

Формалізація технологічних процесів на базі основ векторного та тензорного аналізу

В. Ф. Забашта¹ - ORCID <https://orcid.org/0009-0008-9477-5240>

Received: 15 October 2025 / Revised: 19 November 2025 / Accepted: 23 December 2025

Анотація. У роботі здійснено подальший розвиток результатів досліджень [1]–[5] на основі системного аналізу з використанням інтерпретаційно-формального підходу в новому науково-технічному напрямі – технологічній інтерпретації близьких за змістом положень векторного та тензорного аналізу. Це дозволяє розширити формальне поле подання технологічних процесів у межах концепції їх “технологічного смислу” та підвищити формальну спроможність опису ТП. Розкриваються результати досліджень у практико-виробничому аспекті, що стосується ТП, передбачаючи застосування векторного та тензорного аналізу в координатний підхід, технологічний простір, скалярний добуток, матричний тензор, а також приклади тензорного та векторного аналізу в технології композитних АКЗ. Визначається, що вектори (тензори) можуть бути задані різними способами, залежно від технологічного контексту (технологія полімерних композиційних матеріалів – ПКМ), а набір компонент є лише його зображенням у певному (по деталізації) базисі. Використовується координатний підхід, а також можливість інших способів завдання і роботи з векторами (тензорами) на прикладі звичайних векторів і простих тензорів другого рангу, характерних потужною ідеєю ортогональності. Оскільки, за 2-гим вектором та тензором стоять реальні технологічні об’єкти, в тому числі: автономна динамічна система (АДС), конструктивно-технологічні рішення (КТР), технологічні процеси (ТП), у вигляді контраваріантних та коваріантних векторів тощо.

Показано інтерпретаційну відповідність технологічного тлумачення контраваріантних і коваріантних координат вектора, а також встановлено характер зв’язків між технологічно-контраваріантними та технологічно-коваріантними координатами. На прикладі продемонстровано інваріантність укрупнених етапів складного технологічного процесу в різних системах координат, що підтверджує незмінність технологічного вектора за умови перетворення його координат.

Ключові слова: вектор, тензор, базис, символ Кронекера, скалярний добуток, косинус подібності, АДС, КТР, ТП, ПКМ.

1. Вступ

1.1. Характеристика підходу

Сучасний етап розвитку науки характеризується взаємопроникненням, найперше, математики, зокрема в технологіях виробництва, в тому числі – композиційних АК [1]–[4], [7] та ін. Так, в опублікованому комплексі статей [1]–[4] під загальною назвою “Альтернативні технології композитних високонавантажених конструкцій: якісний метод прийняття багатокритеріальних рішень” об’єктами вихідного моделювання є

важкоформалізуємі технологічно-оціночні багатофакторні процеси виготовлення композитних АК. Тому важливими стають рішення з опорою на науково-технічні дослідження. Але часто такі моделі створюють інваріантно, без врахування практики. Адже дуже великий вплив має суб’єктивний підхід, досвід розробника і достатньо великий рівень знань технологічної практики. В зазначених публікаціях представлена автономна система (АДС), де предметом моделювання є комплексний ТП, його етапи та зв’язки між ними. Як розвиток попередніх результатів розглянута можливість залучення так званого монофакторного підходу [9]–[14] в напрямку спрощення шляхами технологічного пристосування до ідей та положень неевклідової геометрії [9], [15], [20]. Так, в даній статті, як подальший розвиток застосування на практиці (композитні АК) ідеї та положення векторного та тензорного аналізу [9], [15]–[22].

¹ АТ Український науково-дослідний інститут авіаційної технології (УкрНДІАТ), Київ, Україна

✉ В. Ф. Забашта
zabashtaeugeny@gmail.com



1.2. Основні засади розвитку конструктивно-технологічних рішень крил літаків із ПКМ

