

# Математичне моделювання взаємодії рушіїв наземних роботизованих комплексів підвищеної прохідності із ґрунтом

І. В. Костюченко<sup>1</sup> • С. В. Струтинський<sup>1</sup>

Received: 8 August 2025 / Revised: 3 September 2025 / Accepted: 15 September 2025

**Анотація.** У роботі розглядалося дослідження параметрів прохідності наземних роботизованих комплексів (НРК), які функціонують у складних дорожніх умовах, зокрема на м'яких ґрунтах і пересіченій місцевості. Основну увагу приділено розробці математичних моделей і комп'ютерній симуляції взаємодії різних типів рушіїв (колісних та гусеничних) із поверхнею. Запропоновано методику визначення параметрів контактної взаємодії з урахуванням нелінійних властивостей матеріалів та складних геометричних форм рушіїв. Зокрема у середовищі ANSYS (модуль Transient Structural) проведено серію чисельних експериментів, у яких реалізовано моделювання деформаційної взаємодії колісного та гусеничного рушія з ґрунтом. Для підвищення достовірності результатів використано ортотропну модель ґрунту, що враховує його шарувату структуру та анізотропію механічних властивостей, а також експоненційно-нелінійні характеристики гуми, визначені за експериментальною кривою “напруження-деформація”. Це дозволило математично описати комплексний процес формування контактної плями, оцінити розподіл напружень і тиску в зоні контакту та визначити закономірності зміни площі контакту і просідання під дією зовнішнього навантаження та удосконалити аналітичні методики розрахунку тягових характеристик та параметрів прохідності НРК. Практична цінність роботи полягає у можливості використання розроблених моделей на етапі проектування наземних роботизованих комплексів, зокрема для прогнозування тягових характеристик, оцінки енергетичних витрат та оптимізації параметрів руху у різних дорожніх умовах.

**Ключові слова:** робот, рушій, симуляція, робототехніка, НРК, гібридний, прохідність, механіка ґрунтів.

## Вступ

Наземні роботизовані комплекси (НРК) підвищеної прохідності є основним інструментом, що забезпечує виконання завдань у складних, важкодоступних та потенційно небезпечних середовищах. Їх активно застосовують у рятувальних місіях, під час моніторингу зон, що постраждали від стихійних лих, техногенних аварій або бойових дій, а також для роботи на територіях зі складним рельєфом. Однією з основних технічних проблем, що стоїть перед конструкторами НРК, залишається забезпечення високої прохідності системи та здатності ефективно долати широкий спектр природних і штучних перешкод. У зв'язку з цим

постає потреба у розробці спеціальних засобів, що забезпечують ефективне функціонування наземних роботизованих комплексів у складних дорожніх умовах та на пересіченій місцевості. Дослідження факторів, що визначають характеристики прохідності НРК та оптимізації конструкції рушіїв з метою покращення вказаних параметрів є актуальною науково-технічною задачею.

## Постановка проблеми

Підвищення прохідності наземних роботизованих комплексів складних умовах місцевості, зокрема в зонах техногенних аварій, природних катастроф або на зруйнованій інфраструктурі, залишається критично важливим завданням. Одним із визначальних факторів ефективності руху є тип рушія та характер його контактної взаємодії з ґрунтом. Серед основних конструктивних рішень переважають гумові колеса та гусеничні системи. Проте вибір оптимального типу рушія в

✉ І. В. Костюченко  
lvankostiuchenko2604@gmail.com

<sup>1</sup> КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

конкретних умовах часто базується на спрощених оцінках, без належного урахування фізики взаємодії з нерівною або деформованою поверхнею.

У науковій літературі існує низка праць, присвячених комп'ютерному та аналітичному моделюванню поведінки окремих типів рушіїв. Зокрема, аналітичні підходи до опису роботи гусеничних рушіїв на різних типах ґрунтів були сформовані на основі параметричних моделей [1], які досі широко застосовуються для прогнозування тягових властивостей повнорозмірної техніки на деформованих поверхнях. Проте ці моделі були сформовані з орієнтацією на транспортні засоби великої маси, і тому їх безпосереднє застосування до легких малогабаритних НПК викликає складнощі через зміну масштабу, інерційних властивостей і механіки деформації.

У сучасних дослідженнях моделювання взаємодії рушіїв із ґрунтом широко застосовуються числові методи, зокрема метод скінченних елементів (FEM) та метод багатотільної динаміки (MBS), як окремо, так і в комбінації. Одним із прикладів є дослідження, у якому реалізовано моделювання взаємодії гусеничного транспортного засобу з деформованим ґрунтом у режимі реального часу [2]. Для цього використано поєднання багато-сегментної моделі гусениці, з'єднаних шарнірно, та комплексної моделі ґрунту на основі еласто-пластичного підходу типу Друкера–Прагера із поверхнею текучості, яка обмежує об'ємне стискання і забезпечує механізм зміцнення матеріалу. Розв'язання задачі передбачає одночасне дослідження руху механічної системи та реакції ґрунту. Такий підхід забезпечив високу обчислювальну ефективність, придатну для симуляцій у реальному часі, однак застосований рівень деталізації механіки ґрунту та гусениці обмежує точність прогнозування локальних деформацій, що критично важливо для малогабаритних наземних роботизованих комплексів, особливо при русі по складному рельєфу.

Інше дослідження зосереджено на підвищенні швидкодії симуляцій гусеничних рушіїв шляхом поетапного розрахунку: спочатку проводиться моделювання взаємодії ґрунту та гусениці методом скінченних елементів, результати якого згодом використовуються у спрощеній багато-сегментній моделі транспортного засобу [3]. Такий метод суттєво знижує обчислювальне навантаження без істотної втрати точності у глобальних параметрах руху. Проте, подібна апроксимація стає малоприматною при необхідності вивчення малих коливань або мікропереміщень НПК, де взаємозв'язок між локальними деформаціями опорного середовища та параметрами руху системи є критичним.

