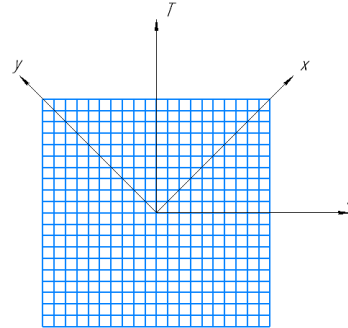


Рис. 2. Основні напрямки волокон в системі координат

Використовуючи “правило суміші”, знаходяться модулі пружності E_L та E_T :

$$\begin{aligned} E_L &= \alpha E_f V_f + E_m (1 - V_f) ; \\ E_T &= \frac{E_f E_m}{E_m V_f + E_f (1 - V_f)} . \end{aligned} \quad (10)$$

Для ламінатних композитів розроблено моделі пошкоджуваності, що використовуються для прогнозування розвитку пошкоджень під час експлуатації. Ці моделі дозволяють аналізувати процеси виникнення та росту тріщин, деламінацію, а також руйнування волокон та матриці. Вони також дозволяють прогнозувати міцність КМ в різних умовах [3].

Стадії та види руйнувань в ламінатах

Під час експлуатації ламінатних композитів в них виникають наступні типи пошкоджень: деламінація, матричні тріщини та руйнування волокон [4]. Ці типи руйнування можна узагальнити як внутрішньоламінатне пошкодження та міжпланарне пошкодження [5].

Враховуючи неоднорідну структуру утворення мікротріщин у композитах та основні положення континуальної механіки пошкоджень, в роботі [6] описано механізми руйнування на мікро- та мезорівнях. Серед них вирізняють: матричне мікророзтріскування; руйнування волокна при стиску та при розтягу; міжфазне розслоювання; деламінація;

При цьому мікророзтріскування матриці часто виникає внаслідок термосилового експлуатаційного та технологічного навантажень. Цей механізм пошкодження майже не впливає на властивості жорсткості матеріалу.

Натомість, руйнування волокна значно знижує жорсткість у напрямку волокон і залишкову міцність,

що часто сприяє розтріскуванню матриці або відокремленню волокна від неї. Розрив волокна, зазвичай, стається під дією розтягуючого навантаження у напрямку волокон. Після руйнування слабких волокон напруження перерозподіляються на решту волокон, які тепер змушені нести більше навантаження. Під час стиску волокон відбувається їх мікропрогин, що розділяється на два типи: розширювальний та зсувний, в залежності від деформації волокон один від одного.

Міжфазне розшарування розпочинається з початкового розтріскування матриці навколо волокна, що викликає різну деформацію компонентів. Збільшення деформації волокна призводить до більш значного скорочення коефіцієнта Пуассона, що може бути достатньо високим, щоб спричинити розрив між волокном та матрицею [4].

Деламінацію можна розглядати як процес мікро-розтріскування матриці, що відбувається в площині між двома шарами композитного матеріалу. Мікророзтріскування спричинені нормальними напруженнями по товщині та зсувними напруженнями на міжшаровій поверхні, що поширюються на коротку відстань у площину шарового композиту. Цей процес не вимагає великої кількості енергії для розвитку, але може значно знизити жорсткість матеріалу [5].

Названі механізми необхідні для розуміння і прогнозування пошкоджуваності КМ на мікро- та мезорівнях. Їх розуміння дозволяє розробляти моделі, які можуть точно відображати поведінку матеріалу під різними умовами навантаження, з врахуванням параметрів пошкоджуваності що пов'язані з кожним механізмом руйнування.

Критерії руйнування

Для інженерних розрахунків, як правило, використовується феноменологічний підхід. На цій основі сформульовано критерії руйнування КМ, які зосереджуються на макроскопічній поведінці напружено-деформованого стану матеріалу. При цьому використовують їх формулювання в напруженнях, деформаціях та питомих енергіях розсіювання. Останній підхід на сьогодні є найменш розробленим та обґрунтованим [7]. Названі критерії використовують уніфікований поліном або подібний математичний вираз для представлення загального стану КМ. Коли напружений або деформований стан матеріалу досягає чи перевищує критичний поріг, визначений цими виразами, вважається, що відбувається макроруйнування. Однак їх узагальнений характер, який розроблений, в основному, в напруженнях для умов статичного навантаження означає, що вони не завжди можуть точно передбачити конкретні режими руйнування або врахувати складні взаємодії в мікроструктурі матеріалу. Незважаючи на це, ці критерії залишаються популярним вибором у багатьох практичних застосуваннях, завдяки простоті використання

і швидкому розумінню поведінки матеріалу за різних умов навантаження.

