

# Формалізація технологічних процесів на базі неевклідових геометрій: сферичної та геометрії Рімана

В. Ф. Забашта<sup>1</sup>

Received: 9 April 2025 / Revised: 15 May 2025 / Accepted: 20 June 2025

**Анотація.** Йдеться про продовження комплексу дослідницьких робіт [1]–[4] з моделювання та формалізації в напрямку ідей та понять зазначених вище геометрій. Найперше це стосується технологічного трактування геометричних образів на сфері зокрема еліптичній площині. Тут досліджувались прямі, що перетинаються або збіжні прямі – це пучок прямих з власною вершиною або еліптичний пучок. При цьому на макрорівні – щодо ТП, як сукупність етапів або станів ADC [2], а на підпорядкованому мезорівні – до окремого етапу ТП. При моделюванні поверхні сфери розглядається, як просторовий аналог центрального великого кола (екватор), центр якого співпадає з центром сфери. “Поле дії” цих геометрій (а також ТП), є поверхня сфери. А важливим в теорії тут перетворенням подібності вважається, що основним “побудовим” (утворюючим) елементом є зараз поєднана (склеєна) пара діаметрально-протилежних точок (або точки-антиподи [19] – умовна “точка”. З цими точками-антиподами пов’язані поняття “пряма” та “площина” саме в геометрії Рімана і в наступному їх технологічному трактуванні. Якщо на поверхні сфери (образ ТП) – це набір великих кіл (етапів ТП) і в сферичній геометрії це прямі, то в перетвореннях подібності – це “пряма” (набір умовних “точок”) з розміщенням на еліптичній площині. Оскільки еліптичний простір в рамках геометрії положення містить щонайменше чотири точки, то їм надано технологічне трактування з формальним представленням (квадратична форма).

**Ключові слова:** аксіоматика теорії, сфера, велике коло, еліптичний простір, точка, пряма, площина, перетворення подібності, розділення, двоїстість, квадратична форма, інтерпретація.

## 1. Вступ

### 1.1. Характеристика підходу

Сучасний етап розвитку науки характеризується взаємопроникненням, найперше, математики, зокрема в технологіях виробництва, в тому числі – композиційних АК [1]–[4], [7] та ін. Так, в опублікованому комплексі статей [1]–[4] під загальною назвою “Альтернативні технології композитних високонавантажених конструкцій: якісний метод прийняття багатокритеріальних рішень” об’єктами вихідного моделювання є важкоформалізуємі технологічно-оціночні багатofакторні процеси виготовлення композитних АК. Тому важ-

ливими стають рішення з опорою на науково-технічні дослідження. Але часто такі моделі створюють інваріантно, без врахування практики. Адже дуже великий вплив має суб’єктивний підхід, досвід розробника і достатньо великий рівень знань технологічної практики. В зазначених публікаціях представлена автономна система (ADC), де предметом моделювання є комплексний ТП, його етапи та зв’язки між ними. Вихідної позиції досліджень статті є загально прийняте положення, що еліптична геометрія – це геометрія з ототожненими точками. Це основоположний (основний концепт, або фактор), що справляє постійно вирішальний вплив при інтерпретаційних дослідженнях. Іншими словами з практики – це концептуальний фактор при технологічному регулюванні з можливістю його деталізації.

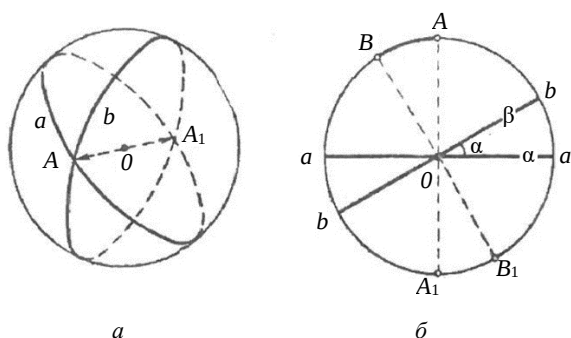
Як відомо, ТП – це процес пов’язаний з перетворенням енергії з залученням принципу найменшої дії, виступаючи тут, як метод оптимізації складної системи. Водночас, в будь-якому рімановому просторі екстремалі енергії і довжини співпадають. Саме, як диференціально-геометричний вираз процесу найменшої дії [7], [18].

✉ В. Ф. Забашта  
zabashtaevgeniy@gmail.com

<sup>1</sup> АТ Український науково-дослідний інститут авіаційної технології (УкрНДІАТ), Київ, Україна

## 1.2. Попередні теорії та особливості геометрії Рімана

Геометрія Рімана знаходить своє можливе застосування в науці та техніці, розширюючи зміст сутності в досліджуваних об'єктах. “Впершими предвісниками” геометрії Рімана та їх логічне провадження в просторі є: геометрія Евкліда, сферична та проєктивна геометрії [21]. В ній, слід зазначити теорему Дезарга (на площині). В проведеному дослідженні діалектичний підхід і принципи положень приймаються, як методологічна основа в проблемі інтерпретації (“помірної” версія) технології виробництва композитних об'єктів. В статті ставиться задача – знайти можливість залучення на практиці (технологія композитних АК) ідей, тверджень (положень) двох неевклідових геометрій: сферичної (СФГ) та сферичної ріманової геометрії (СФГ-Р) в їх сполученні в спрощено- конкретному технологічному трактуванні. В статті приймається, що поверхня сфери відображає загальний образ ТП (рис. 1, 2), а великі кола на сфері етапи (1, 2,...7) цього ТП.



**Рис. 1.** Початкова ілюстрація вихідних об'єктів в неевклідовій геометрії Рімана: *a* – представлення на сфері пересічення двох великих окружностей *a* і *b*; *A*, *A*<sub>1</sub> – точки їх пересічення; *б* – перетворене представлення на площині (*a*–*a* і *b*–*b* – умовна назва “прямі” щодо окружностей)



**Рис. 2.** Етапи ТП, як набір (1, 2,...7) великих кіл з ходом через полюса сфери (центри ТП) та екватор

На рис. 1 та рис. 2 є такі точки-антиподи: полюсів – *A*, *A*<sub>1</sub> та екватора *C*, *C*<sub>1</sub> (осі повернуті на 90° *C*). Вважається [7], [9]–[13], що можна одержати еліптичну геометрію із сферичної (тобто із геометрії евклідової

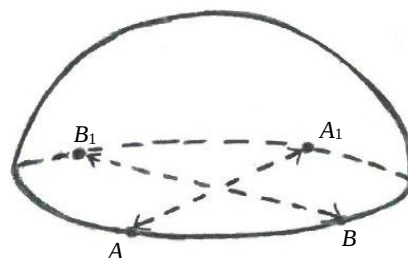
сфери), в якій головними елементами є точки і кола великих кругів із звичайними, елементарними відношеннями між ними, якщо виявити і вважати, як одну точку кожному парі діаметрально-протилежних точок-антиподів великого кола (в статті наприклад, екватор сфери) і вважати його за “пряму” (або *P*-пряму) еліптичної площини.

Тут при інтерпретації може бути використане поняття “технологічна конгруентність” у виробництві композитних АК. Конгруентність (з лат. – *congruens*) – співрозмірний, співпадаючий, який взаємно відображає), наприклад при русі сфери. В геометрії – це суміщення двох фігур, наприклад трикутників, що мають однакові форму і розміри. А технологічна конгруентність (узгодженість), наприклад, між етапами 3 та 4-ряд таких чинників: форми, розміри та цілісність складу ВСП, а також спільна оснастка [2]–[4]. При цьому образом півсфери [10] буде “розрізана” еліптична площина за винятком точок тієї прямої, яка відповідає колу великого кола, що обмежує дану півсферу<sup>2</sup> (з технологічною інтерпретацією).

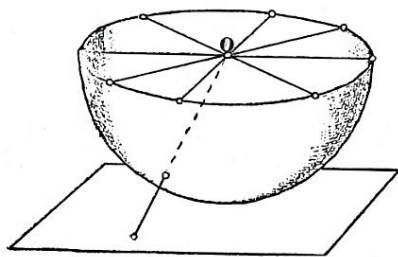
Особливість СФГ-Р у вигляді вихідного положення, що “пара діаметрально протилежних точок на сфері, як одна точка” представлено на рис. 2 (оригінал – [9], рис. 19а точки *A*, *A*<sub>1</sub>). Тут говориться, по-перше, що зазначені точки утворені при перетинанні двох великих кіл *a* і *b* (умовний відрізок *AA*<sub>1</sub>, що проходить через центр сфери) і, по-друге, що ці точки “склеюються” між собою.

Однак в статті обмаль пояснень щодо збіжності прямих, що перетинаються; саме, як еліптичного пучка прямої, з даною власною вершиною (центр пучка зв'язки). Тому в р. 4 (рис. 12 *б*) розглядається питання розосереджувального поєднання точок великих кіл (окремі етапи ТП) з введенням в фігуру великих кіл їх середніх ліній для означено дійсного положення діаметрально протилежних точок екватора сфери. Про вплив фактора обмежувального екваторного кола говорить такий факт [10].

Якщо взяти на сфері будь-яку область, що не містить жодної пари точок – антиподів наприклад, будь-яку півсферу, або півкулю сфери (без кола, що обмежує цю півкулю, то відображення на еліптичну площину буде взаємно однозначним (рис. 3 та рис. 4).



**Рис. 3.** Спрощене геометричне представлення площини Рімана: “поверхня” зі “склеєнням” співпадаючих точок (*A*–*A*<sub>1</sub>: *B*–*B*<sub>1</sub>) на верхній півсфері



**Рис. 4.** Теоретичне представлення площини на нижній півсфері, центр зв'язки –  $O$ . Відображення через центр точки проєктивної площини на дві крайові точки-антиподи півсфери [15]

При цьому образом півсфери [10] буде “розрізана” еліптична площина за винятком точок тієї прямої, яка відповідає колу великого кола, що обмежує дану півсферу.

Як відомо [7]–[20] всі теореми Рімана є належним чином витлумаченням теорем евклідової геометрії. Відповідно цьому, теореми геометрії Рімана виводяться із аксіом геометрій Евкліда. Певна річ, не всі теореми евклідової геометрії допускають тлумачення у вигляді теорем ріманової геометрії, більшість евклідових теорем не мають повного відношення до тих об'єктів, які відповідають “точкам” і “прямим” в рімановій площині [7]–[21]. Частково їх представлення має місце на рис. 1–рис. 15 в р.р. 1–4. Можливо, однак, в основу геометрії Рімана можливо покласти спеціальну систему аксіом (в тому числі пов'язаних з технологічною інтерпретацією), тобто ряд пропозицій тверджень (якщо відносяться до понять належності, порядку, зв'язку і конгруентності предметів ріманової площини), з яких всі інші твердження можуть бути виведені логічним шляхом (р. 6), при цьому кожний висновок буде приводити до певної теореми цієї геометрії. В цьому випадку стають байдужими всі властивості її фігур, окрім властивостей обумовлених аксіомами. Тим самим аксіоматичне обґрунтування геометрії Рімана перетворює її в абстрактну геометричну систему. Називаючи словами “точка”, “пряма” будь-які фігури, словами “лежить на” “ділять”, “рівні” будь-які їх відношення, які задовольняють вимогам аксіом Рімана, ми будемо знаходити різні конкретні моделі (в тому числі технологічного характеру) абстрактної геометрії Рімана.