У іншому дослідженні реалізовано моделювання взаємодії жорсткого колеса з деформованим ґрунтом за допомогою підходу з'єднаної Ейлерівсько-Лагранжевої постановки (Coupled Eulerian–Lagrangian), що реалізований у програмному середовищі ABAQUS [4]. Такий підхід дає змогу обчислювати великі пластичні

деформації ґрунту, зокрема перемішування, тертя та нагромадження частинок перед колесом, що є неможливим у класичних Лагранжевих постановках. Верифікація даних моделі проведена на основі експериментальних результатів тягових випробувань. Незважаючи на високу точність, модель була побудована для жорсткого колеса з фіксованими геометричними параметрами, характерними для шин позашляхової техніки і не враховувала деформації самого рушія, що обмежує її придатність для аналізу НПК зі складною контактною геометрією або гусеничним рушієм.

Додатково варто відзначити дослідження, представлене у роботі [5], у якій також використано середовище ABAQUS для побудови тривимірної моделі взаємодії сільськогосподарського колеса з ґрунтом. У цьому дослідженні ґрунт змодельовано як середовище з використанням розширеної еласто-пластичної моделі Друкера–Прагера, а саму взаємодію колеса з ґрунтом розглянуто з урахуванням ефектів ущільнення, контактної тиску та деформації шару ґрунту. Отримані результати моделювання були успішно верифіковані експериментально. Однак і в цьому випадку розглядалася лише взаємодія деформівного осесиметричного пневматичного колеса, що обмежує застосування результатів для моделювання руху НПК, зокрема гусеничних або багатоланкових рушіїв змінної конфігурації. Крім того, модель не враховує адаптацію або зміну геометрії рушія в процесі руху. Це створює потребу у подальшій апроксимації отриманих даних або розвитку моделей з динамічною зміною контактної геометрії для підвищення точності прогнозування параметрів руху НПК у складних дорожніх умовах. Порівняльне дослідження методів моделювання шин зосереджується на розробці статичної моделі шини та ґрунту в середовищі ANSYS Workbench, де оцінюються деформації та розподіл навантажень [6]. Таке моделювання дозволяє отримати уявлення про поведінку шин під статичним навантаженням, однак не враховує динамічних ефектів, ковзання, а також не дозволяє точно оцінити тягові властивості при русі в умовах, наближених до реальних для НПК. Крім того в роботі розглянута шина, яка являє собою один суцільний елемент без порожнистої пневматичної камери, що знижує точність моделі але спрощує симуляцію.

В іншій роботі розглянуто числову модель взаємодії багатошарової шини вантажівки з дорожнім полотном, побудовану в середовищі PAM-CRASH [7]. Модель урахує складну внутрішню структуру шини, включаючи протектор, каркас та боковини, що дозволяє точно моделювати її деформації під навантаженням. Незважаючи на високу деталізацію, робота фокусується на шинах великого діаметра, з великим відношенням ширини до радіуса, тоді як у випадку НПК часто використовуються малі колеса або гусениці з відносно більшим рівнем жорсткості.

У роботі, виконаній із використанням LS-DYNA, реалізовано гібридну модель на основі поєднання ме-

тоту скінченних елементів та дискретного елементного методу (DEM) для моделювання руху всюдихідного колеса по сипучому середовищу (піску) [8]. Такий підхід дозволяє досліджувати поведінку окремих частинок ґрунту в контакт з рушієм та оцінити вплив глибини занурення колеса, пробуксовки і кута підйому, по відношенню до тяги. Ця модель показує хорошу перспективність для симуляції руху в рихлих або нестабільних середовищах. Проте вона досить ресурсомістка та складна в параметризації, а також не дозволяє моделювати гусеничні рушії, що обмежує можливість прямого застосування для порівняння типів рушіїв НРК.

Один із підходів у LS-DYNA передбачає створення високодеталізованих моделей шин із урахуванням геометрії колеса та багатошарової структури пневматичної системи, як у [9]. Ці моделі орієнтовані на аналіз деформацій у краш-сценаріях і забезпечують високу точність при моделюванні ударних навантажень. Їх перевага – реалістичне відображення поведінки шини, однак фокус на швидкісних деформаціях обмежує застосування для симуляцій тяги на пересіченій місцевості. Крім того, у роботі не вирішено проблему апроксимації характеристик ґрунту, що є критично важливим для аналізу прохідності НРК.

Проведений аналіз літературних джерел [2]–[9] показує, що попри значний прогрес у моделюванні взаємодії рушіїв з деформованими поверхнями, переважна частина досліджень зосереджена на аналізі шин великого діаметра або гусениць повнорозмірних транспортних засобів. Проблематичним залишається і те, що в більшості розглянутих досліджень моделюються переважно колеса легкових або позашляхових автомобілів, тоді як специфіка рушіїв малогабаритних наземних дронів або НРК суттєво відрізняється за співвідношенням розмірів рушіїв та маси комплексу, конструктивним виконанням шасі, швидкістю руху, а у деяких випадках за геометрією контактуючих поверхонь. Крім цього, у літературних джерелах відсутнє деталізоване порівняння характеристик колісних та гусеничних рушіїв НРК підвищеної прохідності за ідентичних умов роботи. У результаті, при проектуванні роботизованих комплексів виникає необхідність у використанні емпіричних підходів при попередньому виборі типу рушія та його параметрів, що може суттєво вплинути на характеристики НРК та знизити ефективність технічного рішення.

### Мета і задачі дослідження

Метою дослідження є удосконалення існуючих аналітичних методик визначення тягових характеристик рушіїв колісного та гусеничного типів та підвищення точності розрахунку параметрів прохідності наземних роботизованих комплексів шляхом поєднання теоретичних моделей і чисельного моделювання контактної взаємодії рушіїв із ґрунтом.

Для досягнення цієї мети було поставлено такі завдання:

1. Встановити обмеження існуючих аналітичних залежностей для розрахунку рушіїв, що виникають при використанні спрощених методик визначення площі контакту рушія з ґрунтом у деформованому стані.

2. Виконати чисельне моделювання деформаційної взаємодії гусеничного та колісного рушія з поверхнею ґрунту методом скінченних елементів за різних навантажень. З комп'ютерної симуляції отримати залежності площі контакту, розподілу тиску та величини сумарної деформації (просідання) від прикладеного навантаження.

3. На основі отриманих залежностей удосконалити аналітичні методики визначення тягових характеристик колісного та гусеничного рушіїв, та встановити обмеження, що виникають при їх використанні.