Критерій Норріса-МакКіннона [8] спеціально розглядає анізотропні шаруваті пластики і пропонує критерій, який включає поздовжнє нормальне напруження σ_1 , поперечне нормальне напруження σ_2 і площинне напруження зсуву τ_{12} у вигляді:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 = 1, \quad (11)$$

де X і Y – границі міцності матеріалу у двох напрямках з врахуванням знаку нормальних напружень, відповідно. S_{12} – межа міцності на зсув в 1-2 площинах.

Критерій Норріса-МакКіннона вдосконалено шляхом додавання члена який враховує взаємодію напружень. При цьому підвищується точність прогнозування несучої здатності КМ. Таке коригування дозволяє точно оцінювати поведінку руйнування КМ за умов складного напруженого стану.

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{XY} = 1. \quad (12)$$

Критерій Цай-Хілла, також відомий як критерій Аззі-Цай [10], - узагальнює критерій текучості фон Мізеса для ізотропних матеріалів на трансверсально анізотропні матеріали. Він враховує взаємозв'язок між різними границями міцності матеріалу, але не розрізняє відмінності у властивостях матеріалу при розтягуванні та стисканні:

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S_{12}}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} = 1. \quad (13)$$

Критерій Гофмана [11] - це теоретична модель, що використовується для прогнозування руйнування КМ. При аналізі поведінки руйнування цих матеріалів критерій враховує їх з різну міцність на розтяг і стиск і додає лінійний член до критерію Цай-Хілла [10]. Таким чином забезпечується комплексний метод прогнозування руйнування для анізотропних матеріалів. Критерій використовується для аналізу міцності КМ зі значними анізотропними характеристиками, таких як армовані волокнами пластмаси:

$$\frac{X_c - X_t}{X_c X_t} \sigma_1 + \frac{Y_c - Y_t}{Y_c Y_t} \sigma_2 + \frac{\sigma_1^2}{X_t X_c} + \frac{\sigma_2^2}{Y_t Y_c} + \frac{\tau_{12}^2}{S_{12}^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_t X_c} = 1, \quad (14)$$

де Y_c - поперечна міцність матеріалу на стиск.

Критерій Цай – Ву покращує узгодженість між теорією міцності та експериментальними результатами. Припускається, що поверхня руйнування у просторі напружень має наступний вигляд [12]:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6), \quad (15)$$

$$\text{де } F_1 = \frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c}, F_2 = \frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c}, F_{11} = \frac{1}{X_t X_c},$$

$$F_{22} = \frac{1}{Y_t Y_c}, F_{66} = \frac{1}{S_{12}^2}.$$

При цьому коефіцієнт напружень F_{12} потрібно визначати за допомогою експериментальних випробувань на двовісний розтяг ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$):

$$F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2} \left[1 \left(\frac{X_c - X_t}{X_t X_c} + \frac{Y_c - Y_t}{Y_t Y_c} \right) \sigma - \frac{X_t X_c + Y_t Y_c}{X_t X_c Y_t Y_c} \sigma^2 \right]. \quad (16)$$

В нормованих величинах залежність (16) має вигляд:

$$F_{12}^* = \frac{F_{12}}{\sqrt{F_{11} F_{22}}} \quad (17)$$

Для забезпечення критеріального рівняння визначається замкнута огинаюча пошкоджень (лінія). Діапазон значень F_{12}^* : $-1 \leq F_{12}^* \leq 1$

Для інженерного застосування критерії Цай-Ву, Гофмана, Цай-Хілла та Норріса є ключовими. Кожен з яких має характеристики та обмеження. Критерій Цай-Ву, що застосовується переважно до анізотропних матеріалів, таких як композити, відомий своєю здатністю вміло враховувати взаємодію між різними компонентами напружень, хоча він і вносить певну складність у практичну реалізацію. На відміну від нього, критерій Гофмана, що застосовується для ортотропних матеріалів, добре адаптується до різних інтенсивностей розтягування і стискання. Критерій Цай-Хілла є похідним від теорії текучості фон Мізеса, що застосовується для анізотропних матеріалів, і забезпечує спрощений підхід до аналізу напружень. Нарешті, критерій Норріса пристосований для таких матеріалів, як дерево, які демонструють різну міцність на розтяг і стиск, забезпечуючи цілеспрямований аналіз, але не є універсальним для матеріалів з більш однорідною поведінкою. Кожен з цих стандартів відіграє важливу роль у процесі проектування конструкцій, і його застосування залежить від конкретних властивостей матеріалу та поточних інженерних вимог.

Континуальна механіка пошкоджуваності

Континуальна механіка пошкоджуваності (КМП) – використовує поняття пошкоджуваності у вигляді скаляра, вектора або тензора, які відображають деградацію механічних властивостей конструкційного матеріалу в залежності від термосилових параметрів навантаження.

