

Визначення факторів впливу та коефіцієнтів концентрації напружень для експрес-розрахунків на міцність однозрізних болтових з'єднань шаруватих композитних пластин. Повідомлення 2

К. М. Рудаков¹

Received: 2 May 2025 / Revised: 30 May 2025 / Accepted: 6 June 2025

Анотація. При проектуванні болтових з'єднань (БЗ) необхідно, зокрема, проводити їхні перевірні розрахунки на міцність. При цьому бажано застосовувати експрес-аналіз: розрахунки за простими формулами достатньої точності. Для БЗ пластин із шаруватих полімерних композиційних матеріалів (ПКМ) проблема ще не вирішена. Зокрема, не знайдена формула визначення максимального напруження біля отвору для схем армування типу $[0/\varphi/-\varphi/90]_s$ й $[\varphi/-\varphi]_s$, при $0 < \varphi < 90$ (для всіх інших схем вже є п'ять формул, про що йшлося у Повідомленні 1).

Метою роботи було на основі результатів розрахунків за методом скінченних елементів (МСЕ) отримати відомості про розподілення максимальних напружень для схем армування типу $[0/\varphi/-\varphi/90]_s$ й $[\varphi/-\varphi]_s$ при змінних значеннях кута армування $0 < \varphi < 90$.

Були проведені модельні чисельні розрахунки із застосуванням МСЕ (контактна задача) для взаємодії пластини із шаруватого ПКМ з жорстким “болтом” (штифтом). Передбачалася 3D-ортотропія кожного шару, лінійна пружність, відсутність тертя та бічного зазору “болт”/отвір. Результати зведені в таблиці, наведені ілюстрації. Проведено аналіз результатів. Запропоновано ввести ще два фактора впливу на значення максимального напруження розтягу біля отвору в пластині з шаруватого ПКМ.

Аналітичної формули для розрахунку коефіцієнта концентрації напружень для послабленого отвором перерізу пластини зі схемою армування типу $[\varphi/-\varphi]_s$, $0 < \varphi < 90$ знайти не вдалося. Необхідні додаткові дослідження.

Ключові слова: болтове з'єднання; полімерне-композитний матеріал; максимальне напруження; коефіцієнт концентрації напружень; фактор впливу; міцність.

Вступ

Нагадаємо деякі відомості, викладені у Повідомленні 1 [1].

Розглядається болтове з'єднання (БЗ): композитна пластина розрахункової ширини (довга полоса) з отвором, в якому встановлено жорсткий “болт” (рис. 1). Під навантаженням в околі отвору виникає складний напружено-деформований стан. При цьому зі всіх відомих типів руйнування болтів та/або пластин розглядали тільки розрив пластини біля отвору в БЗ.

Експрес-розрахунки БЗ на міцність мають прості формули та добре обґрунтовані лише для ізотропних

матеріалів. Типова формула на розрив ізотропної пластини в ослабленому отвором (робочому) перерізі:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\text{ном}} \alpha = \frac{N}{t w (1 - d / w)} \alpha \leq [\sigma]_t. \quad (1)$$

Позначено: $\sigma_{\max}, \sigma_{\text{ном}}$ – максимальне та номінальне напруження; N – приведена (розрахункова) сила, що навантажує болт на зріз та ще й намагається розірвати пластину; d – номінальний діаметр болта або отвору; t – товщина пластини біля отвору; w – розрахункова ширина пластини, яка приходить на один отвір; α – теоретичний коефіцієнт концентрації напружень (ККН, нетто-переріз) у отвору, навантаженого болтом; $[\sigma]_t$ – допустиме значення напружень при розтягу.

Композиційний матеріал (КМ) – дуже загальне поняття, оскільки варіантів композиційних структур –

✉ К. М. Рудаков
knrudakov@ukr.net

¹ КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

безліч. Розглядаємо один із розповсюджених КМ – полімерний шаруватий КМ, далі – ПКМ. Шари створюються вуглецевою ниттю, проміжки заповнюються полімером. Напрямок укладання ниті (напрямок армування) визначається кутом відносно призначеної осі. Найпростіша модель для розрахунків характеристик напружено-деформованого стану (НДС) така: кожен шар моделюється як ортотропний матеріал; у площині шару головні осі пружної ортотропії визначаються напрямком ниті; кожна складова шару (нить та полімер) вважається ізотропним матеріалом.

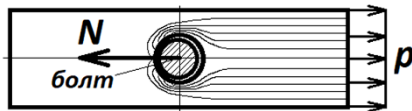


Рис. 1. Схема БЗ та замикання силових ліній [1]

У Повідомленні 1 [1] був проведений огляд публікацій з проблеми та сформульовано таку мету дослідження: модифікувати вираз (1) експрес-аналізу болтового з'єднання (БЗ) з ізотропним матеріалом на випадок БЗ “метал – пластина з ПКМ”, з наступним проведенням його структуризації шляхом відокремлення факторів впливу.

Розглядали два контрастних за пружними характеристиками варіанта матеріалу шарів, створювали моделі зі схемами армування пластини: $[0]_S$, $[90]_S$, $[90/0]_S$, $[\varphi/-\varphi]_S$, та $[\varphi/90/-\varphi/0]_S$, де приймали кут $\varphi = 45$ градусів. Проводили як аналітичні розрахунки, так і за методом скінченних елементів (МСЕ).

Виявили, що у випадку, коли перша головна вісь пружної ортотропії хоча б одного шару спрямована вздовж напрямку прикладення навантаження, є аналітичні формули для розрахунків ККН, які дають значення, близькі зі значеннями, отриманими за МСЕ.

Виявили п'ять факторів впливу на НДС БЗ, через які формулу (1) представили у вигляді:

$$\sigma_{\max} = q_1 q_2 \tilde{q}_3 \tilde{q}_4 \tilde{q}_5 f(z) \tilde{\alpha} \leq [\sigma]_t, \quad (2)$$

де функцію ще невизначених факторів впливу $f(\bullet)$ потрібно прирівняти одиниці; тильда над $\tilde{q}_3, \tilde{q}_4, \tilde{q}_5$ та ККН $\tilde{\alpha}$ вказує на присутність у БЗ композиційного матеріалу; фактори:

– $q_1 = p = N / (h w)$, де h – середня товщина пластини у місці прикладення навантаження (h може бути іншою, ніж t біля отвору);

– $q_2 = h / [t(1 - \zeta)]$, де $\zeta = d / w$;

– $\tilde{q}_3 = (E_{XX})_{\max} / (E_{XX})_{ef}$, де $(E_{XX})_{\max}$ – максимальний за значенням модуль пружності одного з шарів ПКМ, який співпадає з напрямком X дії сили N ; $(E_{XX})_{ef}$ – “ефективний” модуль пружності ПКМ у тому ж напрямку. Місія фактору $\tilde{q}_3$: перевести розг-

ляд ситуації з усіх шарів пластини на той шар (чи один з тих шарів) з кутом армування $\varphi = 0$, що сприймає найбільшу частину навантаження. Важливо, що не усі можливі схеми армування шарів мають хоча би один такий шар, і тоді потрібно призначити $\tilde{q}_3 = 1$.