Цю близькість порушує серйозна обставина, що прямі площини не можуть перетинатися більш ніж в одній точці, а два великих кола сфери завжди мають дві загальні точки [7], [13] і рис. 1. Для зближення цих геометрій, має місце згода про те, що основним “будовним” (утворюючим) елементом СФГ-Р є не одинарна точка, а зразу пара точок-антиподів рис. 1 та рис. 12 точки сфери  $A, A_1$ . Завдяки цьому перетворенню зазначають “полем дії” геометрії Рімана не всю сферу, а лише півсфери (р. 4, рис. 3 [18], ототожнюючи будь-які дві діаметрально протилежні точки обмежувального кола (екватора), при цьому слід зазначити, що при ото-

тожненні точок – антиподів сфери виходить проєктивна площина, геометрія, яка задовольняє аксіоми геометрії Рімана [7], [8], [21], р.р. 2–5, пп. 4.1, 5.2, 5.3, а також рис. 4–6.

Саме з фігурою кола пов'язана геометрія еліптичної прямої, в т.ч. для технологічного відображення окремих етапів ТП (п. 5.2).

Таким чином, в статті в спрощеній йдеться про авторську технологічно-послідовну інтерпретацію технології композитних АК, слідуючи основним положенням (аксіомам) геометрії Рімана.

## Мета статті

1. Визначити в “скороченні” та “ущільненні” перейману сутність понять та положень ріманової геометрії (з врахуванням низки положень проєктивної геометрії), як вихідної бази для окреслення відповідних зв'язків “геометрія – ТП” з високим технологічним реалізмом відповідних формальних залучень.

2. Визначити в технологічній інтерпретації представлення етапів композитних АК на основі положень геометрії зв'язки. Тобто йдеться про еліптичну геометрію Рімана, що знаходиться за (п. 1) у простому взаємовідношенні зі звичайною сферичною геометрією [7], [10].

3. Представити технологічну модель еліптичної площини, як зв'язку прямих (“полярна форма”). Прямі цієї зв'язки (моделі) будемо називати, як зазвичай: – “точками” (етапи ТП), а пучки, що містять в цій зв'язці – “прямими” (загальний комплексний ТП).

4. Репрезентувати три типи трикутників: технологічно-площинний на проєктивній та еліптичній площині, а також технологічно-геодезичний на сфері.

5. Визначити спрощене формальне представлення етапу ТП.

## 2. Технологічна інтерпретація низки положень і моделей проєктивного простору

В статті інтерпретація здійснюється в новаторсько-доцільному варіанті геометричного змісту, а саме його переозначення на понятійній логіці технологічного поняття процесів виготовлення АК із ПКМ. Тобто йдеться про відображення реальної виробничої практики, емпіричного базису технологічно-технологічної теорії інтерпретації.

### 2.1. Визначені узгоджені означення в первинних залученнях [7], [8], [21]

1) Нехай  $V_{n+1} - (n+1)$  – вимірний векторний простір над полем  $R$  дійсних чисел,  $V'$  – множина всіх ненульових векторів простору  $V_{n+1}$ .

Непусту множину  $P$  називають  $n$  – вимірним проєктивним простором, якщо задано відображення  $f: V' \rightarrow P$ , яке задовольняє ряд умов.

2) Прикладом проєктивної прямої є так звана *розширена пряма*. Так, називають звичайну пряму *афінної (евклідової) площини (4h)*, доповнену невласною (нескінченно віддаленою) точкою. Таким чином, взагалі проєктивна пряма є замкнутою в собі лінією в наслідок приєднання невласного елемента.

3) Чотири точки на проєктивній площині, серед яких жодні три не належать одній прямій, називаються точками загального положення.

4) Нехай  $\sigma$  – проєктивна площина. Впорядкована система точок  $A_1, A_2, A_3, E$  загального положення називається *проєктивним репером*. Позначається  $R = (A_1, A_2, A_3, E)$ . Точки  $A_1, A_2, A_3$  називаються *вершинами репера*, а точка  $E$  – *одиночною точкою репера*, або вихідна його точка.

Репер це сукупність з одної точки  $O$  (початку координат) і впорядкованого набору з  $n$  – лінійно визначених векторів (тобто базису). Йдеться про вихідний технологічно-операційний базис, основу на яку можна спиратися (або відштовхуватися) при побудові нових фігур найперше, нових точок цього базису. Водночас, для наочності положення одиночної точки репера  $E$  на прямій пов'язана з його одиночним вектором  $e$ , який являє собою суму неколінеарних *одиночних* векторів,

Зазначається [7], [8] що, завданням проєктивного репера між точками проєктивної площини і впорядкованими ненульовими трійками дійсних чисел встановлюється відповідність з рядом властивостей.

Визначено, що завданням репера на проєктивній площині задається *проєктивна система координат*.

Цей варіант залучений (п. 2.3) для інтерпретації технологічно-ситуаційної лінії в процесі термосилового формування “сирих” заготовок об'єктів із ПКМ [2]–[4].

## 2.2. Конфігурація Дезарга: інтерпретативні моделі зіставленої локації

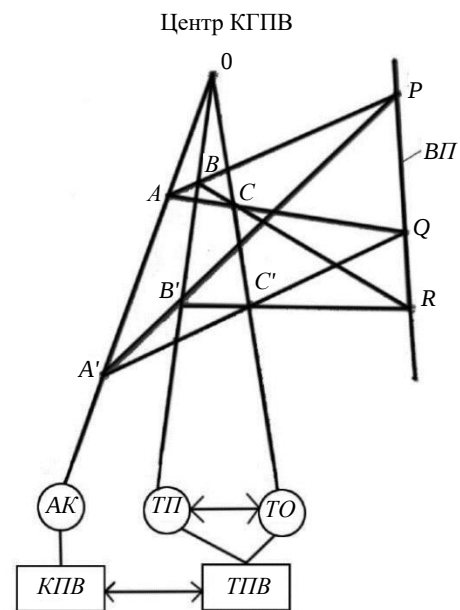
### 1. Загальна функціональна технологічна модель.

Теорема Дезарга, або конфігурація Дезарга (принципова схема взаємозв'язності точок і прямих) є однією з основних (центральної) теорем проєктивної геометрії і має місце для застосування в сучасній науці. При цьому це справедливо для будь-якої площини, що лежить в тримірному проєктивному просторі [21].

По певній аналогії з виробництвом тут можна говорити, по-перше, (в цілому) саме про безпосередню зв'язність конструкційно-технологічної підготовки виробництва (КТПВ) і самого (основного) виробництва, а по-друге, наприклад, зазначити (провести) певну аналогію близькості в технологіях виготовлення оснащення (авіабудування) і певної номенклатури виробів (розкroєння, механічна обробка, складання, тощо).

Формально у сконцентровано-скороченому вигляді це можливо представити (рис. 5), в загальному за умов теореми Дезарга (на площині) [7], [21].

Тут задіяні на площині два трикутники: один менших розмірів (КТПВ), тобто постачальне виробництво, а другий більший за нього – основне виробництво.



**Рис. 5.** Формалізована схема технологічної інтерпретації складових КТПВ на основі положень теореми Дезарга\* Трикутник  $ABC$  – КТПВ (конструктивно-технологічна підготовка виробництва) трикутник  $A'B'C'$  – основне виробництво КТВ і ТПВ – відповідно складові КТПВ, АК – авіаконструкція із ПКМ (насамперед, її технологічність: ТП – технологічні процеси, ТО – технологічне оснащення (оснастка та ВП – вісь перспективи (в інтерпретації – узгоджені значення компонентів)\* Йдеться про інтерпретація в двох напрямках: змісті і значення в системі КТПВ

В цій парі мають місце загальноцільові, але різнопланові (підцілі), або так зване технологічно-виробничі середовища. Таким чином, йдеться про виробничу структуру підприємства, а саме тут підкреслені формальні виділення основного виробництва (виробничі цехи) та підготовку виробництва (інструментальні цехи) на основі так званого “технологічного середовища” [7]. Детальніше щодо побудови, взаємозв'язків та взаємодії трикутників. За змістом перший трикутник впливає, “взаємодіє” (проектуються) на другий і обидва вони перспективні з центром в  $O$ . Щодо їх побудови, то слід зазначити, що в проєктивній геометрії і геометрії Рімана їх сторони – це прямі, тоді, як в геометрії Евкліда – відрізки. Зазначені трикутники перспективні з центром в  $O$ . З цим пов'язані в загальному три прямі, які з'єднують відповідні вершини двох трикутників:  $AA'$  (авіаційні конструкції із ПКМ);  $BB'$  (технологічні процеси;  $CC'$  (технологічне оснащення: обладнання та оснастка).

А відтак, (рис. 5) пари відповідних трьох сторін трикутників перетинаються (технологічний взаємозв'язок) в трьох відповідних точках:  $P, R, Q$  з відображенням взаємозв'язку вже між парами сторін, а саме [21] будучи належними одній прямій (ВП).

$$P = AB \cdot A'B'; \quad R = BC \cdot B'C'; \quad Q = AC \cdot A'C, \quad (1)$$

Тобто, ця теорема стверджує: в проєктивному просторі два трикутники перспективно основі тоді і тільки тоді, якщо вони перспективно центральні. Тут мова йде про вісь перспективи у вигляді прямої ВП, на якій розташовані зазначені три колінеарні точки.

На практиці – це пов'язується з ефективністю рішень щодо АК, ТП, ТО та узгодженої між собою сукупності. В теорії, наприклад, три і більше точок є колінеарними, коли вони лежать на прямій (лінії).

В статті в технологічному сенсі зміст колінеарності технологічно розширено, бо йдеться, що важливо, про оціночну однорідність і/або узгодженість (технологічну, економічну та інші), задіяних об'єктів в рамках конкретного ТП. Детальніше ж для розрізнення можна вважати про пряму і інцидентні їй точки в евклідовій геометрії, або ж проєктивну пряму з характерними для неї точками. Узагальнюючи, тут можна вважати про вісь ВП, як умовну вісь так званої перспективної оптимізації (формалізоване підґрунтя цього процесу).