Згідно роботи [13] у КМП змінні пошкоджуваності КМ визначаються як ефективна поверхнева густина мікронесуцільностей та різного роду мікротріщин у репрезентативному об'ємному елементі (RVE). Він являє

собой невеликий об'єм, який фіксує основні особливості мікроструктури композиту, що дозволяє визначити загальні властивості на основі локальної поведінки. RVE має вирішальне значення для розуміння того, як локальні пошкодження впливають на загальні характеристики композиту. RVE у поєднанні з концепцією ефективного напруження та принципом еквівалентності, призвело до появи методів вимірювання пошкоджень, заснованих на деградації фізико – механічних властивостей КМ. Ці концепції були узагальнені на тривимірний випадок, використовуючи поняття потенціалу стану та потенціалу дисипації. Відповідно, між пружною деформацією і пошкодженням виникає зв'язок стану, а між пластичною деформацією і пошкодженням – кінетичний зв'язок, що дозволяє розраховувати деформації і пошкодження аж до руйнування, якщо відомі складові рівняння для пошкодження.

При визначенні пошкоджуваності матеріалу, треба визначити змінні пошкоджуваності. Їх можна визначити як відношення зміни модулів пружності [13]:

$$\begin{aligned} D_{11} &= 1 - \frac{\tilde{E}_1}{E_0} & D_{22} &= 1 - \frac{\tilde{E}_2}{E_0} & D_{33} &= 1 - \frac{\tilde{E}_3}{E_0} \\ D_{12} &= 1 - \frac{\tilde{\nu}_{12}}{\nu_0} & D_{31} &= 1 - \frac{\tilde{\nu}_{31}}{\nu_0} & D_{23} &= 1 - \frac{\tilde{\nu}_{23}}{\nu_0} \\ D_{44} &= 1 - \frac{\tilde{G}_{23}}{G_0} & D_{55} &= 1 - \frac{\tilde{G}_{13}}{G_0} & D_{66} &= 1 - \frac{\tilde{G}_{12}}{G_0} \end{aligned} \quad (18)$$

де E_0 , ν_0 , G_0 - модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона та модуль зсуву непошкодженого матеріалу; \tilde{E}_1 , \tilde{E}_2 , \tilde{E}_3 , $\tilde{\nu}_{12}$, $\tilde{\nu}_{23}$, $\tilde{\nu}_{31}$, \tilde{G}_{21} , \tilde{G}_{23} , \tilde{G}_{31} – відповідні механічні характеристики пошкодженого матеріалу. Тоді матриця пошкоджуваності буде мати наступний вигляд [13]:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{13} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Скалярні змінні пошкоджуваності є відносно простими показниками, які вводять як перше наближення для кількісного оцінювання рівня пошкодження матеріалу в загальному формулюванні континуальної механіки пошкодження. Такі змінні дозволяють моделювати погіршення механічних властивостей матеріалу.

Тензорні змінні пошкоджуваності представляють більш складний підхід, який дозволяє враховувати анізотропію КМ. Такий підхід дає можливість детально вивчати зміну механічної реакції матеріалу залежно від орієнтації пошкоджень, що особливо важливо для композитів і складних матеріалів із внутрішньою структурною неоднорідністю.

У статті [14] представлено модель пошарової пластини (рис. 3) на основі напружень, яка ефективно враховує локальні тривимірні поля напружень, зокрема, міжшарові напруження. Це має вагоме значення для прогнозування виникнення і поширення розшарування. Модель призначена для усунення обмежень існуючих методів, таких як повне 3D-моделювання і моделі когезійних зон, які можуть бути обчислювально складними.

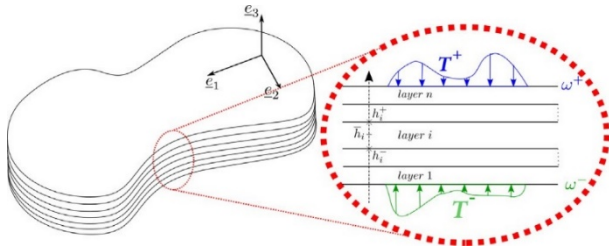


Рис. 3. Вигляд пластини з ламінатного композиту

Для формулювання пошарової моделі було застосовано підхід континуальної механіки пошкодження. Це передбачає використання двох скалярних змінних пошкодження, які представляють процеси деградації на інтерфейсах, що дозволяє детально описати механізми руйнування, пов'язані з розшаруванням.

Значним досягненням є встановлення критерію поширення розшарування в змішаному режимі. Цей критерій є похідним від зв'язку двох змінних пошкодження ($d_v^{m,m+1}$, $d_\tau^{m,m+1}$), що дозволяє моделі враховувати взаємодію між режимом розкриття (режим I) і режимом ковзання розшарування (режим II). Для цього ми розглядаємо векторну змінну d , що представляє міжшарову деградацію шаруватої структури. Вона складається з двох скалярних змінних пошкодження: $d_v^{m,m+1}$ та $d_\tau^{m,m+1}$ що дозволить моделювати змішану взаємодію між розшаруванням за режимом I та режимом II, відповідно.