### Моделювання взаємодії рушіїв з ґрунтом

Дослідження взаємодії колеса з ґрунтом базується на террамеханіці ґрунту [1], яка визначає, як поверхня рушія впливає на ґрунт і як ґрунт, у свою чергу, протидіє руху транспортного засобу. Механіка ґрунту включає в себе вивчення напружень і деформацій, які виникають під час контакту рушія з ґрунтом і є критичною для оцінки стійкості та ефективності руху НРК.

Для початку сформулюємо основні математичні залежності, які використовуються для обрахунку як колісного так і гусеничного рушія.

В загальному випадку взаємодію між рушієм і ґрунтом можна описати через реакцію ґрунту на прикладений на нього тиск у вигляді нелінійної пружини [10]:

$$\frac{W}{A} = P = k \cdot z^n = \left( \frac{k_c}{b} + k_\phi \right) \cdot z^n, \quad (1)$$

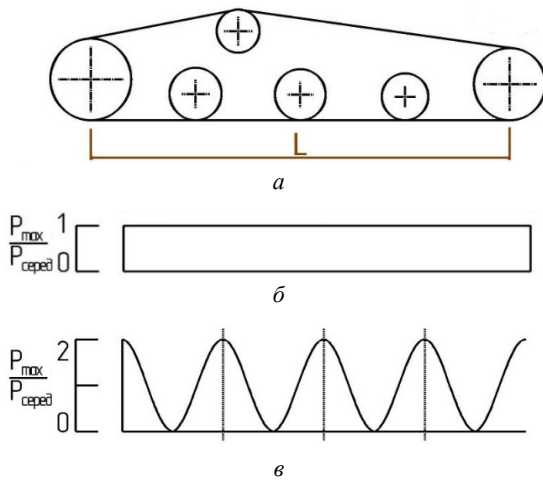
де  $P$  – тиск на ґрунт,  $W$  – притискна сила (вага транспортного засобу, що припадає на даний рушії),  $A$  – площа контактної поверхні, утвореної рушієм і ґрунтом,  $b$  – ширина рушія,  $k$  – жорсткість ґрунту,  $z$  – глибина стиснення ґрунту,  $k_c$  – модуль когезії,  $k_\phi$  – модуль тертя, а  $n$  – показник просідання для ґрунту.

Для гусеничних рушіїв рис. 1 а можливі різні варіанти розподілу ваги (тиску на ґрунт) кожен з яких можна розглядати як окремо так і в поєднанні.

Модель розподілу тиску, зображена на рис. 1 б, є ефективною для легких гусеничних машин, де відносно товсті гусениці виготовлені з гуми поводять себе як нерозтяжні елементи і рівномірно розподіляють вагу НРК по всій довжині контактної сліду гусеничного рушія.

Модель розподілу тиску, зображена на рис. 1 в, відповідає ланцюговим гусеницям де ланки достатньо гнучкі або гусеницям з тонкої гуми, де тиск передається від катків до ґрунту. При цьому площа контактної

поверхні для гусеничного рушія розраховується як добуток довжини контактної поверхні (частина гусениці що дотична до поверхні) і ширини гусеничного траку.



**Рис. 1.** Ідеалізовані схеми розподілу тиску *a* – схема гусеничного рушія, *b* – діаграма рівномірного розподілу тиску гусениці на ґрунт, *в* – діаграма розподілу тиску з врахуванням впливу катків

На відміну від гусеничного рушія теоретичний розрахунок площі поверхні контакту між колесом і ґрунтом –  $A$ , для рушіїв колісного типу є досить складною задачею. Цю площу зазвичай знаходять експериментально для коліс, які планують використовувати. Відповідно характер розподілу тиску на поверхню ґрунту теж визначається експериментально.

Основним негативним явищем для будь-якого рушія є втрата зчеплення з поверхнею що називається проковзуванням. Проковзування відбувається коли лінійна швидкість колеса (тягового колеса для гусеничного рушія) не дорівнює поступальній швидкості рушія. Проковзування колеса при рівномірному розподілі тиску можна описати за допомогою коефіцієнта ковзання [1]:

$$s = 1 - \frac{V_w}{w \cdot r}, \quad (2)$$

де  $V_w$  – поступальна швидкість колеса,  $w$  – кутова швидкість колеса,  $r$  – радіус колеса.

Коли виникає ковзання ( $s \neq 0$ ), тягове зусилля для гладкого колеса або гусениці з рівномірним розподілом ваги можна визначити за наступним рівнянням [1]:

$$H_{\bar{c}} = (A \cdot c + W \cdot \tan(\phi)) \cdot \left[ 1 - \frac{K}{sl} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{sl}{K}} \right) \right], \quad (3)$$

де  $A$  – площа поверхні контакту ( $A \cong b \cdot l$ ),  $C$  – когезія ґрунту,  $\phi$  – кут внутрішнього тертя ґрунту,  $K$  – коефіцієнт ковзання ґрунту, а  $l$  – довжина контактної сліду ( $l = A / b$ ).

Тягове зусилля гусеничного рушія для нерівномірного розподілу тиску на рис. 1 *в* розраховується наступним чином [1]:

$$H_B = W \cdot \tan(\phi) \left[ 1 - \frac{K}{sl} \left( 1 - e^{-\frac{sl}{K}} \right) - \frac{K \left( 1 - e^{-\frac{sl}{K}} \right)}{sl \left( \frac{1 + 4\eta^2 K^2 \pi^2}{s^2 l^2} \right)} \right], \quad (4)$$

де  $\eta$  – це кількість періодів на діаграмі тиску.

Додавання ґрунтозацепу на поверхню рушія забезпечить додаткове зчеплення. За такої умови тягове зусилля визначається за формулою [1]:

$$H_{\text{ґрунтозацеп}} = \left[ A \cdot c \cdot \left( 1 + \frac{2h_g}{b} \cdot N_g \right) + W \cdot \tan\phi \cdot \left( 1 + 0.64 \cdot \frac{h_g}{b} \cdot \arctan\left( \frac{b}{h_g} \right) \right) \right] \cdot \left[ 1 - \frac{K}{sl} \left( 1 - e^{-\frac{sl}{K}} \right) \right], \quad (5)$$

де  $h_g$  – висота ґрунтозацепу, а  $N_g$  – кількість ґрунтозацепів у контакті з землею. Для колеса її можна визначити за наступним рівнянням:

$$N_g = \frac{N \cdot l}{D \cdot \pi}, \quad (6)$$

де  $N$  – загальна кількість ґрунтозацепів на колесі.