Полімерні композитні матеріали (ПКМ) донині і по теперішній час з широким застосуванням в конструкціях агрегатів повітряних суден транспортної категорії, забезпечуючи низку незаперечних переваг перед металами. Це підвищення вагової віддачі, надійності і ресурсу, а також економічних показників [1]–[6], [9], [10]. Взагалі, конструктивні рішення – це розділ проєкту, який детально описує всі матеріали, з яких зроблена та чи інша конструкція, всі вузли кріплення та розраховані всі навантаження [12]. Відмінною фундаментальною особливістю ПКМ і технологічних процесів виготовлення елементів конструкцій з них (літаки) є одночасне створення матеріалу і виробу [1], [12]. Таким чином, йдеться про взаємопов’язаність конструктивно-технологічних рішень (КТР) в контексті створення і виробництва композитних ефективних конструкцій. Адже ПКМ, як двокомпонентно-складові матеріали, зберігають свою ідентичність в композитах, створюючи “гібридний” матеріал, який має покращені структурні властивості, більш того, забезпечуючи синергізм та інноваційність процесів [1], [9]–[12]. Це досягається тим, що при розробці авіа конструкцій із них, процеси проєктування, створення матеріалу і технології їх виготовлення, є невід’ємними частинами одна від одної. Тому “принципи” надійності та технологічності КТР закладаються саме в цій “зв’язці”. Зазначені переваги реалізуються шляхом повних і удосконалення існуючих конструктивно-технологічних рішень. (КТР) агрегатів літаків [2], [6], [9], [10]. Тому викликає великий інтерес до розробки нових КТР типових структур із ПКМ. На прикладі в [4] приведений аналіз проєкту News-New Evolution Wing Structure.

1.3. Векторно-технологічний аналіз

Векторне і тензорне числення мають не лише суто-прикладне значення, як підготовка необхідної бази для класичної механіки чи електродинаміки. Тут має місце і для технології, щоб віднайти шляхи і підходи для практичних значень у цій науці та техніці. Серед цих підходів – технологічне відображення математичних виразів та формул [9], [15]–[23].

1.3.1. Векторний простір, його розмірність і векторний базис. Як відомо [9], до поняття “вектора” відносять не тільки спрямований відрізок. Векторами можуть бути названі найрізноманітніші об’єкти, що утворюють, векторні простори. До цих об’єктів належать КТР і технологічні процеси (ТП) виготовлення композитних об’єктів. Взагалі технологічний простір – це багатовимірний об’єкт.

Обґрунтування. Розглянемо множину v елементів a, b, c , які можна складати один з одним, множити на довільне число, отримуючи елементи тієї ж мно-

жини. Операція складання повинна мати властивості комутативності і асоціативності (дві умови). Передбачається також, що множина містить нульовий елемент O , а також для будь якого елемента існує елемент $-a$. При множенні на число також повинно виконуватися ряд чотирьох умов [9].

Тобто будь-яка множина елементів, на якій введено операції додавання і множення на число, що володіють зазначеними в [9] властивостями утворюють лінійний і векторний простір. При цьому самі елементи множини називають векторами. Говорячи про складання елементів множини і множення їх на число, слід зауважити, що дії вимагають послідовності в кожному конкретному випадку. Тому для векторів, як спрямованих відрізків операція складання визначається правилом паралелограма, або трикутника, а множення на дійсне число позначається на довжині вектора, і можливо, напрямку (в разі від’ємного множника). Розмірність векторного простору називають максимально число незалежних векторів. Тоді його базисом розмірності N називають будь-яку сукупність лінійно незалежних векторів. Тому в статті при формалізації ТП застосовані положення векторного аналізу найперше, визначення векторного базису [9], [15].

1.3.2. Векторний базис. Система будь-яких трьох впорядкованих лінійно незалежних векторів e_1, e_2, e_3 називається векторним базисом тривимірного простору. Детальніше базисом в просторі називається довільно впорядкована трійка некопланарних векторів e_1, e_2, e_3 тоді будь-який вектор, що належить простору, можна однозначно розглядати за цим базисом:

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \quad (1)$$

Коефіцієнти біля базисних векторів у формулі (1) є координатами відповідно в просторі – $a(a_1, a_2, a_3)$ [9]. Якщо вектори базису e_1, e_2, e_3 , взаємно ортогональні та їх довжини рівні одиниці, то вони називаються ортами прямокутної системи координат і позначаються i_1, i_2, i_3 . В статті орти використовуються, як базисні вектори. Взагалі ж, базис – це множина векторів, які в різних комбінаціях утворюють решту векторів на площині чи в просторі. Базисний вектор – це вектор однієї множини. Водночас кількість векторів базису не залежить від вибору базисних векторів і дорівнює розмірності простору. Векторний простір позначається P_n чи L . В статті матриці є нотацію для описання лінійних відображень. Поняття лінійної комбінації є одним з ключових в лінійній алгебрі. Це вираз, побудований на множині елементів шляхом множення кожного елемента (наприклад, в статті це орти) на коефіцієнти з подальшим додаванням результатів [9], [15]–[20].