Модель багатомасштабного пошкодження описана в роботі [15]. Вона пропонує багатомасштабну обчислювальну структуру для моделювання пошкоджень у 3D тканих композитних ламінатах, враховуючи випадковий розподіл дефектів, спричинених виробництвом. Ортогональні 3D тканинні композити складаються з трьох перпендикулярних просочених ниток. Кожна нитка локально розглядалася і аналітично відповідно до її орієнтації та об'ємної частки в елементарній комірці. Складова модель просоченої пряжі була трансформована з локальної (123) в глобальну (XYZ) систему координат (рис. 4), використовуючи рівняння:

$$\sigma_{ij}^G = [T_p^{n,G|L}]^T \sigma_{ij}^L \quad (20)$$

$$\epsilon_{ij}^G = [T_p^{n,G|L}]^T \epsilon_{ij}^L \quad (21)$$

$$C_{ij}^{n,G} = [T_p^{n,G|L}]^{-1} [C_{ij}^{n,L}] [T_p^{n,G|L}]^{-T} \quad (22)$$

де $ij = 1, 2 \text{ і } 3$, а p – нитки основи та сполучної нитки. σ_{ij}^L , ϵ_{ij}^L та $C_{ij}^{n,L}$ позначає вектор напружень, вектор деформацій та тензор жорсткості у локальній системі координат (123), відповідно. σ_{ij}^G , ϵ_{ij}^G та $C_{ij}^{n,G}$ кожна з яких позначає вектор напруження, вектор деформації та тензор жорсткості у глобальній системі координат (XYZ).

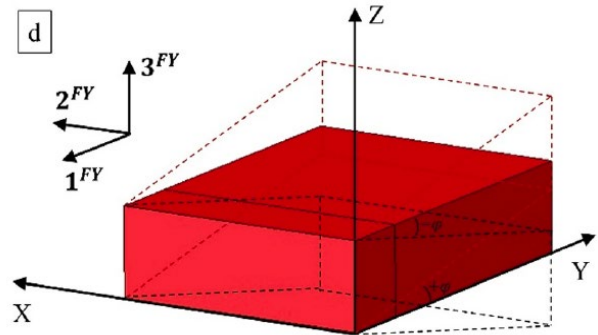


Рис. 4. Глобальна та локальна системи координат в композиті

$T_{ij}^{n,G|L}$ зображує унікальну матрицю перетворення для кожної просоченої нитки з локальної в глобальну систему координат, визначену як орієнтація нитки, θ^n , φ^n , та ψ^n . Матриця перетворення для ниток основи задається наступною формулою:

$$[T_p^{n,G|L}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \omega^n & \sin^2 \omega^n & 0 & 0 & 0 & 2 \cos \omega^n \sin \omega^n \\ \sin^2 \omega^n & \cos^2 \omega^n & 0 & 0 & 0 & -2 \cos \omega^n \sin \omega^n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \omega^n & -\sin \omega^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \omega^n & \cos \omega^n & 0 \\ -\cos \omega^n \sin \omega^n & \cos \omega^n \sin \omega^n & 0 & 0 & 0 & \cos \omega^n \sin \omega^n \end{bmatrix} \quad (23)$$

де ω^n – це кут нахилу ниток основи та ниток утоку між глобальною та локальною системами координат. В реальності маємо: $\omega^n = \theta^n = 0$ та $\omega^n = \varphi^n = 90^\circ$ проти годинникової стрілки, відповідно.

Цей метод простий у реалізації і вимагає невеликих обчислювальних ресурсів Отриманий розподіл технологічних дефектів (хвилястостей та пустот) подається в багатомасштабну модель прогресуючого пошкодження для прогнозування реакції на пошкодження

тривимірних (3D) ортогональних тканих композитів. Модель успішно відобразила стохастичну природу реакцій на розтягнення (межа міцності та жорсткості), режими пошкодження (пошкодження матриці та руйнування волокон), а також зародження та поширення поперечних тріщин у термопластичних 3D тканих композитах, що узгоджується з експериментальними спостереженнями.

Параметр щільності тріщин

Згідно нових теорій ізотропного пошкодження [16]–[18], для кількісної оцінки пошкодження використовуються подвійні скалярні змінні пошкодження, в залежності від значень яких знаходять та оцінюють значення інших скалярних змінних пошкодження.