Таким чином, площа контактної поверхні між рушієм і ґрунтом має значний вплив на параметри ходової частини НРК. Математичний розрахунок цієї площі є досить складним оскільки залежить від багатьох конструктивних параметрів рушіїв. Для колеса ця задача потребує врахування взаємодії нелінійних матеріалів колеса та поверхні із якою воно взаємодіє.

Для дослідження контактної взаємодії рушіїв із ґрунтом було використано програмне середовище ANSYS з модулем Transient Structural, що дозволяє моделювати нелінійні властивості матеріалів, контактні явища та деформаційні процеси в динамічному режимі. Для моделювання шини колеса і матеріалу траку гусениці була використана гума з експоненційною залежністю, параметризована за даними дослідної кривої “напруження-деформація” для автомобільної гуми.

Матеріал ґрунту було задано у вигляді ортотропної моделі, що є окремим випадком більш загальної анізотропної моделі, притаманної більшості шаруватих ґрунтів. Для таких середовищ властивості у горизонтальній площині однакові але, є суттєва відмінність механічних властивостей у вертикальному напрямку. Застосування ортотропної моделі зумовлене особливостями методу скінченних елементів, де елементи сітки (mesh) мають кубічну форму з гранями, орієнтованими вздовж основних координатних осей (рис. 2, рис. 6). За таких умов ортотропне представлення властивостей

грунту є доцільним оскільки сама структура сітки формує напрямлену залежність жорсткості та деформаційних характеристик. Параметри ортотропної моделі визначалися шляхом проектування узагальнених анізотропних параметрів на основні координатні осі. Для даної симуляції було вибрано органічний ґрунт (глинистий чорнозем).

Щоб визначити залежності площі контакту від прикладеного навантаження, було проведено 11 симуляцій для колісного рушія (табл. 1), у яких варіювались ширина колеса (4 шт.) та окремо діаметр (7 шт.). Товщина шини в усіх випадках складала 3 мм, а висота бокових стінок складає 20 % від діаметра колеса. Для імітації ваги НРК у всіх експериментах використовувалося зусилля в 200 Н, що прикладалося до рушія. Розрахункова схема подана на рис. 2 а.

Таблиця 1. Вхідні параметри симуляцій колеса

№	Діаметр, мм	Ширина, мм
1	160	18
2	100	18
3	74	18
4	54	18
5	42	23
6	42	18
7	42	14
8	42	10
9	32	18
10	26	18
11	24	18

На рис. 2 б показано розподіл напружень у зоні контакту, а на рис. 2 в – відповідний розподіл тиску. Але слід зазначити, що модель не враховує внутрішній тиск повітряної камери всередині шини, що частково обумовлено складністю її реалізації в умовах симуляції.

Внутрішній тиск пневматичної камери у реальних умовах може забезпечувати додаткову жорсткість конструкції. Однак у польових умовах тиск у шинах нерідко знижують за допомогою спеціальних засобів при русі по сипких або м'яких ґрунтах, що частково виправдовує таке спрощення. Обмеження використаної моделі спричинені втратою стійкості вертикальних стінок шини під дією високих навантажень.

Графіки залежностей площі контакту від сили (рис. 3 а), сумарної деформації (просідання) і середнього тиску на ґрунт (рис. 3 б) були побудовані для шести симуляцій.

Отримані залежності апроксимовано степеневими функціями, що дозволило виявити закономірності зміни площі контакту та середнього тиску залежно від геометричних параметрів шини. Зокрема, для значної частини експериментів площа контакту добре описується степеневу залежністю зі показником степеню 0.5 (рис. 4 а), яку можна визначити за наступною формулою:

$$A = C_A \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot b_K \cdot W^{0.5}, \quad (7)$$

де  $C_A$  – питомий коефіцієнт площі,  $b_K$  – ширина колеса.

Виявилось, що для більшості симуляцій питомий коефіцієнт  $C_A$  апроксимації є константою і становить  $0.01 \pm 7\%$  при дисперсності 0,95 і вище. Винятком стали випадки “насичення” для великих діаметрів по відношенню до товщини шини (симуляції 1–4). Для таких випадків чітко проявляється горизонтальна ділянка “поличка” залежності площі від сили, як видно на рис. 3 а та окремо для діаметра 160 мм (рис. 5 а). У цих випадках апроксимація виду (7) описує залежність з меншою дисперсністю 0,82. При цьому зі збільшенням діаметра питомий коефіцієнт площі знижується аж до 0.0035 для дослідів №1, і  $0.05 \pm 15\%$  для всіх інших дослідів де спостерігається цей ефект. Однак, якщо обмежитися даними до 50 Н то питомий коефіцієнт апроксимації буде майже чітко 0.01. Така поведінка пов'язана, ймовірно, з втратою стійкості вертикальних стінок шини при певному навантаженні, яке спричинене тим, що не враховувався тиск внутрішньої пневматич-

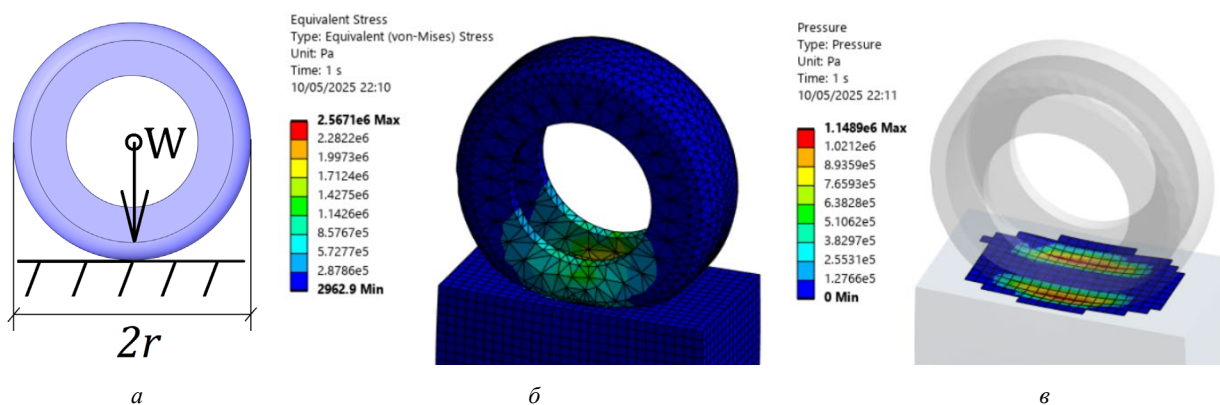


Рис. 2. Симуляції взаємодії із ґрунтом колісного рушія: а – розрахункова схема експерименту, б – діаграма розподілу напруження, в – діаграма розподілу тиску на поверхні контакту