– $\tilde{q}_4 \approx 1 - \beta \delta$, де δ – бічний зазор болт-отвір, мкм; $\beta > 0$ – коефіцієнт наближення. Цей фактор при наявності точного розв'язку проблеми контакту болт/отвір, може увійти у новий ККН (для одного шару), який вже буде враховувати бічний зазор болт/отвір, і тоді для формули (2) значення $\tilde{q}_4 = 1$;

– $\tilde{q}_5 \approx 1 + \gamma \cdot z_0^*$; $z_0^* = z_{0\max} / (t/2)$, де $\gamma > 0$ – коефіцієнт наближення; $z_{0\max}$ – відстань шару з кутом армування 0 градусів від нейтрального шару пластини (рис. 2).

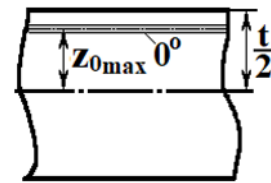


Рис. 2. Схема визначення $z_{0\max}$ [1]

Для схем армування $[0]_S$, $[90/0]_S$ та $[\varphi/90/-\varphi/0]_S$ є декілька наближених формул визначення ККН $\tilde{\alpha}$, які дають прийнятні результати. Вони були розглянуті у Повідомленні 1 [1].

Мета і задачі дослідження

У Повідомленні 1 [1] в розрахунках за МСЕ було отримано, що при схемі армування $[45/-45]_{2S}$ максимальні напруження у отвору значно більші, ніж при схемі $[45/90/-45/0]_S$. Крім того, формули таблиці 2 з [1], позначені як [18] та [19], не можуть бути застосовані для обчислення ККН $\tilde{\alpha}$. Отже, сформульована у Повідомленні 1 мета дослідження не була досягнута в повній мірі, і метою Повідомлення 2 є отримання відомостей про розподілення максимальних напружень для схем армування $[0/\varphi/-\varphi/90]_{2S}$ й $[\varphi/-\varphi]_{4S}$, де $0 \leq \varphi \leq 90$.

На перший погляд, є декілька аналітичних розв'язків для одношарових ортотропних матеріалів [2]–[5], за допомогою яких були отримані розподіли напружень для багатошарових пластин з БЗ, які мають різні схеми армування. Всі вони основані на теорії комплексних змінних, яку для пластин з вільними від навантаження отворами застосував С. Лехніцький [6]. Розв'язки [2]–[5] відрізняються різною складністю. В [3] маємо розв'язок з нескінченними рядами для випадку, коли одна з головних осей ортотропії співпадає з

напрямок навантаження на БЗ. В розв'язку статті [4] збігу вказаних напрямків не потрібно, можна врахувати тертя, і вже немає нескінченних рядів. Розв'язок дуже складний, але він є, і його можна спростити, якщо прибрати вплив тертя та/або ввести збіг напрямків. А розв'язок статті [5] найпростіший, оскільки не враховує тертя, припускає збіг напрямків, а також постулює розподіл контактних напружень за законом синусу й на дузі у 180 градусів.

Загальні риси цих розв'язків: у площині (тобто 2-D), “болт” абсолютно жорсткий, зазор “болт”/отвір відсутній, передбачено тільки чотири пружні характеристики ортотропного матеріалу (в площині): два модуля Юнга, модуль зсуву та коефіцієнт Пуассона. Автори статей застосували розв'язки для визначення напружень у отвору для різних схем з комбінаціями кутів армування 0, ± 45 та 90 градусів (схеми типу $[\varphi / -\varphi]_s$ при $0 < \varphi < 90$ не розглядали), але зробити це можливо тільки через **ефективні** пружні характеристики ламінату.

Відомо, що розв'язки з ефективними пружними характеристиками дають доволі точні значення переміщень, але деформацій та напружень – зовсім ні: див., наприклад, результати розрахунку БЗ за МСЕ на рис. 3 зі статті [7].

А нам потрібні саме напруження. Тобто навіть найскладніший розв'язок статті [4] не задовольняє.

Щодо схеми армування типу $[\varphi / -\varphi]_s$, де $0 < \varphi < 90$ (схема “перехресне намотування”), аналітичні формули для розрахунків теж не були знайдені. У цьому випадку для отримання формули для ККН $\tilde{\alpha}$ потрібно мати аналітичний розв'язок з кутами $\pm \varphi$ по відношенню до напрямку дії навантаження. Розв'язки з кутом армування φ є, але тільки для одного шару, а для комбінації хоча би з двох шарів $\pm \varphi$ їх не знайдено. Більш того, не відомі навіть характерні графіки розподілення максимальних напружень в БЗ пластин зі схемами “перехресного намотування”.

Матеріали та методи дослідження

За модельний зразок брали такі два варіанти: полоса без отвору; полоса з отвором, навантаженою “болтом”. Співвідношення: $\varsigma = d / w = 1/6$, при $d = 5$ мм, що відповідає рекомендаціям з [8].

Використовували одну площину симетрії: горизонтальну, тобто забороняли вертикальні переміщення у вузлах скінченно-елементної сітки на нижній площині пластини (рис. 3). Робили схеми армування $[0 / \varphi / -\varphi / 90]_{2s}$ й $[\varphi / -\varphi]_{4s}$, де $0 \leq \varphi \leq 90$ градусів, відкладених відносно повздовжньої осі X пластини. Щодо вертикальної повздовжньої площини симетрії, то у таких схемах армування її немає, хоча доволі часто вважають, що вона є (приблизно). Як виявляється, в останньому випадку максимальні напруження та ККН в розрахунках будуть завищені, але відносно незначно: до 20 %, що для композитів прийнятно. Усі вузли кожної з двох довгих торцевих поверхонь полоси пов'язували умовою однакового переміщення в напрямку нор-малей до цих поверхонь, тобто моделювали широку плиту з циклічно повторювальною геометрією з рис. 3. “Болт” моделювали як короткий абсолютно жорсткий циліндр (заборонені всі ступені свободи вузлів його циліндричної поверхні). Навантаження прикладали до правого (рис. 3) торця пластини як від'ємний тиск p , тобто розподілене, що розтягує (відповідає схемі на рис. 1).

Половину товщини композитної пластини моделювали 8-ма шарами ПКМ (є отвір) та 4-ма шарами (без отвору), створеними стрічками з полімерною основою товщиною по 0.1 мм. Вважали, що кожен шар ПКМ є пружним та 3D-ортотропним. Прийняті модулі пружності шарів узяли з таблиці 1 зі статті [1].

Ці матеріали характерні різними відношеннями E_{11} / E_{22} : відповідно 8.52 та 18.75, тобто охоплюють доволі значний діапазон можливих співвідношень.