Припускаючи, що $\tilde{\nu} = \nu$, де $\tilde{\nu}$ – ефективний коефіцієнт Пуассона, можна отримати наступний результат:

$$\frac{\tilde{K}}{K} = \frac{\tilde{G}}{G} = \frac{\tilde{E}}{E}. \quad (24)$$

Однак для ізотропного твердого матеріалу з довільно орієнтованими тріщинами результати теорії мікро механіки показують, що $\frac{\tilde{G}}{G} > \frac{\tilde{E}}{E}$ при параметрі щільності тріщин $\beta > 0$ та $\beta < 1$. Для ізотропного матричного матеріалу, що містить випадково розподілені сферичні мікротріщини, аналогічні результати можна отримати за допомогою теорії Морі-Танаки [19]–[21]:

$$\frac{\tilde{G}}{G} > \frac{\tilde{K}}{K}. \quad (25)$$

З класичної теорії механіки суцільного середовища добре відомо, що ізотропність матеріалу повинна бути визначена двома незалежними скалярними параметрами E та ν . Однак, щоб краще відобразити вплив пошкодження на модуль зсуву G , було введено ще одну скалярну змінну, відому як змінна пошкодження від зсуву. Згідно з однією з нових теорій ізотропного пошкодження, для більш точної кількісної оцінки пошкодження використовуються подвійні скалярні змінні. Виходячи з принципів термодинаміки незворотніх процесів, були розроблені формули для швидкості виділення питомої енергії за умов пошкодження. Ця величина може бути ефективним інструментом для розробки закону розширення пошкоджень, що важливо для вирішення практичних завдань у галузі інженерного проектування та обробки матеріалів.

Так в роботі [23] розглядається енергетичний підхід оцінки кінетики накопичення пошкоджень в КМ. В якості параметра обґрунтовано вибрано поняття так званої швидкості вивільнення питомої енергії пошкодження Y . Її умовно можна розкласти на дві складові: зміни форми репрезентативного елемента Y_S та

зміни об'єму Y_O . Названі складові параметра пошкоджуваності визначають в загальному вигляді через пружну питому додаткову енергію: W_e у вигляді:

$$W_e = \frac{1}{2} E_{ijkl}^{-1} \sigma_{ij} \sigma_{kl} = \frac{1}{2} E_{ijkl}^{-1} S_{ij} S_{kl} + \frac{1}{2} E_{ijkl}^{-1} \sigma_0^2 \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad (26)$$

де E_{ijkl} - матриця модулів пружності, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0$;

$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij}$ - девіаторна складова та середнє напруження тензора напружень відповідно. В результаті отримаємо [23]:

$$Y_S = \frac{\partial W_e}{\partial D_S}; \quad Y_O = \frac{\partial W_e}{\partial D_0}, \quad (27)$$

де D_S, D_0 - параметри пошкоджуваності КМ за рахунок зміни форми та об'єму, відповідно. Вони описують два механізми руйнування: відрив та зріз. Складові Y_S для умов одновісного розтягу металічних конструкційних матеріалів показані на рис. 5 та 6.

Аналіз отриманих результатів показує, що граничне значення параметру Y_{SR} , яке характеризує стабільність зародження макротріщини в металічних матеріалах з використанням гіпотези еквівалентних енергій (рівн. 3) та модуля пружності G менше по відношенню до аналогічної величини з використанням модуля E .

Для одновісного напруженого стану за умов розтягу [23]:

$$Y_{ES} = \frac{\sigma^2}{2E(1-D_E)^2}. \quad (28)$$

$$Y_{GS} = -\frac{\sigma^2}{6G(1-D_G)^2}. \quad (29)$$

Для визначення закономірностей кінетики накопичення пошкоджень в КМ з початковими мікро та мезонесуцільностями згідно роботи [23] наведемо формулу для енергії взаємодії еліптичної тріщини (а та b – півосі еліпса) в ізотропному матеріалі:

$$\Delta W_{total} = N \langle \Delta W \rangle = N \frac{1}{2} \pi a b^2 \sigma^2 \langle A^E \rangle. \quad (30)$$

Також наведемо формулу самоузгодженої моделі:

$$\Delta W_{total} = \frac{1}{2} V \sigma^2 (M - M_0). \quad (31)$$

Прирівняємо їх та отримаємо наступне:

$$\frac{1}{2} V \sigma^2 (M - M_0) = N \frac{1}{2} \pi a b^2 \sigma^2 \langle A^E \rangle. \quad (32)$$

Скоротимо на $\frac{1}{2} \sigma^2$:

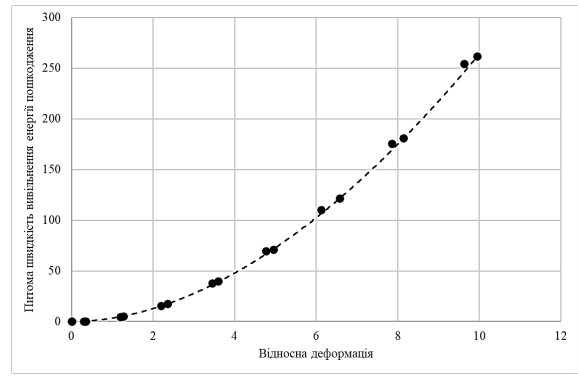
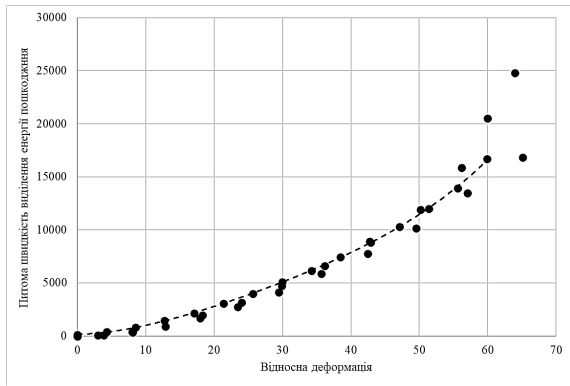