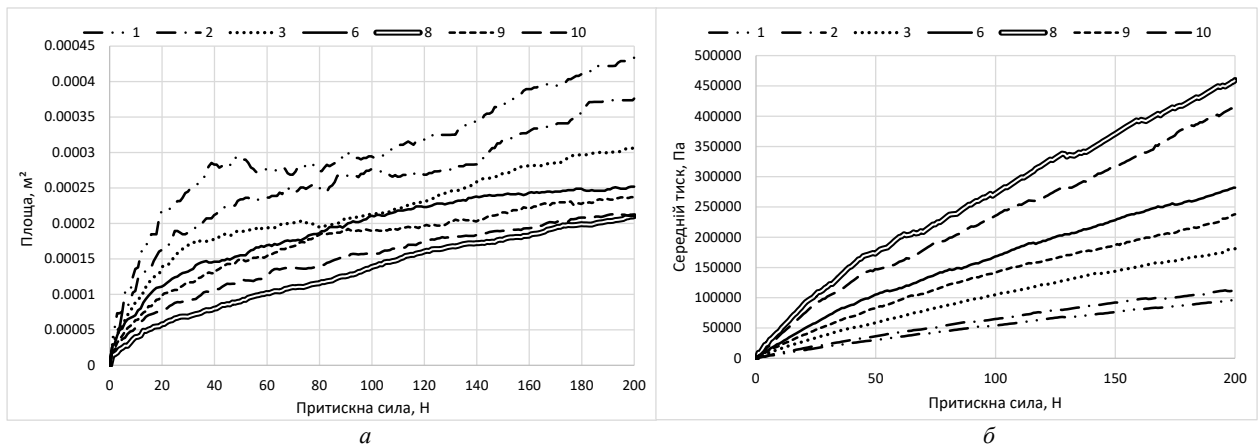


Рис. 3. Графіки залежностей параметрів від притискної сили для різних симуляції колісного рушія: *a* – площа контакту від притискної сили, *б* – середній тиск на поверхні контакту від притискної сили

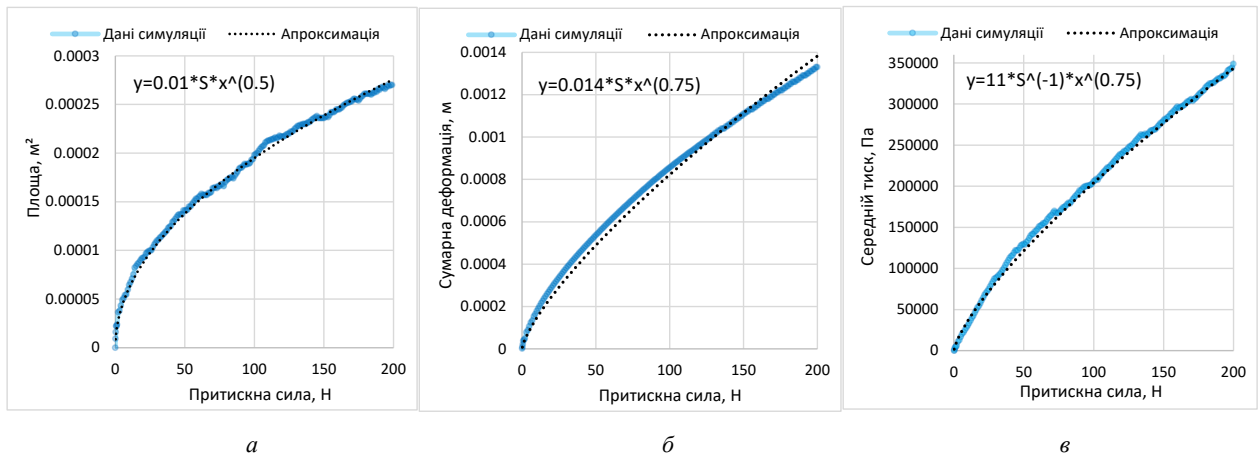


Рис. 4. Апроксимація результатів симуляції колеса №6 для залежностей: *a* – площа контакту від притискної сили, *б* – деформація від притискної сили, *в* – середній тиск на поверхні контакту від притискної сили

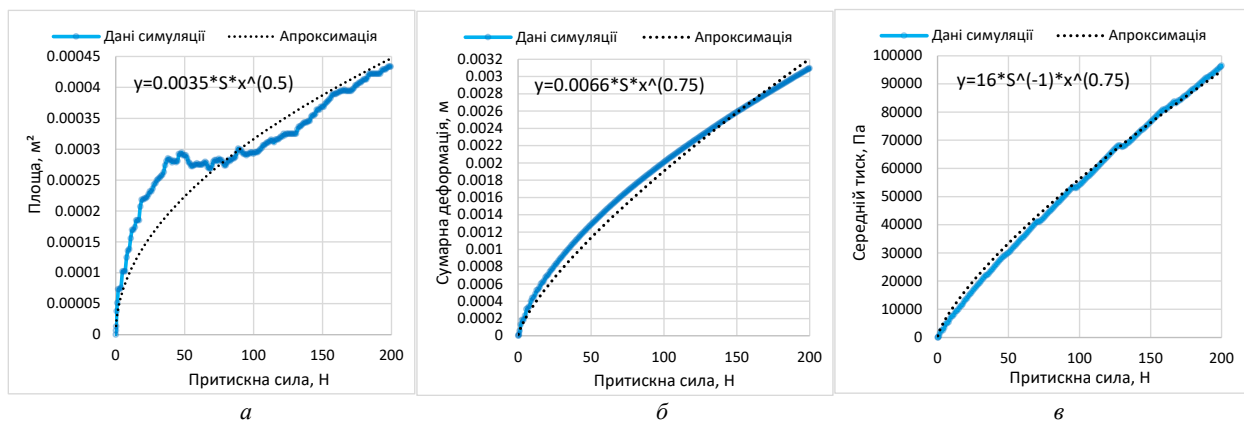


Рис. 5. Апроксимація результатів симуляції колеса №1 для залежностей: *a* – площа контакту від притискної сили, *б* – деформація від притискної сили, *в* – середній тиск від притискної сили

ної камери, що надав би додаткову жорсткість всій системі. Очевидно що застосування отриманих залежностей має певні обмеження відповідно до відношення діаметра до товщини і ширини стінки.