Скінченно-елементні моделі робили змішаними [9]: частина моделі пластини у отвору отримала дуже



Рис. 3. Модельний зразок: половина товщини полоси з отвором, у який вставлено жорсткий штифт (“болт”)

Таблиця 1. Модулі пружності шарів (I – ЭДТ-10 / ТС 36S-12K; II – УОЛ-300-1А)

Матеріал шару	Модулі Юнга, МПа			Модулі зсуву, МПа			Коефіцієнти Пуассона		
	E_{11}	E_{22}	E_{33}	G_{12}, G_{21}	G_{13}, G_{31}	G_{23}, G_{32}	μ_{12}, μ_{13}	μ_{23}, μ_{32}	μ_{21}, μ_{31}
I	149700	17560	17560	16830	16830	7630	0.2637	0.1504	0.0309
II	150000	8000	8000	4400	4400	2700	0.2900	0.4800	0.0155

щільну сітку, і ця частина була вклеєна (Glued) в іншу частину з розрідженою сіткою. Це дозволило отримати розв'язки контактної тривимірної задачі на персональній ЕОМ підвищеної потужності. Всі скінченні елементи пластини – тривимірні типу Brick Parabolic (20 вузлів, другий порядок наближення). Розміри скінченно-елементної сітки обирали за ознакою збіжності результатів (при діаметрі отворів у 5 мм при їх поверхнях розміри СЕ у плані в окружному напрямку складали 2/3 градуса, виглядали майже як квадрат із розмірами приблизно 0.03×0.03 мм). Загальна кількість вузлів моделі склала біля 422 тисяч. Задача статична, тривимірна, контактна.

Розрахунки за МСЕ проводили в учбовій версії програмного комплексу Femap від Siemens з процесором NX Nastran.

Результати розрахунків за МСЕ: схема армування $[0/\varphi/-\varphi/90]_{2S}$

Спочатку на пластинках без отворів, за МСЕ отримали значення ефективних модулів пружності при схемі армування $[0/\varphi/-\varphi/90]_{2S}$. Кут $0 \leq \varphi \leq 90$ відкладався від повздовжньої осі, з кроком у 15 градусів. Далі за формулами (9) й (11) з Повідомлення 1 [1], а саме $\tilde{q}_3 = (E_{XX})_{\max} / (E_{XX})_{ef}$ та $p = \sigma_{nom} (1 - \zeta) \frac{t}{h} \frac{1}{\tilde{q}_3}$, при $t = h$ обчислили значення двох факторів: $\tilde{q}_3$ й $q_1 = p$ для отримання в послабленому отвором перерізі пластини значення $\sigma_{nom} = 100$ МПа при майбутніх розрахунках БЗ зі схемою армування $[0/\varphi/-\varphi/90]_{2S}$. Результати приведені у таблиці 2 та на рис. 4.

При навантаженнях p з таблиці 2 провели розрахунки за МСЕ пластини, навантаженої жорстким “болтом”. Деякі результати – у таблиці 3 та на рис. 5 й рис. 6.

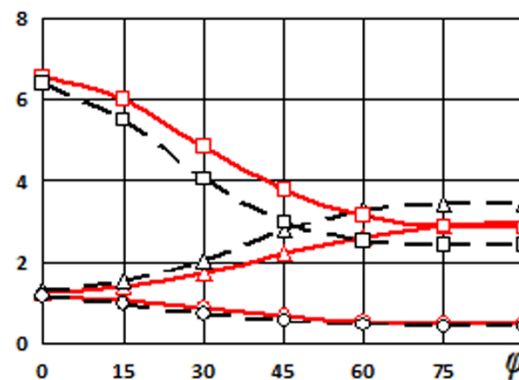


Рис. 4. Графіки функцій від кута армування φ , схема армування $[0/\varphi/-\varphi/90]_{2S}$ (суцільна – I; штрихова – II): $\circ - (E_{xx})_{ef} \cdot 10^{-5}$ МПа; $\Delta - \tilde{q}_3$; $\square - p \cdot 10^{-1}$ МПа

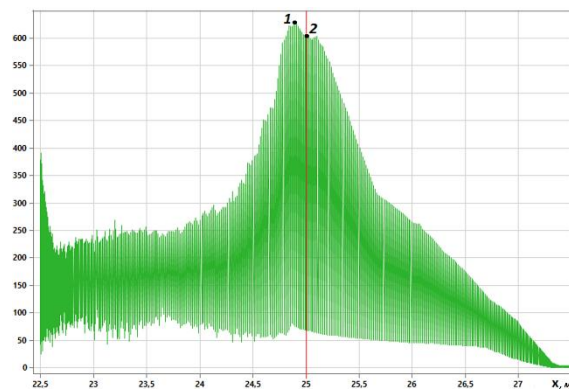


Рис. 5. Характерний вигляд розподілу напружень σ_1 на поверхні отвору. Схема армування $[0/\varphi/-\varphi/90]_{2S}$. Координата центру отвору $x = 25$ мм (контактна зона – зліва). Точка 1 – $(\sigma_1)_{\max}$, точка 2 – $(\sigma_1)_{(90)}$

Таблиця 2. Залежності $(E_{xx})_{ef}$, $\tilde{q}_3$ та $q_1 = p$ від кута армування φ (для схеми армування $[0/\varphi/-\varphi/90]_{2S}$, навантаження p , яке буде викликати в послабленому перерізі $\sigma_{nom} = 100$ МПа; збережені по 4 значущі цифри)

Кут армування φ , град.	I			II		
	$(E_{xx})_{ef} \cdot 10^{-5}$, МПа	$\tilde{q}_3$	$q_1 = p$, МПа	$(E_{xx})_{ef} \cdot 10^{-5}$, МПа	$\tilde{q}_3$	$q_1 = p$, МПа
0	1.175	1.274	65.43	1.151	1.304	63.93
15	1.078	1.389	60.01	0.988	1.519	54.88
30	0.867	1.726	48.28	0.727	2.063	40.40
45	0.677	2.210	37.71	0.536	2.801	29.75
60	0.571	2.623	31.77	0.456	3.292	25.31
75	0.519	2.885	28.88	0.438	3.425	24.33
90	0.507	2.952	28.23	0.437	3.435	24.26

Примітка 1. Розрахунки $(E_{xx})_{ef}$ за допомогою інструменту Layups з Femap дали значення, близькі до значень таблиці 2 з точністю до останнього приведенного знаку.