Наприклад, можна в спрощенні та умовно вичлених із (1), як сторони трикутників приналежність кутових точок при  $P(AA')$ ;  $Q(BB')$ ;  $R(CC')$ , що визначають положення точок на прямих  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  та на ділянці осі ВП. Кутовий розмір точок  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  може, слугувати для з'ясування об'ємів планових робіт по трьом напрямкам, або співвідношення між ними та інше. Щодо центра перспективи  $O$  на рис. 5, то це наприклад, загальний центр планування та координації (КТПВ) або просто цільовий центр. Він виділений для загального представлення і дещо спрощений і, зазвичай, тут можуть мати місце декілька підрозділів. Формально це можуть бути центри двох трикутників на рис. 5.

Так, 3 медіани кожного із трикутників  $ABC$  і  $A'B'C'$  перетинаються в одній точці – центроїда відповідно ( $C_1$ ,  $C_2$ ) утворюючи, з ними (вершини  $C_1$ ,  $C_2$ ) внутрішні трикутники (“3 великих і 6 малих”). Вони можуть мати місце в подальшій деталізованій інтерпретації ТП. Наприклад, відображення взаємозв'язку “конструкція – ТП” (пряма  $AB$ ), або “конструкція – оснастка” (пряма  $AC$ ). В першому випадку – це може бути управляюча програма для підтримки механізованого розкрою шарів ПКМ складної (неправильної) форми в створенні (розміщенні) багатошарового пакету на оснастці (“сира” багатошарова панель). В другому випадку йдеться про головний елемент оснастки – форми із ПКМ (склопластик). Ця жорстка листова підкріплена конструкція може бути позитивною (опуклою) чи негативною (увігнутою) поверхнею. При цьому, плазово-шаблонний метод ув'язки є ще до сьогодні в авіабудуванні актуальним [7].

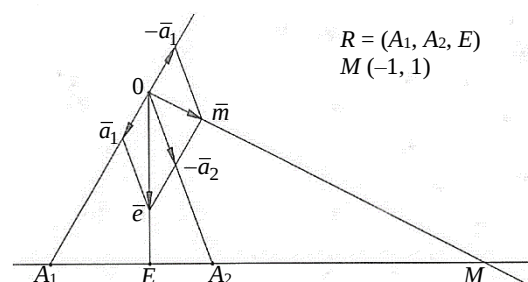
2. *Доповнення до загальної моделі – так зване заломлення (рефракція).* Конфігурацію Дезарга на рис. 5 можна в загальному представити, як перетин двох об'єднань прямих: поздовжніх і поперечних. Як відомо

[7], заломлення (рефракція) – це зміна напрямку руху випромінювання при проходженні межі розділу двох середовищ з неоднаковими властивостями. При цьому, цей перетин прямих визначається показниками заломлення, в т.ч. і силового заломлення.

Факт перетинання пари прямих в спільній точці підтверджується принциповою схемою конфігурацією Дезарга. Тому, як певний аналог, тут має місце рух постачання об'єктів оснащення неоднакових технологічних середовищах зазначених двох виробництв. Формальним положенням цих перетинів “взаємозв'язків” аналогічне в сенсі (1), і тому можна говорити про технологічну рефракцію. Наостанок розділу, слід зазначити, що інтерпретація ТП в проєктивній геометрії “йде поруч” (вписується) в інтерпретаційну структуру геометрії Рімана (рис. 4, рис. 5).

### 2.3. Інтерпретаційна модель фрагментно-силового процесу формування (проєктивна система координат на проєктивній прямій)

1. *Базисний геометро-вихідний об'єкт – “оригінал”* (рис. 6) [8].



**Рис. 6.** Залучення проєктивної системи координат на прикладі силового формування панелі на автоклаві.  $R = (A_1, A_2, E)$  проєктивний репер системи при двох видах дій: точка  $A_1$  – вакуум (розрідження) і  $A_2$  – надлишково-автоклавно; точка  $M(-1; 1)$  варіант “силового стану” формуючого середовища: значення показників (кгс/см<sup>2</sup>) для зазначених двох видів

На розширеній прямій  $d$  заданий проєктивний репер  $R = (A_1, A_2, E)$ . На цій прямій, як можливий на практиці варіант необхідно визначити (побудувати) точку  $M(-1; 1)$  по її координатам у цьому репері. При цьому, точки  $A_1$  і  $A_2$  – “точки дії” в силовому середовищі автоклава. Для цього поза прямою,  $\vec{d}$  вибрана довільна точка  $O$  (початок координат), яка з'єднана з точками  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $E$ . На утворених прямих  $OA_1$ ,  $OA_2$ ,  $OE$  побудовані одиничні вектори  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{e}_3$  з початком  $O$  такі, що  $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{e}$ . Тобто йдеться про утворення базису, як суми двох неколінеарних векторів за правилом паралелограма. Тут  $\vec{e}$  – діагональний вектор, продовжен-

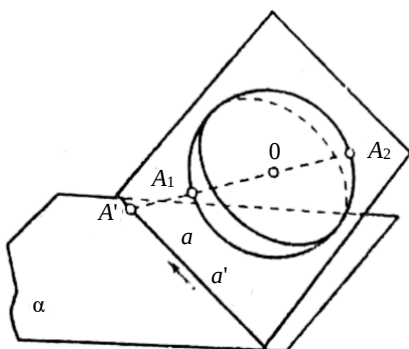
ня якого до перетину з прямою  $A_1, A_2$  утворює точку  $E$ . Таким чином, згідно означення має місце система векторів, яка узгоджена відносно заданого проєктивного репера  $R = (A_1, A_2, E)$ .

2. *Технологічна інтерпретація та її дефініції на прикладі заданого вище репера.*

Йдеться про формалізацію варіанта термосилового вакуум – автоклавного формування композитних панелей [2]–[4]. В скороченні тут “сирий” пакет панелі, що розміщений на оснастці (формі) разом з належною вакуумною системою поміщають в вакуумний мішок (мембрану) і направляють в автоклав (побіжно це може бути точка  $O$ ). В його робочій зоні створюються два види тиску: вакуумний (розрідження) точка  $A_1$  і автоклавно-надлишковий – це точка  $A_2$ . Приймається, що в даному варіанті рівень тиску  $p$  в обох видах  $p = 1 \text{ кгс/см}^2$ .

Ці значення згідно ТП (програми) підсумовуються на протязі циклу формування панелі. А сили є направленими – спільні “лінії” дії і багатошаровий пакет стискається, облягаючи форму (робочу поверхню оснастки). Тут обґрунтовано можна говорити про векторний характер вказаних дій. Що стосується заданої точки  $M(-1; 1)$ , то на координатній площині вакуумний або негативний тиск позначають знаком “мінус”, а коли манометричний тиск вищий за тиск навколишнього середовища, то йдеться про позитивний тиск “+”. Тому будується одиничний вектор  $m$  такий, що  $m = -\bar{a}_1 + \bar{a}_2$ . Пряма, що проходить через точку  $O$  і вектор  $m$ , перетинає пряму  $d$  в шуканій точці  $M$  [8].

Наприкінці цього розділу і говорячи про формалізацію тісного зв’язку підготовки і основного виробництва, слід зазначити, що при ототожненні протилежних точок сфери виходить проєктивна площина, геометрія якої задовольняє аксіомам геометрії Рімана, тому поєднання при формалізації цих геометрій розширює можливості інтерпретації у відтворенні практики. Так, на рис. 7 представлена модель узгодженого перетину площин: проєктивної і сферичної ріманової геометрії [12].



**Рис. 7.** Модель узгодженого перетину площин проєктивної; СФГ –  $P$  геометрій (формалізація зв’язку підготовки і основного виробництва) проєктивна площина. Точка  $O$  не лежить на площині  $\alpha$ ; безкінечно віддалена точка; площина в сферичній геометрії Рімана; пара діаметрально протилежних точок

Тут має місце наявне співвідношення, де ставиться у відповідність точкам проєктивній площини прямі зв’язки, центр якої  $O$  не лежить на самій площині, а саме через центр зв’язки  $O$  – на дві криві точки – антиподи [15].

### 3. Інтерпретація тверджень (понять) геометрії Рімана

#### 3.1. Основоволожні особливості еліптичної геометрії в технологічному застосуванні

1. Основним поняттям еліптичної форми геометрії Рімана є “точка” [9].

2. Пряма – це замкнута крива. Зазвичай, за умови п. 4, довжина кожної прямої дорівнює її, тобто еліптична пряма скінчена.

3. Дві прямі на площині завжди перетинаються в одній точці.

4. Обґрунтування геометрії положення. Тут основним поняттям “точка” та їх сукупність [7], [13]. По суті “точка” є ніщо інше, як назва тих елементів, із яких геометрія будує свої образи, і як наслідок інтерпретації, їм надається “технологічний смисл”. Сукупність всіх точок називають простором [7], [13], якій вміщує щонайменше 4 різні точки, наприклад  $A, B, C, D$  [7], [13]. До цього першого поняття, як аксіоми, вводиться друге основне поняття: “розділення двох пар точок”. Це поняття є відношення між прямими точок, наприклад  $AB$  і  $CD$  (більш, ніж 20 аксіом) [7], [18].

5. Роль прямих (відсутність паралельних ліній) тут виконують окружності великих кіл сфери; які суть замкнені лінії: два великих кола, що лежать на сферичній поверхні завжди перетинаються і при цьому в двох діаметрально протилежних точках (на відміну від п. 2). При цьому вважається (приймається), що це одна точка. В статті – це спосіб забезпечення надійності об’єкта за рахунок використання можливостей надлишковий відносно мінімально необхідних на використання потрібних функцій. При роздільному способі резервування вводиться необхідний резерв. Тоді на основі “сфери Рімана” [7] можна зі спрощеними привести такі інтерпретаційні приклади. У цій сфері виділені два великих кола, а саме “полюсна” та “полярна” (екватор). Це взаємо-перетинаючі під прямим кутом кола, з визначеними при цьому специфічними точками. В спрощені (“оригінал”) в р. 6. на рис. 12, наприклад точки – антиподи екватори мають такі значення  $A(-1)$ ;  $B(1)$ . З цими точками, можливе трактування принципу “резервування”.

а) Аналогічно щодо обґрунтування задіяння “резервної точки” при наявності двох точок – антиподів (проекція об’єктів на площині рис. 5). Тут на прикладі йдеться про основну першочергового задіяння (при експлуатації) оснастку. Формально про неї на рис. 5 це суцільна лінія. Водночас, мається на увазі оснастку – дублера (на рис. 5 – пунктирна лінія), що знаходиться

у резерві, наприклад рис. 4. Таким чином, формально йдеться, про відображення точки проєктивної площини (ТПВ) на точки однієї із півсфер (основне виробництво), для цього вибрана нижня півсфера. При цьому, віддаленій точці площини (запланована оснастка) відповідають дві крайові точки (дійова та оснастка – дублер).