1.4. Тензори

Багато завдань геометрії, механіки та фізики приводять до поняття тензора, який має більш склад-

ний характер, ніж поняття “вектор” і є деяким його узагальненням. Однак, в той час, як для кожного вектора існує проста геометрична інтерпретація у вигляді направленого відрізка, для тензорів подібного простого наочного представлення немає місця. Тому є необхідність дати доповнює, а практично нове визначення вектора шляхом узагальнення, що дозволяє охопити і більш складний випадок тензора.

Тензор (від лат. *tendere*, “тягнутись, простирається”) – математичний об’єкт¹ [9], що узагальнює такі поняття як скаляр, вектор, ковектор, лінійний оператор і білінійна форма. Вивченням тензорів займається тензорне числення.

Відомо, що за своєю математичною природою величини бувають трьох типів: скаляри, вектори, тензори. Такий підхід до застосування величин при моделюванні дозволяє сформулювати і фізичні закони а інваріантному виді. Інваріантність розуміється в такий спосіб – якщо в просторі змінити систему координат (для фізики це пов’язано з можливістю зміни системи відліку), то це приводить до відповідних змін в описі процесів й явищ, але форма запису не повинна змінюватися. Тому представляється доцільним використати скалярні, векторні й тензорні величини, які при таких перетвореннях не змінюють запису законів. Наприклад, відстань між точками M_1 і M_2 – інваріант при переході від системи Oxy до системи $O^1x^1y^1$ (рис. 1).

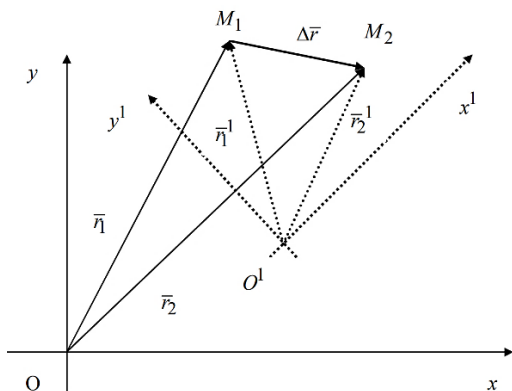


Рис. 1. Незалежність інваріанта тензора (відстань між точками M_1 і M_2) від вибору системи координат (Oxy і $O^1x^1y^1$) [20]

Тензор рангу¹ (m, n) над векторним простором V є елемент тензорного добутку m просторів V та n спряжених просторів V^* (тобто просторів лінійних функціоналів (1-форм) на V):

$$r \in T_n^m(V) = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_m \otimes \underbrace{V^1 \otimes \dots \otimes V^1}_n \quad (2)$$

¹Тензор рангу $(0; 0)$ є скаляр; рангу $(1; 0)$ – вектор; рангу $(0; 1)$ – ковектор (коваріантний вектор), тобто елемент простору V^* ; рангу $0,2$ – білінійна форма; рангу $(1; 1)$ – лінійний оператор [9].

Сума чисел $m + n$ називається валентністю тензора. Тензор рангу (m, n) також називається m разів контраваріантним та n разів коваріантним.

Тензор може розглядатися з двох сторін – в геометричній інтерпретації і як абстрактне поняття (п. 3).

Таким чином, вектор (тензор) – це єдиний об’єкт, який може бути заданий різними способами, в тому числі і технологічно, залежно від контексту, а набір компонент є лише його зображенням у певному базисі, користуючись яким у задачі, яка розглядається, може бути зручно або ні [9].

Стосовно зазначених в статті технологіям композитних АК, то тут червоною ниткою проходить [1]–[7], [9]–[14] оформлене представлення ряду принципових ідей та положень векторного та тензорного аналізу [15]–[25], а саме: структурованість, агрегатність, зв’язність та можливі перетворення об’єктів. В технологічному трактуванні в спрощенні йдеться про технологічні перетворення (у вказаній загальності) низки напівфабрикатів ПКМ у готовий виріб (АК).

Слід зазначити, що у всієї своєї могутності формалізму тензорного аналізу, що проявляється не у всіх областях, досить часто використовують як і в даній статті його спрощений варіант.

Мета статті

Розкрити результати авторських досліджень у практико-виробничому аспекті, що стосується ТП, передбачаючи застосування векторного та тензорного аналізу:

- координатний підхід, технологічний простір, скалярний добуток, матричний тензор;
- приклади тензорного та векторного аналізу в технології композитних АК.