Аналогічно до контактної площі була апроксимована і сумарна деформація відповідною степеневою функцією з показником 0.75 (рис. 4 б), яку можна виразити наступною формулою:

$$\Delta Z = C_z \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot b_k \cdot W^{0.75}, \quad (8)$$

де  $\Delta Z$  – сумарна деформація,  $C_z$  – питомий коефіцієнт деформації, який є константою і становить  $0.017 \pm 6\%$  для більшості, і  $0.01 \pm 10\%$  для вже згаданих (симуляції 1–4) (рис. 5 б), з дисперсністю більшою за 0,98.

Апроксимація залежності середнього тиску від притискної сили (навантаження на рушій) наведена на рис. 4 в. У цьому випадку залежність площі колеса до тиску має зворотно-пропорційний характер. В загальному випадку ця залежність описується наступною формулою:

$$P_a = \frac{C_P \cdot W^{0.75}}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot b_k}, \quad (9)$$

де  $P_a$  – середній тиск на контактну поверхню колеса,  $C_P$  – питомий коефіцієнт середнього тиску, який є константою і становить  $11 \pm 5\%$  для більшості симуляції, і  $14 \pm 15\%$  для (симуляції 1–4) (рис. 5 в), з дисперсністю більшою за 0,99 для всіх апроксимацій.

Для гусеничного рушія проведено аналогічну серію симуляцій: три з ґрунтозацепами різної висоти від 0,5 мм до 2,5 мм і одна без них для порівняння впливу (табл. 2). Притискне зусилля (вага що припадає на колесо) у всіх дослідях складає 200 Н.

Таблиця 2. Вхідні параметри гусеничного рушія

№	Висота ґрунтозацепу, мм	Довжина гусениці, мм	Ширина гусениці, мм
1	0	20	12
2	0.5	20	12
3	1	20	12
4	2.5	20	12

У якості матеріалом траку гусениці і ґрунтозацепів використана гума, що за параметрами відповідає матеріалу коліс. Розрахункова схема (рис. 6 а) передбачає прикладання зовнішнього навантаження до катків які взаємодіють із гусеницею.

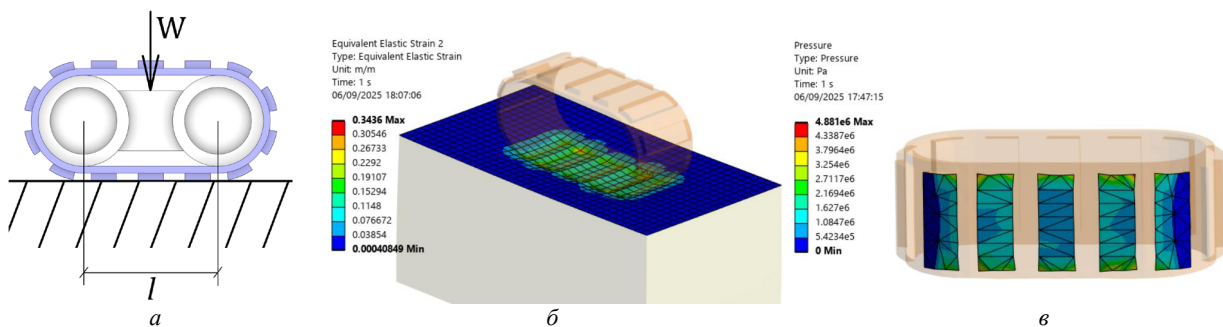


Рис. 6. Симуляції взаємодії із ґрунтом гусеничного рушія: а – розрахункова схема експерименту, б – діаграма розподілу напруження, в – діаграма розподілу тиску на поверхні контакту

Візуалізація напружень (рис. 6 б) і тиску (рис. 6 в) показує характер розподілу цих величин, однак форма й розмір контактної зони істотно змінюються при наявності ґрунтозацепів адже саме вони вступають у контакт з поверхнею.

Графіки залежностей площі контакту від сили сумарної деформації (просідання) і середнього тиску на ґрунт були побудовані для кожної симуляції, після чого були знайдені залежності, що їх апроксимують. На відміну від рушія колісного типу всі залежності мали чіткий лінійний характер а висота ґрунтозацепів практично не вплинула на отримані результати.

Залежність площі контакту від притискної сили для гусениці із ґрунтозацепами (рис. 7 а) та для гусениці без виступів (рис. 8 а) описується формулою:

$$A = l \cdot b_z \cdot (C_A \cdot W + 1) \quad (10)$$

де  $b_z$  – ширина гусеничного траку,  $C_A$  – питомий коефіцієнт площі, який є сталим і становить 0.0044 для траку з ґрунтозацепами і 0.02 для траку без.