Таблиця 3. Значення на поверхні отвору в пластині ($\zeta = 1/6$), що взаємодіє з жорстким “болтом” (без тертя, $t = h$, навантаження p , яке викликає в послабленому перерізі $\sigma_{nom} = 100$ МПа). Схема армування $[0/\varphi/-\varphi/90]_S$. Напруження $\sigma_1 \cdot 10^{-2}$ МПа – на поверхні отвору у зонах, визначених кутом у дужках понизу

Кут армування φ , град.	I				II			
	$(\sigma_1)_{max}$	$\tilde{\alpha}(\zeta); (\sigma_1)_{(90)}$	$(\sigma_1)_{(0)}$	$(\sigma_1)_{(\varphi-90)}$	$(\sigma_1)_{max}$	$\tilde{\alpha}(\zeta); (\sigma_1)_{(90)}$	$(\sigma_1)_{(0)}$	$(\sigma_1)_{(\varphi-90)}$
0	8.78	8.45	8.68	8.45	19.3	15.2	19.2	15.2
15	8.25	7.62	7.43	4.62	12.2	10.7	12.2	6.70
30	7.12	6.70	5.35	3.09	8.44	7.75	7.14	3.23
45	6.30	6.00	3.80	2.25	7.14	6.83	4.65	2.38
60	6.16	5.95	2.80	2.26	7.29	7.18	3.49	2.43
75	6.40	6.22	2.42	2.35	8.98	8.93	3.32	3.62
90	6.65	6.64	2.62	2.63	11.4	11.3	4.83	4.83

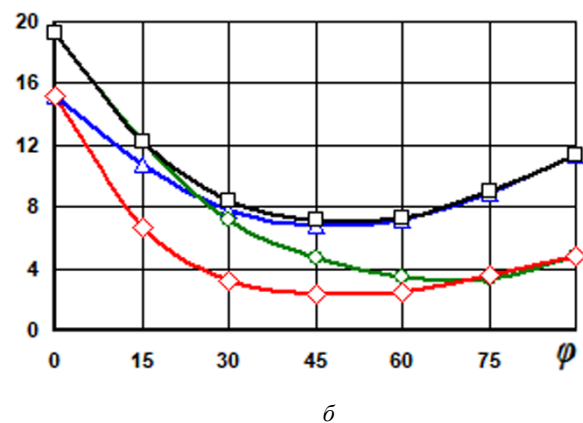
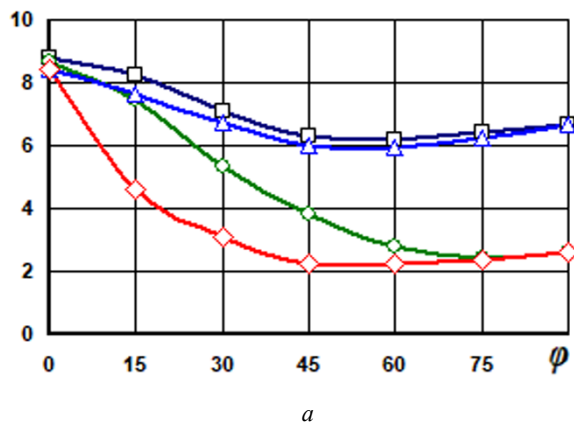


Рис. 6. Графіки максимальних напружень $\sigma_1 \cdot 10^{-2}$, МПа як функцій від кута армування φ у схемі $[0/\varphi/-\varphi/90]_{2S}$ (матеріали I – (а); II – (б)): $\square$ – $(\sigma_1)_{max}$; $\triangle$ – $(\sigma_1)_{(90)}$; $\circ$ – $(\sigma_1)_{(0)}$; $\diamond$ – $(\sigma_1)_{(90-\varphi)}$

Результати розрахунків за МСЕ: схема армування $[\varphi/-\varphi]_{4S}$

Для цієї схеми армування і результатів обчислень за МСЕ маємо такі значущі фактори впливу на НДС БЗ: $q_1 = p = N/(hw)$, $q_2 = h/[t(1-\zeta)]$; $\tilde{q}_3 = \tilde{q}_4 = \tilde{q}_5 = 1$, а про $\tilde{q}_6$ ще даних немає. Пояснення: фактор $\tilde{q}_3 = 1$ тому, що для формули $\tilde{q}_3 = (E_{XX})_{max}/(E_{XX})_{ef}$ ця схема армування буде давати $(E_{XX})_{max} = (E_{XX})_{ef}$ при $0 \leq \varphi < 45$. А $\tilde{q}_4 = \tilde{q}_5 = 1$, оскільки при розрахунках немає ні початкового зазору, ні вторинного вигину.

Попередні розрахунки були проведені у припущенні про наявність поздовжньої площини симетрії, результати були наведені в [10]. В цій статті застосували розрахункову схему без поздовжньої площини симетрії. Напруження незначно знизилися, але принципів змін не виявлено.

Основні результати розрахунків за МСЕ приведені в таблицях 4 й 5, та проілюстровані на рис. 7.

Дані наступної таблиці 6 проілюстровані на рис. 8.

Проявилася така цікава властивість: при малих значеннях кута φ максимальні значення σ_1 реалізуються за зоною контакту: див. таблицю 6 та рис. 8 й 9.

Таблиця 4. Значення на поверхні отвору в пластині ($\zeta = 1/6$), що взаємодіє з жорстким “болтом” (без тертя, навантаження p , яке викликає в послабленому перерізі $\sigma_{nom} = 100$ МПа, $t = h$, фактор $\tilde{q}_3 = 1$). Збережені по три значущі цифри. Схема армування $[\varphi / -\varphi]_{45}$

Кут армування φ , град.	I			II		
	$(\sigma_1)_{max} \cdot 10^{-2}$, МПа	$\tilde{\alpha}(\zeta)$; $(\sigma_1)_{(90)} \cdot 10^{-2}$, МПа	$\frac{(\sigma_1)_{max}}{(\sigma_1)_{(90)}}$	$(\sigma_1)_{max} \cdot 10^{-2}$, МПа	$\tilde{\alpha}(\zeta)$; $(\sigma_1)_{(90)} \cdot 10^{-2}$, МПа	$\frac{(\sigma_1)_{max}}{(\sigma_1)_{(90)}}$
0	9.81	9.72	1.01	17.8	17.5	1.02
7.5	9.25	9.08	1.02	12.4	10.1	1.23
15	8.25	7.65	1.08	11.0	6.45	1.71
22.5	7.28	6.25	1.16	11.9	4.20	2.83
30	7.50	5.30	1.42	13.8	3.25	4.25
37.5	8.70	4.72	1.84	17.2	2.85	6.04
45	9.50	4.35	2.18	21.1	2.65	7.96
52.5	10.1	4.10	2.46	22.4	2.55	8.78
60	10.0	4.11	2.43	20.9	2.61	8.01
67.5	9.10	4.07	2.24	19.2	2.95	6.51
75	8.50	4.15	2.05	17.9	3.59	5.00
82.5	7.60	4.28	1.78	16.2	4.60	3.52
90	6.95	4.33	1.60	14.9	5.40	2.76

Примітка 2. ККН $\tilde{\alpha}(\zeta)$ завжди обчислюється у послабленому перерізі (при $\varphi = 90$ градусів), а $(\sigma_1)_{max}$ реалізується в різних зонах на поверхні отвору (див. таблицю 6).