Рис. 5. Швидкість вивільнення питомої енергії пошкодження Y_{ES} для сталі 12X18H10T (а) та сплаву Д16 (б) від рівня пружно пластичного деформування ε

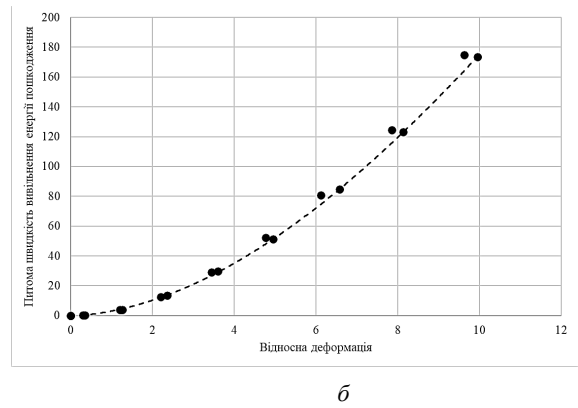
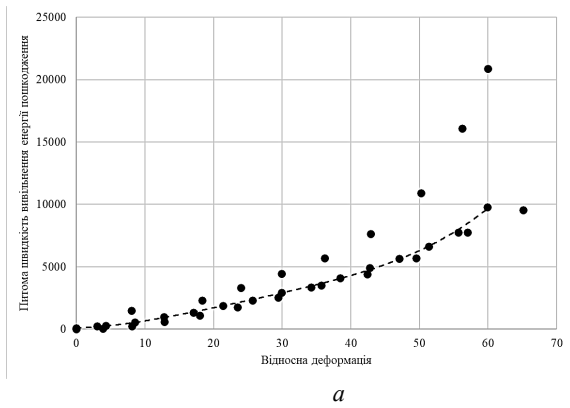


Рис. 6. Швидкість вивільнення питомої енергії пошкодження Y_{GS} для сталі 12X18H10T (а) та сплаву Д16 (б) від рівня пружно пластичного деформування ε

$$V(M - M_0) = N\pi ab^2 \langle A^E \rangle. \quad (33)$$

$$\beta = N \langle a^3 \rangle. \quad (38)$$

З виразу самоузгодженої моделі:

$$M - M_0 = \frac{n}{2} \pi a \langle b^2 \rangle \langle A^E \rangle. \quad (34)$$

Порівняємо обидва отриманих вирази:

$$V \frac{n}{2} \pi a \langle b^2 \rangle \langle A^E \rangle = N\pi ab^2 \langle A^E \rangle. \quad (35)$$

Скоротимо на $\pi a \langle A^E \rangle$

$$V \frac{n}{2} \langle b^2 \rangle = Nb^2. \quad (36)$$

Запишемо коефіцієнт щільності тріщин β :

$$\beta = N \langle ab^2 \rangle. \quad (37)$$

Для випадку тріщин у формі кола ($b = a$)

Для ізотропного твердого матеріалу з довільно орієнтованими мікротріщинами співвідношення $\frac{\tilde{E}}{E}$ та

$\frac{\tilde{G}}{G}$ визначаються на основі мікромеханіки детально описаної в роботах [23, 18, 24, 25];

$$\frac{\tilde{E}}{E} = \left(1 - \frac{16(1-\tilde{\nu}^2)(10-3\tilde{\nu})}{45(2-\tilde{\nu})} \beta \right)^2. \quad (39)$$

$$\frac{\tilde{G}}{G} = \left(1 - \frac{32(1-\tilde{\nu})(5-\tilde{\nu})}{45(2-\tilde{\nu})} \beta \right)^2, \quad (40)$$

де β – параметр щільності мікротріщин

$$\beta = \frac{45(\nu - \tilde{\nu})(2 - \tilde{\nu})}{16(1 - \tilde{\nu}^2)[10\nu - \tilde{\nu}(1 + 3\tilde{\nu})]} \quad (41)$$

і визначається

$$\beta = N \{a^3\}, \quad (42)$$

де a – радіус мікротріщини, N – кількість мікротріщин на одиницю об'єму, а $\{x\}$ позначає середнє значення змінної x . Підставимо рівня (39) та (40) в рівняння (3), отримаємо формули двох скалярних змінних пошкоджень:

$$D_E = \left(\frac{16(1-\tilde{\nu}^2)(10-3\tilde{\nu})}{45(2-\tilde{\nu})} \beta \right)^2. \quad (43)$$

$$D_G = \left(\frac{32(1-\tilde{\nu})(5-\tilde{\nu})}{45(2-\tilde{\nu})} \beta \right)^2. \quad (44)$$

Отримані залежності для $D_E(\beta)$ та $D_G(\beta)$ вимагають додаткових досліджень КМ з різними значеннями параметра несущості в межах $0 \leq \beta \leq \beta_{кр}$, $\beta_{кр}$ – критичне значення параметру.