Залежність сумарної деформації від притискної сили як для гусениці з ґрунтозацепами (рис. 7 б) так і для гусениці без (рис. 8 б) описується формулою:

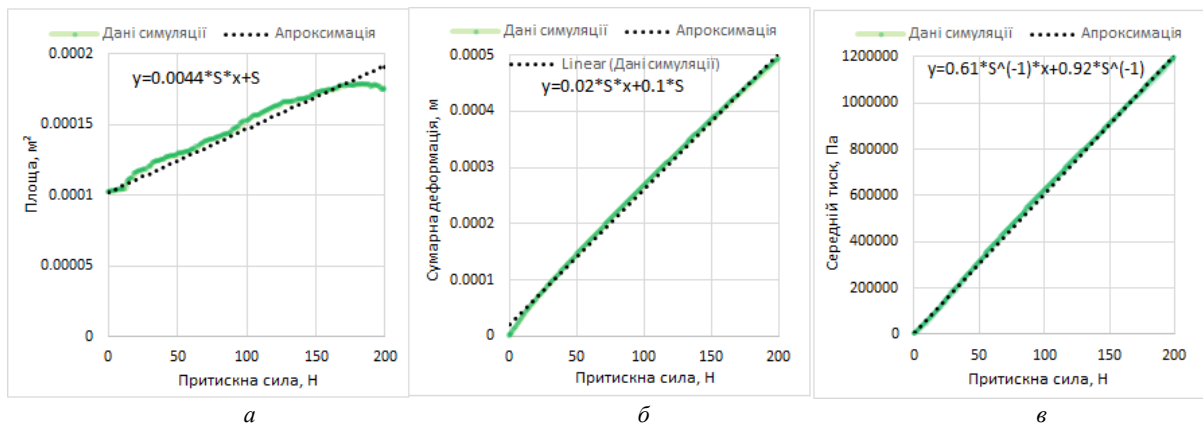
$$\Delta Z = l \cdot b (C_z \cdot W + C_{Z0}), \quad (11)$$

де  $C_{Z0}$  – питомий вільний член деформації,  $C_z$  – питомий коефіцієнт деформації, який є сталим для різних довжин ґрунтозацепів і становить 0.02 для траку з ґрунтозацепами і 0.01 для траку без виступів. Вільний член відповідно становить 0.1 і 0.035.

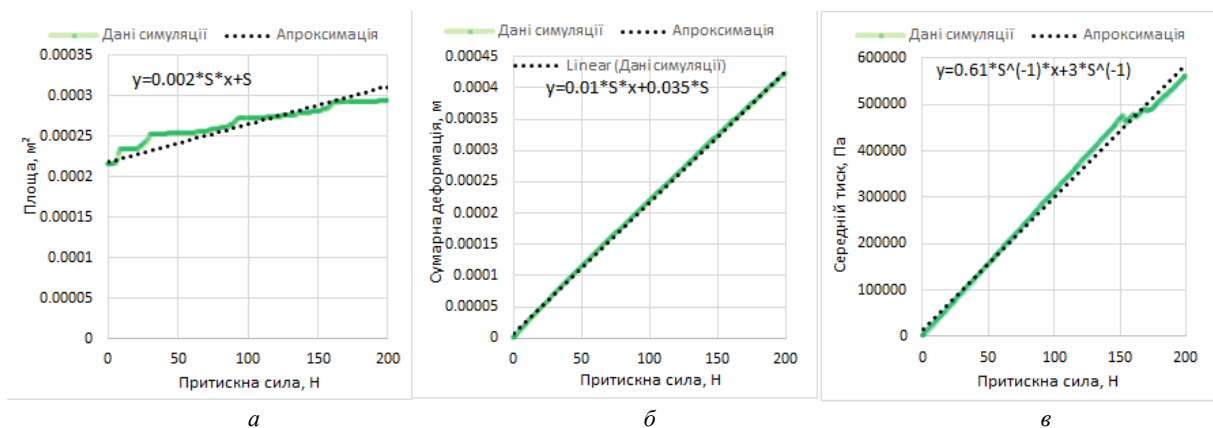
Залежність середнього тиску від притискної сили як для гусениці з ґрунтозацепами (рис. 7 в) так і для гусениці без (рис. 8 в) описується формулою:

$$P_a = \frac{(C_P \cdot W + C_{P0})}{l \cdot b_z}, \quad (12)$$

де  $C_P$  – питомий коефіцієнт тиску, який становить 0.61,  $C_{P0}$  – питомий вільний член тиску, становить 0.92 для траку з ґрунтозацепами і 3.0 для траку без.



**Рис. 7.** Апроксимація результатів симуляції гусениці №3 для залежностей: *a* – площа контакту від притискної сили, *б* – деформація від притискної сили, *в* – середній тиск на поверхні контакту від притискної сили



**Рис. 8.** Апроксимація результатів симуляції гусениці №1 для залежностей: *a* – площа контакту від притискної сили, *б* – деформація від притискної сили, *в* – середній тиск на поверхні контакту від притискної сили

Отримані залежності для площі контакту шини (7) можна безпосередньо використовувати у формулах (3) і (5) для знаходження тягового зусилля колеса. Також знаючи контактну площу можна визначити довжину контактної сліду для шини  $l = A / b$ , що також використовується у (3) і (5).

Аналогічним чином для гусеничного рушія формулу (8) можна використати для знаходження відповідного тягового зусилля (3), (5) та навіть (4) для якого треба ще додатково знайти кількість періодів на діаграмі тиску (рис. 6 б) та виразити довжину контактної сліду.

Формули (9) і (12) дозволяють також визначити глибину стиснення ґрунту за залежністю (1) та показник просідання. Формули (8) і (11) можна використати для оцінки деформації пружних елементів.

Запропоновані у роботі залежності є основним удосконаленням аналітичних методик визначення тягових характеристик колісного та гусеничного рушіїв та дозволяють більш точно визначати параметри НРК. Отримані на основі моделювання результати, зокрема

площа контактної поверхні та показник просідання несуттєво відрізняються від даних експериментальних досліджень [1]. Запропоновані залежності дозволяють більш точно враховувати особливості взаємодії деформованого рушія із ґрунтом без проведення моделювання методом кінцевих елементів для кожного конкретного випадку.

## Висновки

У результаті математичного моделювання взаємодії колісних і гусеничних рушіїв наземних роботизованих комплексів з ортотропним ґрунтом було розроблено удосконалені аналітичні методики, що дозволяють більш точно розрахувати тягові характеристики та інтегральні параметри прохідності НРК. На відміну від існуючих методик, використані математичні моделі враховують особливості робочих процесів контактної взаємодії, а також деформацію рушіїв складної форми та ґрунту.