Таблиця 5. Тренд функцій на графіках рис. 7 (поліноміальне наближення) та показники якості наближення R^2

	I	II
$(\sigma_1)_{max} \cdot 10^{-2}$, МПа	$y = -1E - 09x^6 + 3E - 07x^5 - 4E - 05x^4 + 0.0019x^3 - 0.0385x^2 + 0.14x + 9.81$; $R^2 = 0.9888$	$y = 4E - 06x^4 - 0.0009x^3 + 0.06x^2 - 1.2107x + 18.04$; $R^2 = 0.973$
$\tilde{\alpha}(\zeta)$; $(\sigma_1)_{(90)} \cdot 10^{-2}$, МПа	$y = -5E - 07x^4 + 8E - 05x^3 - 0.0025x^2 - 0.1211x + 9.72$; $R^2 = 0.9934$	$y = 2E - 06x^4 - 0.0004x^3 + 0.0308x^2 - 1.1211x + 17.5$; $R^2 = 0.9957$
$\frac{(\sigma_1)_{max}}{(\sigma_1)_{(90)}}$	$y = 2E - 07x^4 - 5E - 05x^3 + 0.0033x^2 - 0.0413x + 1.009$; $R^2 = 0.9695$	$y = 2E - 06x^4 - 0.0003x^3 + 0.0199x^2 - 0.2016x + 1.017$; $R^2 = 0.973$

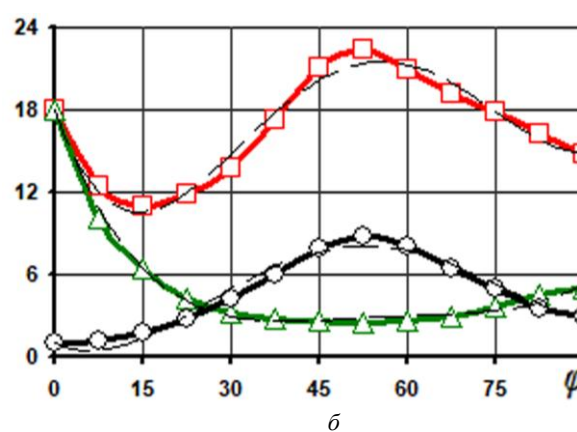
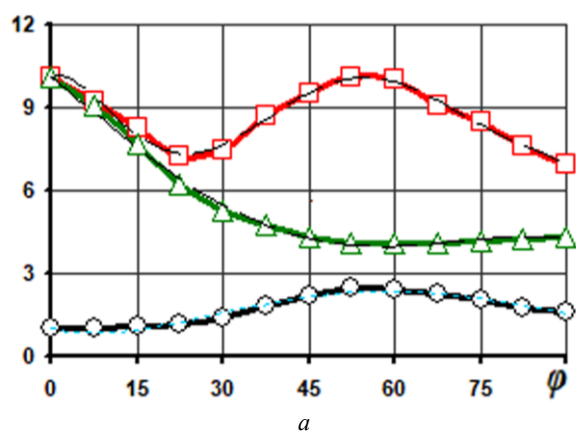


Рис. 7. Графіки функцій таблиці 4 (матеріали: I – (а); II – (б)), схема армування $[\varphi / -\varphi]_{45}$: $\square - (\sigma_1)_{max} \cdot 10^{-2}$, МПа; $\Delta - \tilde{\alpha}(\zeta)$; $(\sigma_1)_{(90)} \cdot 10^{-2}$, МПа; $\circ - (\sigma_1)_{max} / (\sigma_1)_{(90)}$; --- – лінії тренду

Таблиця 6. Кут $\psi(\varphi)$, що вказує на зону на поверхні отвору в пластині, де реалізується найбільше значення головного напруження σ_1 . Схема армування $[\varphi / -\varphi]_{45}$

φ , град.	0	7.5	15	22.5	30	37.5	45	52.5	60	67.5	75	82.5	90
I	90	84.2	78.2	69.0	60.4	54.5	43.9	39.1	33.7	24.7	17.7	6.9	0
	90	96.9	102.7	108.8	—	—	—	—	—	—	—	—	—
II	90	82.6	73.6	66.2	60.2	53.1	44.3	37.4	34.1	21.6	16.3	9.2	0
	90	97.0	104.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

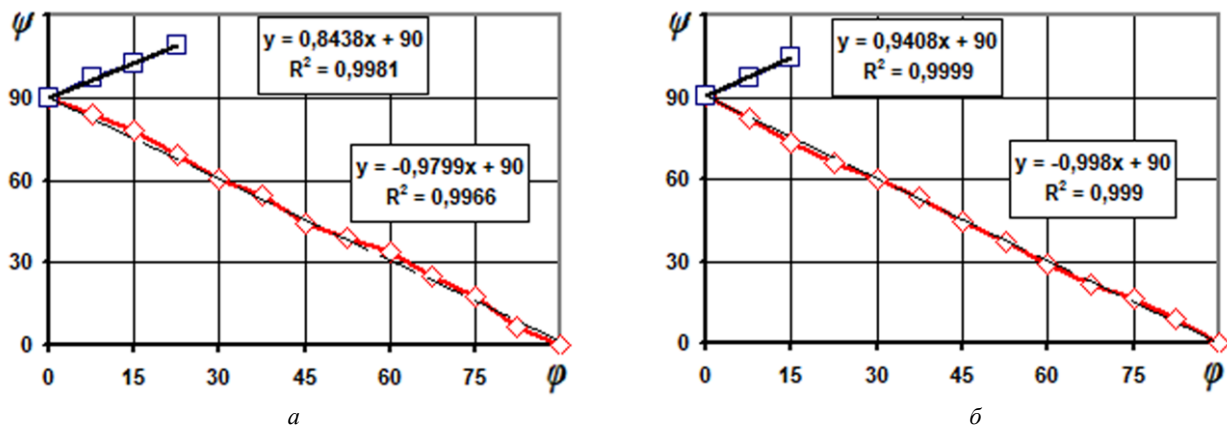


Рис. 8. Графіки функцій $\psi(\varphi)$ таблиці 6 (матеріали: I – (a); II – (б)). Схема армування $[\varphi / -\varphi]_{45}$

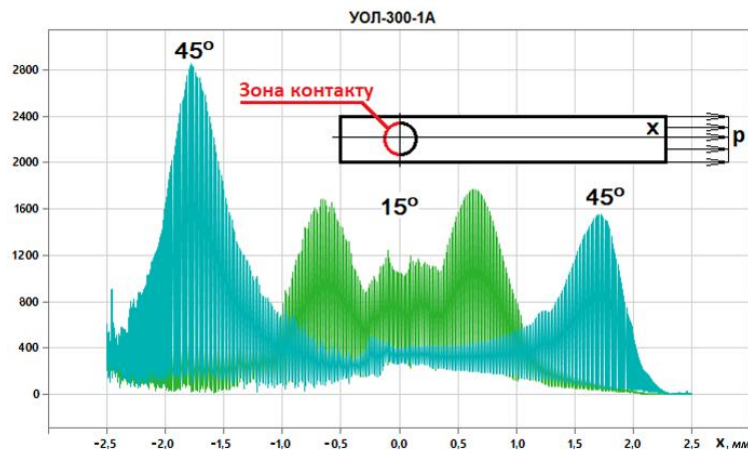


Рис. 9. Графіки розподілу головного напруження σ_1 вздовж поверхні контакту, для пластин з кутами φ у 15 та 45 градусів таблиці 6. Зона контакту – при $x < 0$

Обговорення та висновки

А) Схема армування $[0 / \varphi / -\varphi / 90]_{2S}$ при $0 \leq \varphi \leq 90$.