б) Варіант поширеного всеохоплюючого “підсумування” або точка рівнодії. Цей термін якоюсь рисою близький до поняття “склеювання двох точок”, але воно має самостійне значення, як першоджерело [9]. Наприклад рівнодіюча двох сил, що направлені по одній прямій, або точка-підсумок двох тисків (вакуумне розрідження і автоклав не надлишкове), тощо.

в) Варіант склеювання (поєднання) точок – антиподів [7], [9]. В цьому варіанті, як зазначено вище, об’явлена не вся сфера, а лише півсфери. Філігранність цього варіанту Рімана безперечна. Однак, на практиці йдеться про технологічну близькість першої точки (варіанти а, б) до другої, яка формально приймається, як одна. З точки зору практики, такий підхід є важливою технолого-геометричною оптимізацією в цій представленій інтерпретації.

6. Проективна площина і площина двовимірної геометрії Рімана є замкнутими кутами і односторонніми.

7. Існує чотири трикутники з трьома даними вершинами.

8. Зазвичай сфера представляється, саме як одинична сфера (радіус дорівнює 1). Тобто взагалі йдеться про одиничну сферу (3), одиничне коло (5), одиничний круг, бо мають місце окружності радіуса  $r = 1$ .

9. Значну роль в технологічній інтерпретації взаємно перпендикулярні полюсна та полярна площина (екватор), наприклад представлений на рис. 1а. Тут центр сфери “0” сукупний центр умовної технолого-об’єктивної “маси” ТП.

10. Щодо формалізації ТП, ріманова геометрія, як геометрія ріманових просторів, являє собою узагальнення внутрішньої геометрії поверхонь на довільне число вимірів [7], [16]. В статті на основі положень диференціальної геометрії [7], [23] може бути залучена близька за змістом (що до етапного представлення ТП) поверхня другого порядку і відповідно її квадратичну форму. В статті зі спрощенням приймається що задану квадратичну форму у вигляді

$\Phi(X_1, X_2) = a_{11}$  можна розглядати як функцію двох змінних [7].

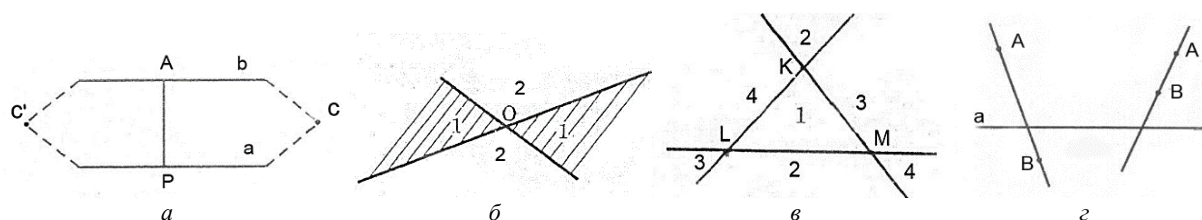
11. І наостанок, для сферичної, проєктивної та ріманової геометрії характерним є двоїстість введених понять (точка, пряма, площина) Для прикладу двоїстість зазначених понять на проєктивній площині на дано в табл. 1.

**Таблиця 1.** Схеми принципів двоїстості в проєктивній геометрії [7]

| №    | Принцип двоїстості в просторі (великий принцип двоїстості) |
|------|------------------------------------------------------------|
| 1.   | Схеми відношень                                            |
| 1.1. | точка $\rightarrow$ пряма                                  |
| 1.2. | площина $\rightarrow$ точка                                |
| 1.3. | пряма = пряма                                              |
| 1.4. | перетин об’єднання                                         |
| 2.   | Принцип двоїстості на площині (малий принцип двоїстості)   |
| 2.1. | точка $\rightarrow$ пряма                                  |
| 2.2. | пряма $\rightarrow$ точка                                  |
| 2.3. | площина = площина                                          |
| 2.4. | Перетин $\rightarrow$ об’єднання                           |

### 3.2. Приклади особливостей точок, прямих та інших фігур

1. Згідно аксіом належності Рімана кожна пара прямих, що лежить в одній площині, перетинаються (кожна пара процесів технології серійного нового виробництва завжди перетинаються “як зв’язка”. Нехай у площині дано пряму  $a$  і точку  $A$  (рис. 8 а згідно [11] рис. 1), яка не лежить на цій прямій. Через цю точку проходить пучок прямих. Пряма  $b$  пучка перетинає



**Рис. 8.** Схематичне представлення низки вихідних положень в геометрії Рімана; а) схема щодо замкненості прямих (основна властивість), б) розбиття площини Рімана на дві частини (утворення двох кутів), в) розбиття площини Рімана на чотири частини (трикутники), г) схема нерозділюваності площини Рімана (замкнута поверхня прямою  $a$  на дві частини

пряму  $a$  в деякій точці  $C$ . Тут доводиться, що пряма  $a$  замкнута. Тобто, прямі в геометрії Рімана замкнені. Ця принципова особливість має своє відображення в сутності етапного ТП. Він змістовно замкнений, автономно відокремлений, але послідовно-технологічно зв'язаний і скупчений. Із замкненості  $P$ -пряма впливає ряд особливостей прямої і площини Рімана [7], [11].

2. Будь-яка точка  $P$ -прямої не поділяє її на промені, а лише розрізає [11]. Наприклад, введений в технологічний процес проміжний контроль його не розділяє, а тільки доповнює.

3. Дві точки прямої в геометрії Рімана визначають два відрізки, які взаємно доповнюють один одного. Тут прикладом може служити так званий процес підпроцесної нерозривності і доповненості при термосиловому формуванні композитних об'єктів в автоклавах.

4. Порядок точок на прямій є циклічним, тобто відповідає порядку (в тому числі технологічному) в множенні точок на окружності.

5. Площина Рімана – замкнена поверхня, наприклад сфера (в інтерпретації – багатоетапний ТП серійного виробництва) тому будь-яка її пряма не розподіляє її на дві півплощини (рис. 8 з). Тут на рис. 9 доводиться, що дві точки площини  $A$  і  $B$ , що не лежать на даній прямій, можна з'єднати неперервною дугою (відрізком), не перетинаючи дану пряму ([12] с. 187).

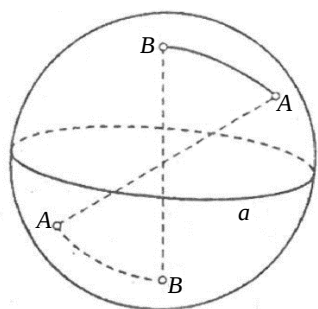


Рис. 9. Геометрична ілюстрація принципу Рімана: пряма  $AA$  не розділяє площину Рімана

6. Будь-які дві прямі  $a$  і  $b$  площини Рімана розділяють цю площину на дві частини (півплощини) кожна з них утворює кут (рис. 8 б). Якщо  $O$  – точка перетину прямих  $a$  і  $b$ , то при точці  $O$  утворюються дві пари кутів (1, 2), які взаємодоповнюють один одного до розгнутаго [7], [11], [13].

7. Із замкнутості площини Рімана випливає, що будь-які три її прямі, які не проходять через одну точку, розбивають цю площину на чотири частини (трикутники) –  $KML$  [7], [11], [13].

На рис. 8 в ці зображення трикутників в  $KML$  позначені цифрами 1, 2, 3, 4. Тут, наприклад, на основі технологічно-інформаційної проблематиці розглядаються:  $K$  – конструктивно-технологічні рішення (КТР) композиційних АК;  $M$  – полімерні композиційні матеріали (ПКМ) і  $L$  – ТП з технологічним оснащенням [1]–[4]. Детальніше це представлено в р. 4.

#### 4. Трикутники в Рімановій геометрії

Технологічне витлумачення та метричні співвідношення тут репрезентується два типи трикутників:

Приклад 1. Технологічно-площинний на еліптичній площині.

Приклад 2. Технологічно-геодезичний на сфері.

##### 4.1. Продовження розгляду трикутників $KML$ (п. 3.2, рис. 8 в)

Якщо кути і сторони одного визначеного трикутника  $KLM$  позначити через  $K$  і  $[LM]$ , тобто через кут  $K$  і протилежну сторону  $[LM]$ , і т.д., а скупченості, взаємно-додаткові з ними – за допомогою приставки “доп”, то елементи всіх чотирьох трикутників  $KML$  даються таблицею 2 (на основі [13]). Згідно неї у будь-яких двох трикутниках  $KML$  є по одному загальному куту та по одній загальній стороні протилежній цьому куту, інші однойменні кути і сторони їх взаємно – додаткові.

Таблиця 2. Елементи чотирьох трикутників  $KML$

| № | Кути та сторони трикутників $KML$                                                                    |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $\angle K, \angle L, \angle M, [MK], [KL]$                                                           |
| 2 | $\angle K, \text{доп. } \angle L, \text{доп. } \angle M; [LK], \text{доп. } [KL]$                    |
| 3 | $\text{доп. } \angle K, \angle L, \text{доп. } \angle M; \text{доп. } [LM], [MK], \text{доп. } [KL]$ |
| 4 | $\text{доп. } \angle K, \text{доп. } \angle L, \angle M; \text{доп. } [LM], [KL]$                    |

З метою спрощення та в практично-технологічному сенсі можна дати трактування зазначеним об'єктам в теорії трикутників на еліптичній площині. В загальному йдеться про базово-вихідний трикутник 1 засадничо-інформаційного плану та тісно, пов'язаних з ним трьох похідних трикутників (2, 3, 4) в напрямку можливого розвитку (деталізації) його вихідної “стартової” інформації).

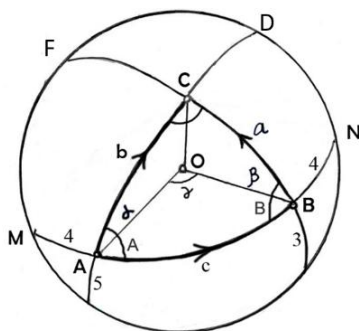
Детальніше, якщо дві прямі перетинаються в точці, то утворюються чотири кути (рис. 1 несуміжні кути називаються вертикальними, або протилежно вертикальними кутами вони не є прилеглими).