Висновки

1. Оцінка міцності КМ здійснюється за двома основними підходами: структурний (який базується на фізичній основі та враховує гетерогенну мікроструктуру композиту) та феноменологічний – макроструктурний у вигляді загальних критеріїв граничного стану стадії зародження макротріщин. Останній найбільш

часто використовується для оцінки граничного стану КМ, які знаходяться в умовах складного напруженого стану.

2. В рамках феноменологічного підходу армований неоднорідний композит розглядається як суцільне середовище з певною симетрією властивостей. При цьому на сьогодні широке розповсюдження набули критерії граничного стану у вигляді максимальних напружень та максимальних деформацій, які враховують різні границі міцності при розтязі та стиску КМ. Серед них найбільш загальними та обгрунтованими є критерій Цая – Ву.

3. Показано що найбільш перспективним для прогнозування граничного стану КМ є енергетичний підхід з використанням основних положень термодинаміки незворотніх процесів та КМП. Для цього в систему визначальних рівнянь вводиться тензор пошкоджуваності з компонентами які враховують деградацію фізико – механічних властивостей КМ та основні механізми його руйнування як складного матеріалу у вигляді шаруватих композитів.

4. Встановлено, що в якості основних параметрів пошкоджуваності необхідно використовувати компоненти швидкості питомої енергії деформації, яка вивільняється в результаті накопичення пошкоджень в репрезентативному елементі КМ.

5. Обгрунтовано вид кінетичних моделей пошкоджуваності та критеріїв руйнування армованих КМ на стадії зародження макротріщин в енергетичній трактовці. Однак їх практичне застосування потребує подальшого детального експериментального обгрунтування згідно параметрів точності.

References

- [1] T. W. Clyne and D. Hull, *An Introduction to Composite Materials*, Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2019. <https://doi.org/10.1017/9781139050586>.
- [2] K. K. Chawla, *Composite Materials: Science and Engineering*, New York: Springer, 2013.
- [3] Т. Фудзії і М. Дзакі, *Механіка руйнування композиційних матеріалів*, Мир, 1982.
- [4] R. Talreja and C. V. Singh, *Damage and Failure of Composite Materials*, Cambridge: Cambridge University Press, 2012. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139016063>.
- [5] S. Sridharan and M. Pankow, "Performance evaluation of two progressive damage models for composite laminates under various speed impact loading", *International Journal of Impact Engineering*, vol. 143, 2020. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2020.103615>.
- [6] J. Zhou, P. Wen and S. Wang, "Finite element analysis of a modified progressive damage model for composite laminates under low-velocity impact", *Composite Structures*, vol. 225, Oct. 2019, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.111113>.
- [7] P. P. Lepikhin and V. A. Romashchenko, "Methods and Findings of Stress-strain State and Strength Analyses of Multilayer Thick-Walled Anisotropic Cylinders under Dynamic Loading (Review). Part 3. Phenomenological Strength Criteria", *Strength of Materials*, pp. 271–283, 25 July 2013.
- [8] D. Hartlen, J. Montesano and D. Cronin, "Modelling of Mode I delamination using a stress intensity factor enhanced cohesive zone model", *Composite Structures*, vol. 331, 2024, <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2024.117928>.
- [9] Y. Ding et al., "Damage and energy absorption behaviour of composite laminates under impact loading using different impactor geometries", *Composite Structures*, vol. 321, 2023, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117259>.
- [10] J. Vereckle et al., "Explicit modelling of meso-scale damage in laminated composites – Comparison between finite fracture mechanics and cohesive zone model", *Composites Science and Technology*, vol. 253, 2024, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2024.110640>.