Приведені та інші результати, отримані для схеми армування $[0 / \varphi / -\varphi / 90]_{2S}$ при $0 \leq \varphi \leq 90$ дозволяють сформулювати такі висновки:

1. Оскільки схема армування $[0 / \varphi / -\varphi / 90]_{2S}$ містить шари з кутом армування 0 градусів, то біля отвору значення $(\sigma_1)_{\max}$ завжди реалізується саме у такому шарі (див. табл. 3 та рис. 6).

2. У всіх випадках $(\sigma_1)_{\max}$ реалізуються не точно в ослабленому перерізі, а при дещо меншому за 90 градусів куті (див. рис. 5). Цей ефект відомий. Наприклад, ще у статті [3] відзначено, що “A remarkable fact is that

the tangential stress concentration σ_θ / p does not always have its maximum value for $\theta = 0^\circ$. (тут кут $\theta = \varphi - 90$ градусів). Але таке явище спостерігали і для ізотропних матеріалів, наприклад в [11]. На тій же скінченно-елементній моделі, тільки замінивши матеріал на ізотропний, отримали $(\sigma_1)_{\max}$ при куті $\varphi = (90 - 5.06)$ градусів, тобто площа контакту зменшилася приблизно на 6 %. При цьому $(\sigma_1)_{\max}$ виявилось більше, ніж $(\sigma_1)_{(90)}$ приблизно на 6.8 %.

3. Отже, з огляду на п. 2, для схеми армування $[0/\varphi/-\varphi/90]_{2S}$ при всіх практично значимих кутах армування φ можемо ввести новий фактор впливу, через відношення $(\sigma_1)_{\max} / (\sigma_1)_{(90)}$. Узяли дані з таблиці 3, отримали графіки, показані на рис. 10 а. Бачимо, що відношення $(\sigma_1)_{\max} / (\sigma_1)_{(90)}$ залежить від кута армування φ . Але ефект зменшення площі контакту присутній незалежно від властивостей матеріалу. Тому ввели не один, а два нових фактори впливу:

$$q_6 = \left((\sigma_1)_{\max} / (\sigma_1)_{(90)} \right)_{\text{isotropic}},$$

$$\tilde{q}_7 = \left((\sigma_1)_{\max} / (\sigma_1)_{(90)} \right) / q_6. \quad (3)$$

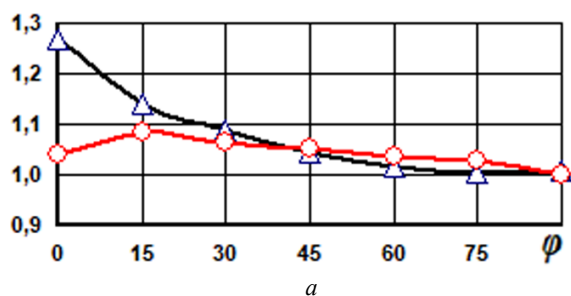
Для обчислення q_6 обрали результати розрахунку для ізотропної пластини, тому, що їх, по-перше, отримати значно простіше, ніж для ламінату, а, по-друге, за базу завжди краще брати ізотропний варіант.

Згідно з (3) будемо вважати (див. рис. 5), що пікові значення $(\sigma_1)_{\max}$ на поверхні отвору – це напруження $q_6 \tilde{q}_7 \cdot (\sigma_1)_{(90)}$. Тому замість формули (2) маємо формулу:

$$\sigma_{\max} = q_1 q_2 \tilde{q}_3 \tilde{q}_4 \tilde{q}_5 q_6 \tilde{q}_7 f(z) \tilde{\alpha} \leq [\sigma]_t. \quad (4)$$

Графіки нового фактору $\tilde{q}_7$ (див. рис. 10 б) отримали з графіків рис. 10 а, шляхом ділення на прийняте значення $q_6 = 1.068$.

Для популярної схеми $[0/45/-45/90]_{2S}$ можна прийняти $\tilde{q}_7 \approx 0.98$ чи навіть $\tilde{q}_7 \approx 1.0$. А при кутах армування $15 \leq \varphi \leq 75$ градусів $\tilde{q}_7 \approx [1.07 \div 0.94]$.



Б) Схема армування $[\varphi/-\varphi]_{4S}$ при $0 \leq \varphi \leq 90$.
Результати розрахунків за МСЕ (таблиці 4 й 5, рис. 7, 8 й 9) показують, що:

1. Положення значення максимального напруження $(\sigma_1)_{\max}$ є змінним, фактично є лінійною функцією $\psi(\varphi) = 90 - \varphi$ градусів (див. рис. 8).

2. Для схеми армування $[\varphi/-\varphi]_{4S}$ при $0 \leq \varphi \leq 90$, згідно з формулою (4), маємо для факторів впливу $q_6 \tilde{q}_7$ на рис. 7 графіки, позначені як $\circ - (\sigma_1)_{\max} / (\sigma_1)_{(90)}$. Оскільки прийняли $q_6 = 1.068$, значення $\tilde{q}_7$ дуже сильно відрізняються від тих, що є на рис. 10 б, тобто для схеми $[0/\varphi/-\varphi/90]_{2S}$.

3. Для схем армування типу $[\varphi/-\varphi]_S$ потрібні особливі аналітичні формули, які визначають критичний стан через максимальне значення головного напруження σ_1 . Це – **аналітичний** розв'язок статичної **тривимірної контактної** крайової задачі з пошаровим моделюванням пластини, кожний шар якої є 3-D ортотропним матеріалом. Автору не вдалося знайти вказаний аналітичний розв'язок. Ні самостійно, ні в літературі, зокрема і в довідковій, наприклад, в [12]–[14]. Є багато **чисельних** розв'язків для шаруватих пластин. Зокрема, наприклад, для дослідження розшарування біля “вільної кромки” пластини [15] застосовували метод скінчених різниць, враховували 3-D ортотропію, але не було контактної задачі про БЗ, і не було аналітичних методів.

Це дуже складне завдання для наступних досліджень і публікацій.

В) Загальні висновки:

1. На основі досліджень запропоновано сім факторів впливу на максимальне напруження розтягу на поверхні отвору в пластині із шаруватого полімерного композиційного матеріалу в БЗ цієї пластини.

2. Визначена точність чотирьох формул отримання коефіцієнта концентрації напружень на поверхні отвору [1].

3. Взаємовплив шарів у композитній пластині дещо знижує ККН на поверхні отвору пластини при БЗ, тому розглянуті формули можуть давати завищені значення, що піде у запас міцності БЗ [1].