Зазначені вище трикутники №1 і №2 мають загальний кут при точці  $K$  ( $KTP$ ) і по одній загальній стороні ( $LM$ ), протилежний цьому куту (січні відрізки), при цьому два трикутники  $KML$  ( $N_1, N_2$ ) з загальним кутом при точці  $K$  доповнюють один до одного до кута  $K$  [13]. При цьому взаємно-доповнюючими є два кути: доп.  $\angle M$  і доп.  $\angle L$ , а також дві сторони: доп.  $[MK]$  і доп.  $[KL]$ . Тобто трикутник №2 в порівнянні з трикутником №1 має видовжені дві бічні сторони, частинами яких є бічні сторони трикутника №1. Довжина бічних сторін трикутника може задаватися технічними умовами.

#### 4.2. Сферична геометрія: технологіо-геодезичний трикутник на сфері

4.2.1. Загальна частина. Під сферичною геометрією розуміють [7], [9], [11] геометричну систему “по-лем дії” якої є поверхня сфери, а під “рухами” розуміються всеможливі обертання тривимірного простору навколо центра  $O$ . Роль “прямих” на поверхні сфери грають “великі кола” (наприклад, рис. 10).

Сферичний трикутник  $ABC$  представлений у варіанті базового технологіо-геодезичного трикутника (рис. 10), тобто з наданим технологічним трактуванням.



**Рис. 10.** Технологіо-геодезичний трикутник  $ABC$  на сфері (ТП)  $MFDN$  – велике коло – екватор сфери  $A, B, C$  – кути геодезичного трикутника на сфері  $a, b, c$  – дуги великих кіл: сторони трикутника (3 етапи ТП)  $\alpha, \beta, \gamma$  – кути внутрішніх трикутників  $AOC, BOC, AOB$ ,  $O$  – центр сфери:  $CO$  – радіус сфери

4.2.2. Об’ємне представлення трискладового базиса  $ADC$  [2]–[4]. При дослідженні внутрішньої геометрії поверхні, тобто таких, котрі зберігаються при геометричних перетвореннях, особливу роль грають геодезичні лінії поверхні. Окрім того, що вони з’єднують дві точки поверхні по найкоротшій відстані, вони в технології композитних АК є траєкторіями намотування армуючих ниток при зміцненні балонів високого тиску. Зазначені лінії є аналогом прямих ліній на площині.

На рис. 10 представлений технологіо-геодезичний трикутник  $ABC$  на основі площинного базового трикутника  $ADC$  [2]–[4], але вже на сферичній поверхні (ТП), тут  $MABN$  – велике коло-екватор сфери:  $a, b, c$  – дуги великих кіл, як сторони сферичного трикутника (три етапи ТП: 3, 4, 5 [2]–[4]:  $\alpha, \beta, \gamma$  – внутрішні кути трикутників  $AOC, BOC, AOB$ ;  $CO, AO, BO$  – радіуси сфери. Сферичний базовий трикутник має шість основних елементів: три кути  $A, B, C$  та три сторони  $a, b, c$ . При цьому сума шести “скибних” частин, відповідаючих трьом вказаних кутам трикутників, покривають всю сферу [9]. При деталізації (наприклад, метризації сторін трикутник  $ABC$ ) можуть розглядатися кути  $\alpha, \beta, \gamma$ . Адже його побудова на сфері може виконуватися за трьома сторонами або за трьома кутами (саме за означеними інтерпретованими характеристиками етапів 3,

4, 5 ТП виготовлення композитних АК такими, як тривалість ТП, рівень механізації і автоматизації процесів, або в спрощенні – за основними рушіями (чинниками), які спричиняють і прискорюють ТП та ін. При цьому сферичний трикутник, всі сторони якого менше половини великого кола, називають ейлеровим. Трикутник  $ABC$  підпадає під це визначення. Зазвичай сторони сферичного трикутника вимірюють величиною кута, утвореного кінцями даної сторони з центром сфери  $O$ . В приведеному прикладі це фактично кути під дійсними значеннями зазначених вище радіусів сфери (на рис. 10 вони різні). Сума трьох сторін трикутника  $a+b+c$  завжди менше  $2\pi R$  ( $360^\circ$ ) і більша від нуля. Його кути вимірюються плоскими кутами при вершинах  $A, B, C$  між дотичними до двох сторін трикутника. Сума кутів сферичного трикутника  $S$  завжди менша  $3\pi$  та більше  $\pi$ . У трикутника  $ABC$   $S = 1,6\pi$ .

#### 5. Метричні співвідношення в перетворенні “відношення порядку” (СФГ-Р та ТП)

##### 5.1. Внутрішня метрика поверхні (Перша квадратична форма поверхні)

Велику роль в метричних співвідношеннях відіграє перша квадратична форма: [7], [10], [23]. Так, довжина дуги кривої, що лежить на поверхні кут між кривими і площі областей поверхні визначаються нею.

Для прикладу, визначення довжини дуги кривої ( $ds^2$ ) достатньо знати тільки коефіцієнти квадратичної форми ( $E, F, G$ ) і внутрішні рівняння лінії. Тут має місце сукупність векторів  $\vec{dr} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$  і дотична площі поверхні [23], де визначають коефіцієнти цієї форми.

Наприклад:

а) для рівняння:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  має місце перша квадратична форма поверхні другого порядку:

$$\vec{r} = (a \cos v, b \sin v, u); ds^2 = du^2 + (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v) dv^2 \quad (2)$$

б) Матриця  $C$  першої квадратичної форми одиничної сфери представлена в [7] у вигляді елементів кільця:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Значення елементів матриці  $C$  такі:  $E = 1$ ;  $F = 0$  (двічі – по діагоналі);  $G = \cos^2 u$ .

##### 5.2. Геометричні умовно-процедурні відношення

Метричні співвідношення [7], [9], [12], [15] в геометрії Рімана виражаються належним чином тлумачними формами сферичної геометрії (п. 4.2), адже кож-

на фігура  $M$  площини Рімана являє собою виділену спочатку пару фігур  $M_1$  і  $M_2$  деякої сфери (тобто вони з однієї сукупності) симетрично розташованих відносно центра сфери. Зазвичай в теорії фігурами  $M_1$   $M_2$  служать великі кола сфери, площа яких проходить через центр і перетинаються під певним кутом(як на рис. 1). Це великі кола  $a$  і  $b$  з віссю перетину  $AA_1$  [9]. Тобто два великих кола сфери завжди мають дві загальні точки. Далі в зазначений процедурі приймається, що кожна пара діаметрально протилежних точок фігур  $M_1$  і  $M_2$  розглядається, як одна точка  $M$ . Тобто тут з бажанням зблизити сферичну геометрію з геометрією на площині приймається, що основним “утворюючим елементом” сферичної геометрії є не одна точка, а зразу пара діаметрально протилежних точок сфери. Цим самим кожне метричне співвідношення між елементами фігур  $M$  співпадають з метричним співвідношенням між відповідними елементами  $M_1$  чи фігури  $M_2$ .

Оскільки така виражає сторону трикутника на сфері і радіуса  $R$ . При цьому мається на увазі, що ріманова площина одержана шляхом ототожнення діаметрально протилежних цієї ж сфери (радіуса  $R$ ) [12].

**5.3. Процедура ототожнення протилежних точок сфери: зв’язок моделей на сфері та проєктивній площині [7], [9]**

Раніш було зазначено, що при ототожненні протилежних точок сфери виходить проєктивна площина , геометрія якої задовільняє аксіомам геометрії Рімана. В моделі розглядається сфера  $S$  з центром в точці  $O$  у тривимірному просторі  $E$ . При цьому кожна точка  $A \in S$  разом з центром сфери  $O$  визначає деяку пряму ( $L \in E$ , тобто деяку точку  $A_0$  проєктивної площини  $\Pi$  при її перетині. Ясно, що зіставлення  $A \rightarrow A_0$  визначає відображення  $S \rightarrow \Pi$ , великі кола на  $S$  (прямі в сферичній геометрії) переходять у прямі на проєктивній площині  $\Pi$ . Водночас, в одну точку  $A_0 \in \Pi$  переходять рівно дві точки сфери, в саме, разом з точкою  $A \in S$  і діаметрально протилежна точка  $A$ : При цьому евклідові рухи простору  $E$ , що переводять сферу  $S$  у себе, задають деякі

визначені перетворення проєктивної площини, які є рухами геометрії Рімана. В [15], [20] зазначаються, що, як відстань між двома точками, так і кут між двома прямими цієї площини можуть бути формально виражені в евклідовій координатній і в проєктивній формі.

Далі, кожна з зазначених вище відповідностей є взаємно однозначними [12]. При цьому, якщо точка  $A$  моделі ріманової геометрії на сфері  $K$  лежить на прямій  $a$  цієї ж моделі, то в площині (проєктивна)  $\alpha$  точка  $A'$ , що відповідна  $A$ , лежить на прямій  $a'$  відповідній  $\alpha$  (рис. 7).

Нехай тепер, як розвиток предметно-практичної та інтерпретаційно-технологічної діяльності  $A', B', C', D'$  – чотири точки площі  $\alpha$ , лежачі на одній прямій  $u'$  цієї площини,  $A, B, C, D$  – відповідні їм точки моделі ріманової геометрії на сфері  $K$ , лежачі на одній прямій  $u$  цієї моделі ( $u$  і  $u'$  відповідають один одному). Тут домовлено говорити [7], [12], що 1) точки  $A' B'$ , розділяють точки  $C', D'$  не прямій  $u'$  площини  $\alpha$ , якщо  $A, B$  розділяють  $C, D$  на прямій  $u$ . Точки  $A' B'$  не розділяють точки  $C', D'$  на прямій  $u'$  площини  $\alpha$ , якщо  $A, B$  не розділяють  $C, D$  на прямій  $u$ . Звідси слідує [7], [12], [15], що кожне положення про зв’язок, порядок і конгруентність об’єктів моделі ріманової геометрії на сфері  $K$ , буде справедливим на об’єктів нової моделі тобто вже на проєктивній площині (і навпаки). Приблизнена прив’язка точок  $A, B, C, D$  до їх можливих значень у варіанті етапного ТП. Приведені в п. 6.2. і табл. 3. Детальніше в ([12]. с. 209–210). Таким чином, у загальному площина еліптичної геометрії є проєктивна площина з її елементами (точками і прямими і відповідними відношеннями належності і порядку, які становлять предмет вивчення проєктивної геометрії [7], [10].