На основі результатів чисельного моделювання методом скінченних елементів було отримано функціональні залежності, що дозволяють визначити площу контактуючої поверхні (7), питомий тиск на ґрунт (9) і сумарну деформацію колісного рушія (8) у залежності від навантаження яке припадає на рушій. Ці залежності мають степеневий характер. Отримані дані відповідають результатам експериментальних досліджень. На їх основі розраховані приведені коефіцієнти, значення яких мають невелику варіацію і дисперсією не нижчу за 0,95 (окрім дослідів 1–4), що дозволяє зробити висновки про адекватність моделей, зважаючи на характер апроксимацій і визначені показники степеню.

Для гусеничного рушія, що відрізняється більш простою геометрією контактуючої поверхні отримані залежності (10), (11) та (12), що дозволяють врахувати наявність ґрунтозацепів. Залежності мають лінійний характер, що відповідає результатам експериментальних досліджень.

Запропонована модель колеса має обмеження, що можуть бути обумовлені втратою стійкості вертикальних стінок шини при підвищених навантаженнях. Тому отримані залежності слід застосовувати з урахуванням геометричних співвідношень діаметра, товщини та ширини стінки шини.

Розроблені математичні моделі можуть бути використані при дослідженні переміщення НРК, для оцінки його прохідності за різних умов руху та при розра-

хунку тягових характеристик без необхідності у проведенні комплексної симуляції процесу контактної взаємодії. Удосконалені методики можуть бути застосовані для поверхонь, що подібні до частково утрамбованого органічного ґрунту або матеріалу зі подібними властивостями.

Отримані результати надають можливість подальшого вдосконалення математичних моделей взаємодії рушіїв із ґрунтом. Це дозволить підвищити точність оцінки кінематичних та кінестатичних параметрів НРК та розширити практичне застосування отриманих даних. Зокрема, перспективними напрямками є врахування впливу динамічних процесів на переміщення НРК, визначення енергетичних витрат, впливу рельєфу на прохідність наземних роботизованих комплексів, а також розробка алгоритмів керування підвищеної ефективності.

#### Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що вони не мають жодного конфлікту інтересів щодо цього дослідження, включаючи фінансові, особисті, авторські або будь-якого іншого характеру, які могли б вплинути на дослідження та його результати, представлені в цій статті.

#### Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що не використовували технології штучного інтелекту при створенні даної роботи.

## References

- [1] J. Y. Wong, *Theory of Ground Vehicles*. 4th ed. John Wiley & Sons, 2008.  
<https://books.google.com.ua/books?id=Blp2D1DteTYC&printsec=frontcover&hl=ru#v=onepage&q&f=false>.
- [2] M. Meywerk, T. Fortmüller, B. Fuhr, S. Baß, “Real-time model for simulating a tracked vehicle on deformable soils”, *Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 8(5), 2016, doi: <https://doi.org/10.1177/1687814016647889>.
- [3] D. Fan, M. Sebes, E. Bourgeois, H. Chollet, C. Pozzolini, “A fast co-simulation approach to vehicle/track interaction with finite element models of S&C”, arXiv preprint, 2021, doi: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.04062>.
- [4] W. Smith, H. Peng, “Modeling of wheel–soil interaction over rough terrain using the discrete element method”, *Journal of Terramechanics*, Vol. 50, pp. 277–287, 2013, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jterra.2013.09.002>.
- [5] O. González Cueto *et al.*, “Three-dimensional finite element model of soil compaction caused by agricultural tire traffic”, *Computers and Electronics in Agriculture*, Vol. 99, pp. 146–152, 2013, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compag.2013.08.026>.
- [6] D. Körmöczy and P. Kiss, “Comparison of Modeling Methods for Off-Road Tires”, *Machines*, 11(6), 658, 2023, doi: <https://doi.org/10.3390/machines11060658>.
- [7] H. Fathi, M. Khosravi, Z. El-Sayegh and M. El-Gindy, “An Advancement in Truck-Tire–Road Interaction Using the Finite Element Analysis”, *Mathematics*, 11(11), 2462, 2023, doi: <https://doi.org/10.3390/math11112462>.
- [8] T. Czaplak and M. Pawlak, “Simulation of the Wheel-Surface Interaction Dynamics for All-Terrain Vehicles”, *Applied Mechanics*, 3(2), pp. 360–374, 2022, doi: <https://doi.org/10.3390/applmech3020022>.
- [9] Y. Sirohi, “Detailed Tire-Wheel Modelling for Crash Related Development in LS-Dyna”, *SAE Technical Paper*, 2024-26-0376, 2024, doi: <https://doi.org/10.4271/2024-26-0376>.
- [10] Zu Qun Li and Lee K. Bingham, “NASA White Paper – Terramechanics for LTV: Modeling and Simulation”, 2023 [Online]. Available: [https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20220010732/downloads/Terramechanics\\_white\\_paper.pdf](https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20220010732/downloads/Terramechanics_white_paper.pdf).

## Mathematical Modeling of the Interaction Between Propulsion Systems of High-Mobility Ground Robotic Systems and Soil

Ivan Kostiuchenko<sup>1</sup> • Serhii Strutinskiy<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

**Abstract.** This study focuses on improving the off-road performance of ground and hybrid mobile robotic systems (MRS) operating under challenging terrain and surface conditions, particularly on soft soils and uneven surfaces. The focus is on the development of mathematical models and computer simulation of the interaction between different types of propulsion systems — wheeled and tracked — and the terrain. A methodology for evaluating contact interaction, taking into account the nonlinear properties of materials and complex geometrical shapes, is proposed. In particular, a series of numerical experiments was conducted in ANSYS (Transient Structural module), simulating the deformation interaction of wheeled and tracked propulsion systems with the soil. To enhance the reliability of the results, an orthotropic soil model was used, reflecting its layered structure and anisotropy of mechanical properties, along with exponentially nonlinear characteristics of rubber determined from experimental stress–strain curves. This approach allowed for a mathematical description of the complex process of contact patch formation, evaluation of stress and pressure distribution within the contact zone, and determination of the patterns of contact area and settlement changes under applied external loads. The practical significance of this work lies in the possibility of using the developed models during the design phase of robotic systems, particularly for predicting traction performance, estimating energy consumption, and optimizing mobility parameters under various terrain conditions.

**Keywords:** robot, propulsion system, simulation, robotics, UGV, hybrid, mobility, soil mechanics.

---