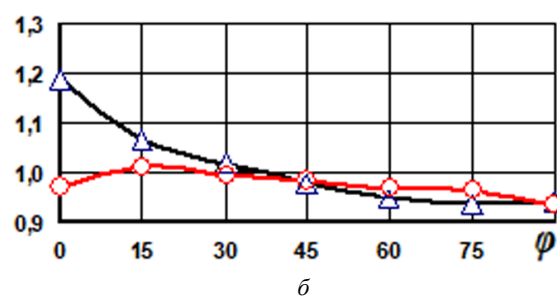


Рис. 10. Графіки $(\sigma_1)_{\max} / (\sigma_1)_{(90)}$ (а) та $\tilde{q}_7 = \tilde{q}_7(\varphi)$ при $q_6 = 1.068$ (б). Схема армування: $[0/\varphi/-\varphi/90]_{2S}$

○ – I; Δ – II

4. Положення в отворі зони з піковим значенням $\sigma_{\max} = \sigma_1$ прямо залежить від схеми армування, причому їхні значення бувають близькі між собою, тому тоді можна записати критерій міцності пластини з ПКМ на розрив формулою (4), а саме:

$$(\sigma_1)_{\max} = q_1 q_2 \tilde{q}_3 \tilde{q}_4 \tilde{q}_5 q_6 \tilde{q}_7 f(z) \tilde{\alpha} \leq [\sigma]_t,$$

де фактори впливу даються формулами (3-6), (5), (9), (17) та (18) з [1] та (3).

5. Це дозволяє запропонувати у перспективі провести заміну концепції експрес-розрахунку на розрив БЗ “шаруватий ПКМ – метал” *послабленого перерізу* на концепцію розрахунку на розрив *окремого шару* незалежно від розташування зони з максимальним значенням першого головного напруження σ_1 у отворі БЗ [1].

6. Для схеми армування типу $[\varphi / -\varphi]_s$ при $0 < \varphi < 90$ аналітичного розв’язку для БЗ не знайдено. Бажано уникати застосування таких схем армування, оскільки вони, порівняно з іншими, викликають значне збільшення величин σ_1 у зоні отвору БЗ.

Додаток

Декілька не очевидних зображень результатів з екрану монітору.

Надалі під словом “Deformed” розуміється зображення об’єкта з доданими до координат вузлів значно збільшеними розрахунковими переміщеннями.

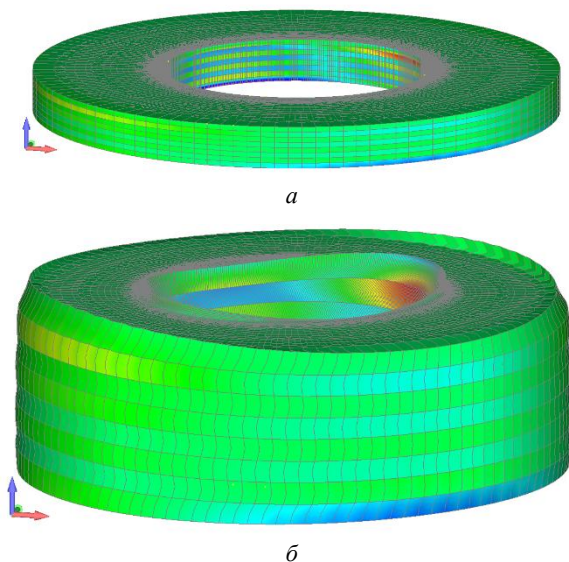
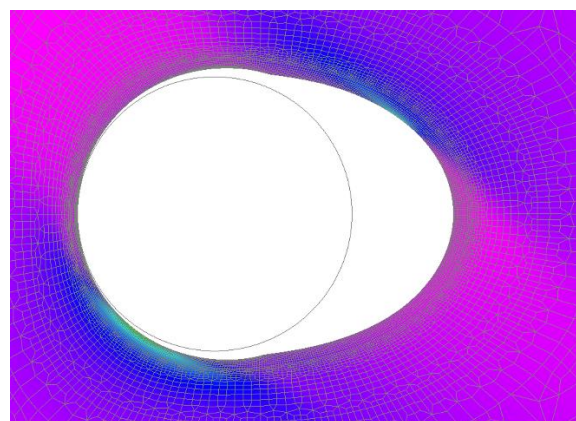
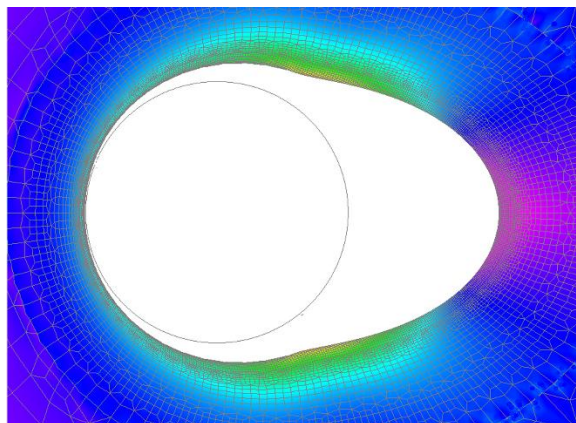


Рис. Д1. Частина пластини біля отвору, зі схемою армування $[45 / -45]_{45}$, зображення геометрії та кольоровою гамою розподілення вертикального спрямованого напруження σ_z , при дії на верхню площину рівномірно розподіленого вертикального навантаження (“від’ємного” тиску): без Deformed – (а), в режимі Deformed – (б)

Примітка Д1. 1) Модулі пружності в вертикальному напрямку для всіх шарів – однакові. Однак присутнє “перехресне армування”. Для ізотропного матеріалу було би всюди $\sigma_z = \text{const}$ та $\varepsilon_z = \text{const}$. Анізотропія (пошарова 3-D ортотропія) все змінює. 2) Режим Deformed, зокрема, проявляє поведінку шарів ламінату біля “вільної кромки” (див. [15]), внаслідок значної зміни НДС порівняно з “глибинними” зонами.



а



б

Рис. Д2. Фронтальний вигляд пластини у БЗ біля отвору в режимі Deformed, кольорове зображення напруження σ_1 : схема армування $[45 / -45]_{45}$ (поверхневий шар армований під +45 градусів) – (а); пластина ізотропна – (б)

Примітка Д2. Обрис zdeформованого отвору дещо відрізняється від яйцеподібного. Це характерно і для усіх схем армування пластини, і для ізотропної пластини (рис. Д2 б), і для сіток скінченних елементів (у отворів) різної щільності.

Примітка Д3. Коли в БЗ пластина є вузькою, то вона під навантаженням змінює свою ширину не лінійно (рис. Д3 б), а коли пластина є частиною широкої пластини з багатьма болтами (моделюється циклічна повторюваність ряду БЗ), то її ширина теж змінюється, але її бічні границі виглядають як прямі лінії (рисунок елементарний, не приводимо).