- [11] V. D. Azzi and S. W. Tsai, “Anisotropic strength of composites: Investigation aimed at developing a theory applicable to laminated as well as unidirectional composites, employing simple material properties derived from unidirectional specimens alone”, *Experimental Mechanics*, Vol. 5, pp. 283–288, 1965, doi: <https://doi.org/10.1007/BF02326292>.
- [12] P. Goncalves, A. Arteino, N. Rocha and F. Otero, “Modeling 3D transverse elasto-plastic damage of unidirectional fiber-reinforced polymer composites using a smeared crack approach”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 286-287, 2024, doi: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2023.112568>.
- [13] S. W. Tsai, E. M. Wu and A. General, “Theory of Strength for Anisotropic Materials”, *Journal of Composite Materials*, Vol. 5, pp. 58–80, 1971, doi: <https://doi.org/10.1177/002199837100500106>.
- [14] A. Airolidi et al., “A model for damage and failure of carbon-carbon composites: development and identification through Gaussian process regression”, *Materials Today Communications*, Vol. 35, June 2023, doi: <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2023.106059>.
- [15] T.-F. Alireza, A. Cornejo, S. Jimenez and L. C. Barbu. “A rule of mixtures approach for delamination damage analysis in composite materials”, *Composites Science and Technology*, vol. 242, 29 Sep. 2023, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2023.110160>.
- [16] Shah et al., “Damage Modelling of Notched and Un-Notched 3D Woven Composites with Randomly Distributed Manufacturing Defects”, *Composite Structures*, vol. 223, pp. 110924, 2019.
- [17] J. Lemaitre, *A Course on Damage Mechanics*, Springer, Berlin, 1992.
- [18] G. R. Ibrahim, A. Albarbar and K. F. Brethee, “Damage degradation modelling for transverse cracking in composite laminates under low-velocity impact”, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 263, 2022, doi: <https://doi.org/10.1016/j.engfrac-mech.2022.108286>.
- [19] H. Liu et al., “Modelling damage in fibre-reinforced thermoplastic composite laminates subjected to three-point bend loading”, *Composite Structures*, vol 236, 15 March 2020, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.111889>.
- [20] S. Shan, et al., “Multiscale damage modelling of notched and un-notched 3D woven composites with randomly distributed manufacturing defects”, *Composite Structures*, vol. 318, 15 August 2023, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117109>
- [21] H. Wu, W. Xu, D. Shan, X. Wang, B. Guo and B. Jin, “Micromechanical modeling of damage evolution and fracture behavior in particle reinforced metal matrix composites based on the conventional theory of mechanism-based strain gradient plasticity”, *Journal of Materials Research and technology*, vol. 22, pp. 625 – 641, Jan.–Feb. 2023, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmrt.2022.11.139>
- [22] G. J. Weng, “The theoretical connection between Mori-Tanaka’s theory and the Hashin-Shtrikman-Walpole bounds”, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol 28, pp. 1111–1120, 1990, doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(90\)90111-U](https://doi.org/10.1016/0020-7225(90)90111-U)
- [23] P. Ladeveze, E. Dantec. Damage modelling of the elementary ply for laminated composites. *Composites Science and Technology* 1992, vol. 42, pp. 257–267, doi: [https://doi.org/10.1016/0266-3538\(92\)90097-M](https://doi.org/10.1016/0266-3538(92)90097-M).
- [24] N. Laws and J. R. Brockenbrough, “The effect of micro-crack systems on the loss of stiffness of brittle solids”, *International Journal of Fracture*, vol. 102, No. 1, pp. 39–51, 2000.
- [25] B. Budiansky and R. J. O’Connell, “Elastic moduli of a cracked solid”, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 19, pp. 81–97, 1976, doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(76\)90044-5](https://doi.org/10.1016/0020-7683(76)90044-5).

Damage Models of Composite Materials

Yaroslav Demeshko¹ • Mykola Bobyr¹

¹ National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv, Ukraine

Abstract. An analysis of modern damage models and failure criteria for composite materials (CM) at the stage of macrocrack initiation is performed and the limits of their application are determined. The classification of CMs, as well as the main hypotheses and assumptions used to construct equations of state are considered. Particular attention is paid to the stage of initiation and accumulation of scattered damage at the micro- and meso-levels as a key phase of the life cycle of a CM product. The concepts of continuum damage mechanics, thermodynamics of irreversible processes, and mechanics of a solid deformable body are applied.

The relevance of the work is due to the growing requirements for the reliability and durability of CM structures, especially in the aviation, automotive, and construction industries. Despite significant progress in research, there is a need to improve damage models that take into account complex micro- and mesoscale fracture processes.

The methods of continuum damage mechanics, thermodynamics of irreversible processes, and deformable body mechanics are applied. Phenomenological and micromechanical models of damage are considered, which describe the accumulation of damage in the matrix, reinforcing fibers, and interfaces.

The main mechanisms of microfracture in reinforced CMs are described, including damage to the matrix, reinforcing fibers, and the interface between them. The necessity of taking into account a set of phenomenological parameters to describe the kinetics of damage accumulation is demonstrated. It is noted that complex processes in reinforced CMs require phenomenological modeling of damage with the use of tensor quantities and certain assumptions, particularly the “mixture” hypothesis. The expediency of using the hypothesis of equivalence of specific energies to determine the components of the damage parameter is confirmed.

Keywords: composite materials, laminates, damage models, limit state.