**6. Дворівнена геометрична формалізація у моделюванні ADC (модель центральної технологічної зв’язки)**

В спрощенні з точки зору композитна АК, геометрія Рімана відзначається притаманним для цієї моделі таким собі специфічно-збираючим чином. В сферичній

**Таблиця 3.** Технологічно-об’єктна модельна дислокація етапного ТП\* (мезорівень-еліптична пряма)

| Різномірні взаємодіючі класи об’єктів етапного ТП (рис. 15)                                       |                                                 |                                                             |                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| Символ класу<br>Пара $AB$ або $M_1$                                                               | Ведений клас: матеріально-конструктивні об’єкти | Ведучий клас: об’єкти техно-логічного оснащення             | Символ класу<br>Пара $CD$ або $M_2$ |
| Матеріал (ПКМ) – $A$                                                                              | Умовна конструкція – $B$                        | Обладнання $C$                                              | Оснастка $D$                        |
| Формально: [14]:<br>Клас $AB \leftrightarrow$ Сегмент $AB$                                        |                                                 | Формально: [14]:<br>Клас $CD \leftrightarrow$ Сегмент $CD$  |                                     |
| Принципова можливість процесного розділення пар об’єктів (рис. 14) у двох варіантах (категоріях): |                                                 |                                                             |                                     |
| (1) Пара об’єктів $CD$ розділяє пару $AB$ (рис. 14 $a$ )                                          |                                                 | (2) Пара об’єктів $CD$ не розділяє пару $AB$ (рис. 14 $б$ ) |                                     |
| * Велике коло сфери (“пряма”) з точками $M_1$ і $M_2$ з центром, співпадаючим з центром сфери     |                                                 |                                                             |                                     |

геометрії Рімана “полем дії” або групою перетворень  $W$  є поверхня сфери. Тобто тут перехід елементів “одне в друге” задається групою перетворень, що характерна для ТП. Ці перетворення із  $W$  грають в геометрії Рімана, а також в технології специфічних для них роль “рухів”, при цьому вимагається, щоб будь-які два утворюючих елементів бути рівні між собою (“однакові”) саме в сенсі в рімановій геометрії (група перетворень). В статті розглядають збиральні дії ТП у трактування еліптичних площин, а також етапи АДС три та чотири в них у вигляді еліптичної прямої та понять при розділенні двох пар точок.

### 6.1. Інтерпретаційне представлення багатоступінчастого ТП (2-сфера як вихідний об'єкт еліптичної площини)

**6.1.1 Вихідна позиція.** У деяких застарілих (по датах випуску) виданнях еліптичний простір, близький до еліптичної площини, наочно представляється у збиральному образі малюнком колеса підводно, маючи обід, спиці, які поєднані з його центром. На початку слід відмітити споріднений сферичному еліптичний простір Рімана [7], [14], [16], [20]. Під сферичною геометрією розуміється геометрія сфери, а під її площиною  $S_2$  сама 2-сфера [7], [20], [26]. Тоді тут під “площиною” фігури в еліптичній площині розуміється площина відповідної фігури на сфері [7]. А для розглядової в технологічній інтерпретації геометрії Рімана можлива назва “полярна” її форма, як стала позиція, концепт цієї геометрії. Вона одержується із геометрії сфери, як що в ній сукупність двох протилежних точок прийняти за один об'єкт, за одну “точку” двомірної геометрії [7], [9]–[21].

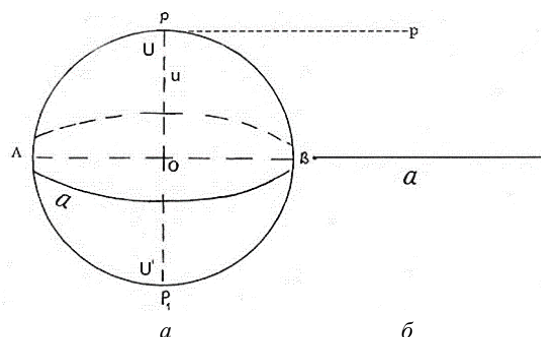
Таким чином, еліптична площина інтерпретується, як сфера в евклідовому просторі з ототожненими протилежними її точками [20]. Ця інтерпретація вписується в поняття “ізометрія”, або рух або (рідше) накладання-бієкція (перетворення), яка зберігає відстань між відповідними точками, тобто якщо  $A'$  і  $B'$  – образи точок  $A$  і  $B$ , то  $|A' B'| = |AB|$ . Поняття “ізометрія” поширене в метричній геометрії, зокрема, в рімановій геометрії [7], [9], [20]. Наприклад в [9], ізометрія має місце лише між спареними фігурами 1а і 1б.

Ця “полярна” форма добре інтерпретується центральною зв'язкою прямих, елементом цієї геометрії, яку через це в інтересах співставлення з геометрією сфери також доцільно називати “точкою”. Цю геометрію називають двомірною еліптичною геометрією, а двомірний простір, в якому вона здійснюється-еліптичною площиною [7], [14] з позначенням ЕП. Її елемент (точка) визначається системою трьох чисел  $(x, y, z)$  зв'язаних рівнянням:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (4)$$

Одиниця в правій частині взята чисто умовно (радіус відповідної сфери прийнятий за одиницю). Кож-

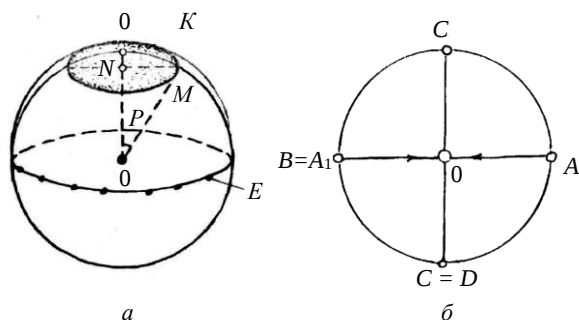
ну точку ЕП можна рухом сумістити з будь-якою її точкою, як це має місце на евклідовій сфері. Адже кожна пара її протилежних точок  $(A, A_1)$  може бути суміщено з кожною другою парою протилежних точок  $(B, B_1)$ . Пряму  $Z = 0$  в еліптичній площині називають екватором. Це обмежувальне коло (наприклад, півсфери) з будь-якими двома ототожненими точками, наприклад  $A, A_1$  на рис. 1. Координати  $x, y, z$  будь-якої точки екватора зв'язані рівнянням:  $x^2 + y^2 = 1$ . Екватор в ЕП приймається, як еліптична пряма, а оскільки кожна пряма в ЕП може бути суміщена з екватором, то будь-яку пряму в ЕП можна вважати еліптичною прямою. Екватор є одним із основних елементів системи еліптичної площини (рис. 1; 11–12). Так, на рис. 11 зображені полюси  $P$  і  $P_1$ : екватора на 2-сфері і умовно зображені пряма  $a$  (екватор) і її полюс  $P$  на площині  $S_2$  ([20], с. 58) і п. 6.2.1.



**Рис. 11.** а) Взаємно перпендикулярні полюси  $U, U'$  та полярна площина  $a$  (екватор) і відповідний вектор  $u$ ;  $P, P_1$  та  $AB$  – осі обертання 2 – сфери (образ ТП); б) Умовне зображення прямої  $a$  та її полюс  $P$  на площині  $S_2$  [20, с. 58]

В [10] зазначається що з евклідового погляду “реальний” зміст еліптичної геометрії надзвичайно простий: еліптична геометрія є геометрія зв'язки прямих в евклідовому просторі тривимірному просторі з природними елементами (елемент зв'язки – пряма – відповідає точці еліптичної площини, а пучок прямих зв'язки відповідає прямій площини) і природними з погляду евклідовій геометрії відношеннями: належності порядку і конгруентності між ними. Геометрія зв'язки (тобто еліптична геометрія Рімана) знаходяться у простому взаємозв'язку із звичайною геометрією сферичної поверхні, якщо взяти 2-сферу є центром у центрі  $O$  зв'язки. В технологічному трактуванні центром зв'язки прямих (етапів ТП) є визначена ціль багатоступінчастого ТП. При цьому пари діаметрально протилежних точок цієї сфери знаходяться у взаємних однозначній відображеності прямій зв'язки. А отже кожна пряма зв'язки перетинає сферу в діаметрально протилежних точках: цим відповідність і встановлюється [10]. Очевидно, що центр ТП (технологічне позначення  $A_0$ ) це сукупне поняття, включаючи дві діаметрально протилежні підцілі, наприклад “високі” техніко-технологічні показники  $(A)$  і низькі витрати  $(A_1)$ . Тому тут логічно предс-

тавити, що зазначені вище ототоженні (“склеєні”) точки  $A$  і  $A_1$  [9], умовно представляють точку  $A_1$ , що співпадає з центром сфери  $O$ . Тоді, як продовження, можна у практичному інтерпретивному “погляді” віддалено вважати порівняти точку  $A_0$  з центром імітаційним згаданого вище колесом. Приклади еліптичної площини так званої центральної технологічної зв’язки на повній сфері представлено на рис. 1 та рис. 12.



**Рис. 12.** Варіанти побудови на сфері в технологічній інтерпретації а) Макрорівень  $K$ -скупчений воедино малий круг для всіх етапів ТП.  $M$  – мале центральне коло – відображення технологічного циклу ТП,  $E$  – елементне розосередження етапів ТП на екваторному колі, б) Мезорівень. Чотири точки  $A, A_1, C, C_1$  на великому колі ТП поворота великих кіл:  $AA_1 \perp CC_1$   $AA_1$  – полярна (екваторна), а  $CC_1$  – полюсна осі поворота великих кіл  $AA_1 \perp CC_1$

У другому, спрощеному варіанті, або іншим чином, об’явлено “полем дії” зацікавленої геометрії не вся сфера, а лише півсфери (рис. 3), ототожнюючи, крім того, будь-які дві протилежні точки обмежуючого кола (екватор). Згідно [17] зазначений еліптичний простір (з утворенням еліптичної площини) це якби “складений вдвоє” сферичний простір ([17], с. 400) і далі: хоча така конструкція представляється робленою, але фактично виявляється, що еліптичний простір наділений більш простими властивостями, ніж сферичний, тобто останнє доцільно розглядати саме “складеним вдвоє”. Даний підхід в [13] представлений наочно. Тут сфера перетворюється в своєрідну сплюсненоподібну кругової форми фігуру. Фігура сфери володіє помітним потенціалом для технологічного переймання. Наприклад, малі бокові і центральні кола на сфері. На рис. 12 представлено мале центральне коло, яку в контексті теми статті може відображати вкупі технологічний цикл ТП (кут  $NOM$ ,  $ON < R$  та інше).

## 6.2. Інтерпретативне представлення етапу ТП (еліптична пряма)

### 6.2.1. Формальні та загального виду передумови (вихідні об’єкти: 1-сфера та 2-сфера)

1. Якщо  $X$ -рімановий многовид (багатоетапний ТП), то підмноговид  $Y$  з наданої та відтак, кожний під-

многовид ріманового простору, має звичайну ріманову структуру, що індикувана структурою охоплюючого простору). Тобто йдеться про “підпорядкованість” 1-сфери “охоплюючої” 2-сфери. При  $n = 2$  ця структура є нічим іншим, як перша квадратична форма поверхні [7], [18].