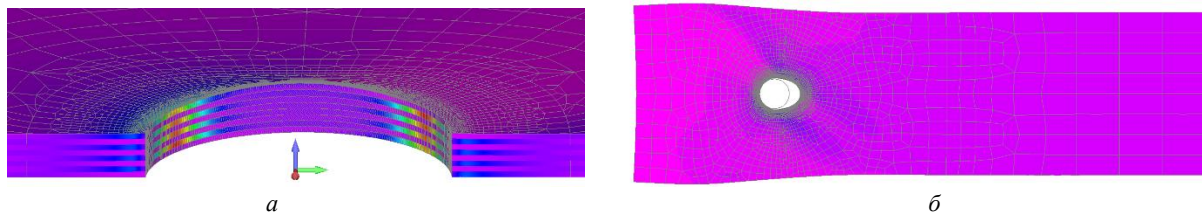


Рис. Д3. Б3, схема армування $[45/-45]_{4s}$, пластина є вузькою з одним отвором. Кольорова гама напружень σ_1 на поверхнях: отвору та розсічення пластины по послабленому перетину – (а); на верхній поверхні (в режимі Deformed) – (б)

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що вони не мають жодного конфлікту інтересів щодо цього дослідження, включаючи фінансові, особисті, авторські або будь-якого іншого характеру, які могли б вплинути на дослідження та його результати, представлені в цій статті.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що не використовували технології штучного інтелекту при створенні даної роботи.

References

- [1] K. Rudakov and Y. Dyfuchyn, "Determination of influence factors and stress concentration factor for express strength calculations of single-cut bolted connections of layered composite plates. Message 1," *Mech. Adv. Technol.*, vol. 8, no. 4(103), pp. 373–384, Dec. 2024, doi: [https://doi.org/10.20535/2521-1943.2024.8.4\(103\).311624](https://doi.org/10.20535/2521-1943.2024.8.4(103).311624).
- [2] P. S. Theocaris, "Stress Concentration Produced in Perforated Strips Under Tension," *Proceedings of the SESA*, vol. XIV, No. 2, 1957.
- [3] De Jong, T. "Stresses around pin-loaded holes in elastically orthotropic or isotropic plates," *J. Compos. Mater.* vol. 11, pp. 313–331, 1977, doi: <https://doi.org/10.1177/00219983770110030>.
- [4] Kai-da Zhang and Charles E. S. Ueng "Stresses Around a Pin-loaded Hole in Orthotropic Plates with Arbitrary Loading Direction," *Composite Structures* 3, pp. 119–143, 1985, doi: [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(85\)90040-6](https://doi.org/10.1016/0263-8223(85)90040-6).
- [5] C. Echavarría, P. Haller and A. Salenikov, "Analytical study of a pin-loaded hole in elastic orthotropic plates," *Composite Structures*, vol. 79, pp. 107–112, 2007, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.11.038>.
- [6] S. G. Lehnicki, *Anisotropic Plates*, Gordon and Breach, London, 1968.
- [7] K. Rudakov and Y. Dyfuchyn, "About calculations of net-tension failure of a bolted joint on the weakened by hole cross-section of composite plate", *Mech. Adv. Technol.*, no. 1(82), pp. 58–66, May 2018, doi: <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2018.82.121050>.
- [8] W. R. Broughton, L. E. Crocker and M. R. L. Gower, "Design Requirements for Bonded and Bolted Composite Structures," *NPL Materials Centre*, National Physical Laboratory, Teddington, Middlesex, UK, 2002.
- [9] K. N. Rudakov and A. S. Shandura, "Numerical Ground of Application of mixed 3D-Modeling Composites at Computations of Bolted Joints," *Journal of Mechanical Engineering NTUU "Kyiv Polytechnic Institute"*, no. 2(74), 2015, pp. 67–76.
- [10] K. Rudakov, "Determination of the maximum stresses in the hole in layered composite plates with a stacking scheme $[\varphi/-\varphi]_{2s}$, loaded with a bolt", *ПТТраІО*, no. XXIV, pp. 7–10, Dec. 2024, doi: <https://doi.org/10.20535/2024.XXIV.315588>.
- [11] K. Rudakov and A. Dobronravov, "About Influence of Size of a Backlash Between a Bolt and the Hole on the Tension Condition of a Bolt of the Single-Shear Bolted Joint in a "Shearing" Zone", *Journal of Mechanical Engineering NTUU "Kyiv Polytechnic Institute"*, no. 3 (69), pp. 62–71, 2013.
- [12] V. Giurgiutiu, *Stress, Vibration, and Wave Analysis in Aerospace Composites for SHM and NDE Applications*. Elsevier Book Companion, 927 p., 2022, doi: <https://doi.org/10.1016/C2016-0-04241-9>.
- [13] Li Dinghe, *Analysis of Composite Laminates. Theories and their Applications*. Elsevier Book Companion, 521 p., 2022, doi: <https://doi.org/10.1016/C2020-0-04062-4>.
- [14] W. C. Young, and R. G. Buynas, *Roark's Formulas for Stress and Strain. Seventh Edition*. McGraw-Hill, 852 p. 2002.
- [15] N. J. Pejgano, Ed., *Mezhslojnye jeffekty v kompozitnyh materialah* [Interlaminar Response of Composite Materials], Moscow, Russia: Mir, 1993.

Determination of influence factors and stress concentration factor for express strength calculations of single-cut bolted connections of layered composite plates. Message 2

Konstantin Rudakov¹

¹ Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

Abstract. When designing bolted joints (BJ), it is necessary, in particular, to carry out their verification calculations for strength. In this case, it is desirable to use express analysis: calculations using simple formulas of sufficient accuracy. For BJ plates made of layered polymer composite materials (PCM), the problem has not yet been solved. In particular, a formula for determining the maximum stress near the hole for reinforcement schemes of the type $[0/\varphi/-\varphi/90]_s$ and $[\varphi/-\varphi]_s$ has not been found, at $0 < \varphi < 90$ (for all other schemes there are already five formulas, as discussed in Message 1).

The aim of the work was to obtain information on the distribution of maximum stresses for reinforcement schemes of the type $[0/\varphi/-\varphi/90]_s$ and $[\varphi/-\varphi]_s$ at variable values of the reinforcement angle $0 < \varphi < 90$, based on the results of calculations using the finite element method (FEM).

Model numerical calculations were performed using the FEM (contact problem) for the interaction of a layered PCM plate with a rigid "bolt" (pin). 3D orthotropy of each layer, linear elasticity, absence of friction and lateral clearance "bolt"/hole were assumed. The results are summarized in the tables, illustrations are given. The results were analyzed. It is proposed to introduce two more factors of influence on the value of the maximum tensile stress near the hole in the layered PCM plate.

An analytical formula for calculating the stress concentration coefficient for a plate section weakened by a hole with a reinforcement scheme of the type $[\varphi/-\varphi]_s$, $0 < \varphi < 90$ could not be found. Additional research is required.

Keywords: bolted joints; polymer-composite material; maximum stress; stress concentration coefficient; influence factor; strength.