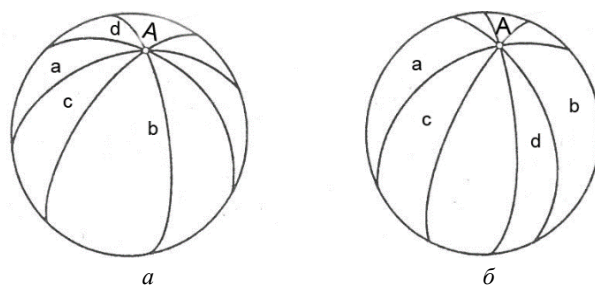
2. В підсумованому розділі роботи [16] зазначають, що в структурі геометрії – в структурі світу основні об’єкти – це події, які можна представити (в узагальненні) подібно точкам. І закони цієї структури подібні аксіомам геометрії наступні:

а) Кожній події можна зіставити чотири координати  $x, y, z, t$  так, що між подіями та наборами координат установлюються взаємооднозначна відповідність.

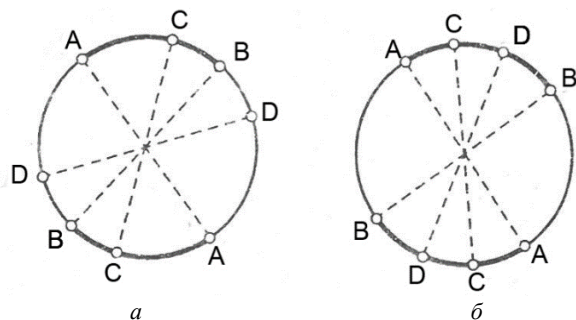
б) Об’єктивний фізичний смисл мають тільки ті відношення, які зберігаються при будь-яких визначеного складу перетвореннях. Тут йдеться про геометрію в двох системах. Так, перша система являє собою геометрію кола чи пучка проміння (променів). Тобто йдеться про одномірну сферичну геометрію чи геометрію сферичної прямої (саме великого кола на сфері). Друга система являє собою геометрію пучка прямих. Її називають одномірною еліптичною чи геометрію еліптичної прямої [7], [14]. Другою найособливішою її інтерпретацією-служить геометрія зв’язки прямих. Тобто другою системою геометрії в цьому типі є так звана “полярна” її форма. Вона добре інтерпретується центральною зв’язкою прямих (геометрія зв’язки) [7], [9]–[20]. Якщо дві прямі простору  $R_n$  перетинаються тільки в одній точці, то великі кола сфери простору  $R_{n+1}$ , граючи ролі прямих, перетинаються не в одній, а в двох точках антиподах. Тому в [17] еліптичним простором є множини елементів названих точками, ізометричні множині пар точок – антиподів сфери простору  $R_{n+1}$  з позначенням цього простору  $S_n$  (неєвклідовий простір Рімана).

Взагалі евклідовий простір  $R_n$  розглядається, як окремий випадок ріманового ([17], с. 389; [20], с. 581).

На рис. 13 представлена ілюстрація до поняття розділення великих кіл сфери, умовно “прямих” на площині, а на рис. 14 варіанти “відношень” між двома парами умовних “точок”  $A, B, C, D$  на “прямій”.



**Рис. 13.** Ілюстрація до поняття: розділення великих кіл сфери, умовних “прямих” на площині а) “прямі”  $a, b$  розділяють “прямі”  $c, d$ ; б) “прямі”  $a, b$  не розділяють “прямі”  $c, d$



**Рис. 14.** Варіанти “відношень” між двома парами умовних “точок”  $A, B, C, D$  на “прямій”: а) перші дві “точки”  $A$  і  $B$  розділяють дві останні “точки”  $C$  і  $D$  “прямої”; б) перші дві “точки”  $A$  і  $B$  не розділяють дві останні “точки”  $C$  і  $D$  “прямої”

### 6.2.2. Технологічне втілення: інтерпретаційно-описовий метод (подвійне відношення чотирьох точок еліптичної прямої)

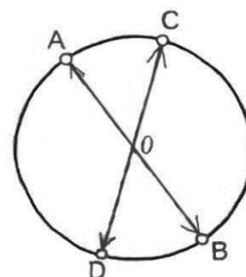
1. Щодо п.6.2.1.б – це перетворення в технології композитних АК (дослідне та серійне виробництво). Наприклад, це показники питомого вмісту в матеріалі армуючого наповнювача і зв’язуючої, пористість ПКМ, схеми розташування армуючих волокон тощо в залежності від рівня навантаженості АК (низький, середній, високий). При цьому йдеться про виклад в практиці інтерпретації еліптичної геометрії у найпростішому одновірному випадку – еліптичної прямої. Тут радіус кола приймається за одиницю. Тобто досліджується одновірний многовид – коло радіуса одиниця.

2. При визначенні кожного етапу ТП, необхідно виділити в ньому по меншій мірі дві категорії, або два класи “полярно” різних, постійно взаємодіючих між собою об’єктів  $M_1$  і  $M_2$ , які є парними. В першому класі це елементи  $A$  – ПКМ, композитні АК; а в другому:  $C$  – обладнання;  $D$  – технологічна оснастка. При цьому, функція (технологія) – це роль, яку виконує кожен елемент в рамках технологіко-геометричної системи. Тому тут йдеться про зведення (перелік) атрибутів технологічної категорії в адаптації до формалізму зазначених чотирьох типових елементів. Наприклад, в  $A$  – (ПКМ): приготування зв’язуючого, для використання протягом обмеженого часу, після його приготування – для виготовлення препрега, або забезпечення процесу інфузії. Водночас,  $C$  (обладнання) – це промисловий хімічний реактор. Він призначений для здійснення конкретної хімічної реакції зв’язуючого в строго заданому послідовному ланцюжку дій при заданих параметрах. В статті мова йде про простір з власне рімановою метрикою, тобто з позитивно визначеною метричною формою (випадок, коли всі квадрати позитивні) ([7], [17], с. 399), тобто складають з двох елементів з позначеннями  $AB$  і  $CD$  (табл. 3).

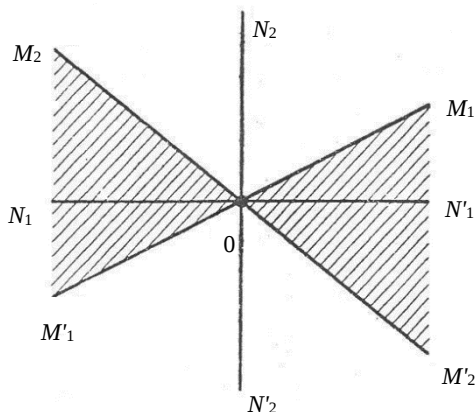
В спрощенні згідно еліптичної геометрії, вважається що кожна із сукупностей  $M_1$  і  $M_2$  є одним об’єктом, все ж таки, називаючи його точкою. Тут також зазна-

чається, що геометрію кола природно пов’язувати з геометрією пучка променів чи прямих, що виходять із центра. Далі на рис. 15 та 16 йдеться про взаємне розташування двох пар точок на еліптичній прямій у варіанті розділення. На рис. 15 це стосується пар прямих  $AB$  і  $CD$ , а на рис. 16 – це ілюструється інтерпретацією еліптичної геометрії на пучку прямих. Тут прямі  $N_1 N'_1$  і  $N_2 N'_2$  розділяють пару прямих  $M_1 M'_1$  і  $M_2 M'_2$ , тому що проходять в різних парах вертикальних кутів, утворюємих останніми [14] і навпаки. На основі зазначеного, йдеться про визначення точки многовиду двома координатами, а саме точку кола радіуса 1 координатами  $x, y$ , пов’язаних рівнянням:

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (5)$$



**Рис. 15.** Два класи взаємодіючих пар об’єктів в етапному ТП два сегменти на еліптичній прямій  $AB$  – матеріало-конструктивні об’єкти,  $CD$  – об’єкти технологічного оснащення



**Рис. 16.** Інтерпретація еліптичної геометрії на пучку прямих: прямі  $N_1 N'_1$  і  $N_2 N'_2$  розділяють пару прямих  $M_1 M'_1$  і  $M_2 M'_2$  (точки еліптичної прямої  $M_1 M_2$  і  $N_1 N_2$ , беруться з точністю до заміни кожної з них на протилежну [14])

В статті мова йде про простір з власне рімановою метрикою, тобто з позитивно визначеною метричною формою (випадок коли всі квадрати позитивні) [7], [20].

### 6.3. Сегменти еліптичної прямої

Далі, технологічно деталізуючи дві різні точки  $M_1$  ( $AB$ )  $M_2$  ( $CD$ ) еліптичної прямої (рис. 15 і рис. 17). Тут зазвичай, [7], [14], розділяють її на дві частини, які

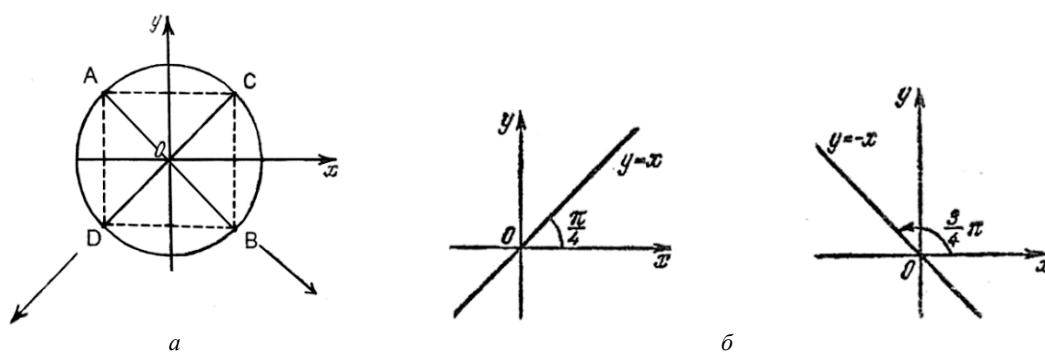


Рис. 17. а) Варіант визначеного положення точок на еліптичній прямій (згідно рис. 16); б) Графік-бісектриси першого та третього, а також другого та четвертого координатних кутів

будемо називати навзаєм пов'язано – додатковими в конкретному етапі ТП, технологічними інтервалами еліптичної прямої. Якщо точки  $M_1$ :  $M_2$  приєднані до обох інтервалів, то їх називають сегментами. При цьому точки  $M_1$  і  $M_2$  є крайніми точками кожного сегмента з хордами  $AB$  і  $CD$ , а останні точки кожного сегмента є його внутрішніми точками. Наприклад, в сегменті  $AB$  внутрішніми точками є точка  $C$  чи  $D$ . Ділення прямої точками  $M_1$  і  $M_2$  на два інтервали (чи сегмента) є однозначне в тому сенсі, що воно не залежить від вибору проміневої точки  $N$  (виділена технічна ознака) за допомогою, чи на основі якої це ділення виконано. Якщо еліптична пряма інтерпретується окружністю з ототожненням протилежних точок, то інтервали (чи сегменти) являють собою дві пари протилежних дуг  $AC$  і  $DB$ , а також  $CB$  і  $DA$  (рис. 15). Довжина дуги може бути пов'язана з режимами ТП в досягненні цілі. Два сегменти, на які дві точки розбивають еліптичну пряму, можуть бути рухом одно з них (обертанням навколо центра кола чи пучка). Порівнюючи їх можна говорити і в технологічному сенсі і про більший чи менший із цих сегментів, або про їх рівність. Якщо у спрощенні ці сегменти рівні, то їх кінцеві точки  $AB$  і  $CD$  взаємно полярні, а довжина кожного сегмента в цьому випадку дорівнює  $\pi/2$  (рис. 17), де внутрішній квадрат утворюють хорди сегментів. Для деталізації співвідношення між прямими  $AB$  і  $CD$  в ТП, можна залучити формальний апарат фігури еліпса, де точки  $AB$  і  $CD$  його вершини, а також  $2a$ -велика, а  $2b$ -мала осі тощо [7].

#### 6.4. Залучення принципу найменшої дії в порівняльній ефективності

При дослідженні траєкторії  $ADC$  (чи етапу ТП) розглядаються траєкторії, що починає в певній точці визначеного простору (при формалізації – координатного простору) і закінчується в іншій наперед вибраній точці цього простору залежно (пріоритет) чи незалежно від часу, якого вимагає подолання шляху між двома точками. Ясно, для того, щоб знайти траєкторію сис-

теми чи процесу у конфігураційному просторі, необхідно перебрати дві можливі траєкторії “технологічного” руху й вибрати той варіант, для якого він буде найменшим. Ясно, що це пов'язано з розмаїттям ТП в різних видах виробництва. Тут для прикладу може йтися про холодну листову штамповку деталей зі значенням найменшої дії на рівні оцінки 1 (геометрично – це полюс на сфері). В технологіях АК можна говорити про технологічно редуковану (скорочену) висококомеханізовану напівавтоматичну чи автоматичні дії на ін. Наостанок очевидно, що наведений в статті об'єм можливої технологічної інтерпретації понять сферичної та ріманової геометрії не вичерпаний, як-от приміром, кривину окружності. Адже неевклідові простори розглядаються як ріманові простори постійної кривини ([20], с. 622)). Наприклад, в спрощенні кривину можна розуміти за допомогою наступної механічної інтерпретації [7]. Допустимо, що матеріальна точка рухається вздовж плоскої кривої. Тоді модуль нормальної складової прискорення дорівнює  $\alpha = \kappa \cdot u^2$ , де  $\kappa$  – кривина кривої, а  $u$  – швидкість руху зазначеної точки. Тут можна говорити про динамічні оцінки технологічної системи, де  $u$  – швидкість протікання ТП, а кривина ( $\kappa$ ) в інтерпретації – зібране поняття з пов'язаних характеристик об'єктів АК, чи параметрів процесу.

#### Висновки

Як подальший розвиток попередніх результатів робіт [1]–[4] на основі системного аналізу та інтерпретаційно-формального підходу в новому науково-технічному напрямку слідує:

1. Технологічна інтерпретація уподібнених (доволі зближених, співзвучних) положень неевклідових геометрій: сферичної та геометрії Рімана. Тобто йдеться про інтерпретаційне тематичне дослідження, про розширене і формальне поле представлення ТП в концепті “технологічний смисл”.
2. Інтерпретація низки положень і моделей проєктивного простору (у певному взаємозв'язку з Рімановою геометрією).

3. Зазначена інтерпретативна адекватність технологічному тлумаченню еліптичного  $n$ -простору [20], як множині елементів, названих точками, який в свою чергу, ізометричний множині пар діаметрально протилежних точок сфери простору  $R_{n+1}$ .

4. На основі п.п.1.2. проведений інтерпретивно-технологічний аналіз в напрямках практичного представлення:

- а) багатоетапного ТП – на еліптичній площині;
- б) етапи ТП – на еліптичній прямій;
- в) трикутників – на сфері та еліптичній площині.

### Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що вони не мають жодного конфлікту інтересів щодо цього дослідження, включаючи фінансові, особисті, авторські або будь-якого іншого характеру, які могли б вплинути на дослідження та його результати, представлені в цій статті.

### Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що не використовували технології штучного інтелекту при створенні даної роботи.

## References

- [1] D. Kiva and V. Zabashta, "Alternative technologies of composite high-loaded aircraft constructions: a qualitative method of making multicriterial decisions. Part I. Initial stages in the problem of decision-making", *Mech. Adv. Technol.*, vol. 5, no. 2, pp. 203–211, Nov. 2021, doi: <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2021.5.2.245000>.
- [2] V. Zabashta, "Alternative technologies of composite highly loaded of aircraft structures: a qualitative method of making multicriteria decisions. Part II. Modeling in multi-criteria evaluation of alternatives", *Mech. Adv. Technol.*, vol. 6, no. 2, pp. 203–220, Oct. 2022, doi: <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2022.6.2.265371>.
- [3] V. Zabashta, "Alternative technologies of composite of highly loaded aircraft structures: a qualitative method for making multicriteria decisions: Part III. Research of the methodological basis in decision-making: technological constructions in the assessment toolkit", *Mech. Adv. Technol.*, vol. 7, no. 3 (99), pp. 374–388, Dec. 2023, doi: <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2023.7.3.293231>.
- [4] V. Zabashta, "Alternative technologies of composite highly loaded aircraft structures: a qualitative method of making multicriteria decisions. Comprehensive presentation: Part IV. Equilibrium and stability of the dynamic model of the ADS", *Mech. Adv. Technol.*, vol. 8, no. 3(102), pp. 316–331, Sep. 2024, doi: [https://doi.org/10.20535/2521-1943.2024.8.3\(102\).302969](https://doi.org/10.20535/2521-1943.2024.8.3(102).302969).
- [5] Interpretation and analysis of data in sociological research. - M.: Nauka, 1997.
- [6] S. P. Dunda, "Development of the enterprise and assessment of factors which influence it," *Efektivna ekonomika*, No. 12, 2016. <http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=5329>.
- [7] E. V. Stehantsev, P. G. Stehantseva, "Invariants of the projective plane," Zaporizhzhia: ZNU, 2011.
- [8] I. M. Yaglom *Geometriya tochek i geometriya pryamih*, M.: Znanie, 1998.
- [9] P. S. Aleksandrov *Scho take neevklidova geometriya*, Radyanska shkola, 1954.
- [10] V. M. Borovik, V. P. Yaponets, *Kurs vischoyi geometriyi*, Sumi.: Universitetska kniga, 2024.
- [11] N. V. Efimov, *Vysshaya geometriya*, M.: Znanie, 1981.
- [12] S. A. Bohomolov, *Vvedeniye v neevklydovu geometriyu Rimana*, L.: URSS, 1934.
- [13] V. F. Kagan, *Osnovaniya geometrii*, ch.2, M.: Izd-vo "Tekhnika – teoreticheskoy literatury", 1956.
- [14] F. H. Kleyn, *Neevklidova geometriya*, M.: Mir, 2003.
- [15] A. D. Aleksandrov, N. Yu. Netsvetaev, *Geometriya*, M.: Nauka. Fizmatlit, 1990.
- [16] P. K. Rashevskiy, *Rimanova geometriya i tenzornyiy analiz*, M.: URSS, 2006.
- [17] M. M. Postnikov, *Rimanova Geometriya*, M.: Fizmatlit, 1998.
- [18] Matsuo Komadu, *Mnogoobraznaya geometrii*, M.: Znanie, 1981.
- [19] B. A. Rozenfeld, *Neevklidovi prostranstva*, M.: Nauka, 1969.
- [20] R. Hartshorn, *Osnovy proektivnoy geometrii*, Vologda: Platon, 1997.
- [21] 3.4 Eliptichna geometriya. Libre Texts. Elektronniy resurs 22.10.2022.
- [22] N. M. Kovantsov et al., *Differentsialnaya geometriya. Topologi, tenzornyiy analiz*, K.: Vysshaya shkola. 1989.
- [23] M. F. Grebenyuk et al., *Kvadratichni formi ta yih zastosuvannya*, K.: NAU, 2004.
- [24] I. H. Sivashinskiy, *Elementarnyye funktsii i grafiki*, M.: Nauka, 1968.
- [25] N. M. Danilevskiy et al., *Osnovi sferichnoyi geometriyi ta trigonometriyi*, H.: HNAMI, 2011.
- [26] A. Scherba et al., *Topogeodezichna priv'yazka elementiv boyovogo poriadku pidrozdiliv raketnih viysk i aritel'iyi: Navchalno – metodichniy posibnik*, Lviv: NASV, 2022.

## Formalization of technological processes based on non-Euclidean geometries: spherical and Riemann geometry

Volodymyr Zabashta<sup>1</sup>

<sup>1</sup> JSC Ukrainian Research Institute of Aviation Technology (UkrNDIAT), Kyiv, Ukraine

**Abstract.** It is a continuation of the set of research works [1]–[4] on modeling and formalization in the direction of ideas and concepts of the geometries mentioned above. First of all, it concerns the technological interpretation of geometric images on the sphere, in particular, the elliptical plane. Intersecting or converging lines were studied here - this is a bundle of straight lines with its own vertex or an elliptical bundle. At the same time, at the macro level - in relation to TP, as a set of stages or states of ADS [2], and at the subordinate meso level - to a separate TP stage. In modeling, the surface of the sphere is considered as a spatial analogue of the central great circle (equator), the center of which coincides with the center of the sphere. The “field of action” of these geometries (as well as TP) is the surface of the sphere. And an important transformation of similarity in the theory is considered that the main “constructive” (forming) element is a now connected (glued) pair of diametrically opposite points (or points – antipodes [19] – a conditional “point”. With these antipodal points. The concepts of “line” and “plane” are defined precisely in Riemann’s geometry and in their subsequent technological interpretation. is a set of great circles (TP stages) and in spherical geometry it is a line, then in similarity transformations it is a “line” (a set of conditional “points”) placed on an elliptic plane. Since the elliptic space within the geometry of position contains at least four points, then they are given a technological interpretation with a formal presentation (quadratic form).

**Keywords:** axiomatics of the theory, sphere, great circle, elliptic space, “point”, “line”, “plane”, similarity transformation, separation, duality, quadratic form, interpretation.

---