2. Приклад технологічної структури та зв’язності у векторному відображенні

2.1. Нові конструктивно-технологічні рішення крил літаків із ПКМ: аналіз NEWS-проекта [4], [9]

News – це проект у відповідності зі стратегією нової дочірньої компанії STELIA Aerospace R&T по розробці композитних конструкцій з високим потенціалом в технічній та економічній галузях. В планах STELIA Aerospace – це удосконалення технології LR1 (Liquid Resin Infusion) – інфузії [2], [4], [5], [9] саме на прикладі шляхом виготовлення в якості демонстратора відсіка крила інфузійно-інтегральної конструкції рис. 2 та 3.

Тут йдеться про переваги вибраної інтегральної інфузійної технології, включаючи мінімізацію етапів складання, автоматизацію процесу, економічний безавтоклавний процес формування.

Задачі, що потребують рішення:

- виготовлення конструкції за один цикл: обшивка + стрингери лонжерони + нервюри;
- виготовлення конструкції “в розмір” (вилучена операція обрізки після затвердіння);
- одержання якісної поверхні.

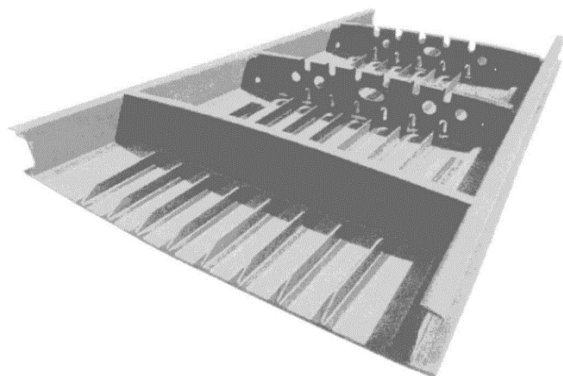


Рис. 2. Експериментальний інтегральний відсік крила (інтегральна технологія)

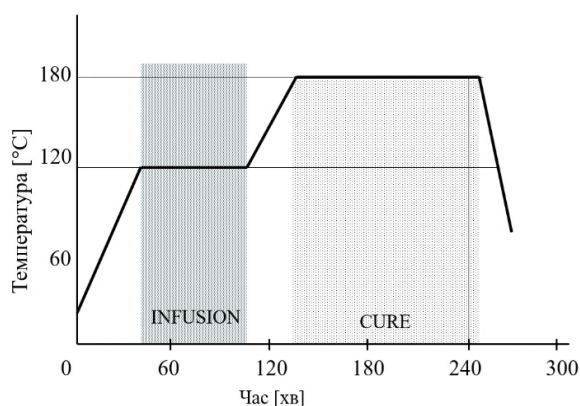


Рис. 3. Температурний режим просочення (inflation) та затвердіння (cure) зібраної конструкції (зв'язуюче марки RTM6 фірми Hexcel)

Принцип проектування та виготовлення полягає в тому, щоб створити конструкцію крила із складання тільки двох агрегатів інтегрального типу: перший (обшивка + стрингери + лонжерони + нервюри), другий (кришка: обшивка + стрингери). Тут напрошується аналогія з векторами; де відсік крила – узагальнений вектор, а два вказаних вище агрегати – це базисні вектори. В статті йдеться не тільки про ефективність залучення інноваційних технологій, а також й про можливість їх формалізації (в помірному форматі).

2.2. Векторний (координатний) базис у відображенні ТП

На основі [9], [15], [20] та скороченню в р. 1, будемо вважати, що технологічний процес (ТП) у формалізованому вигляді (при технологічному втіленні може

бути представлений вектором r , наприклад, препрегово-автоклашний процес (ПАП) з його подальшою структуризацією, наприклад, автоклав та оснастка (форма). Будемо вважати, що ці два вектори при взаємодії об'єднані за допомогою точкового добутку, де результат є скалярним (скалярний добуток). Його також ще можна називати “внутрішнім продуктом”. Сумарний вакуум-автоклашний процес формування представлений на рис. 4, графіком у вигляді кривих. Аналогічно це стосується і технологіко-конструктивних рішень (КТР). З огляду на це, першим у технологічному втіленні базисом векторного простору є повна система у вигляді впорядкованого набору базисних векторів у лінійному просторі. Наприклад, в табл. 1 та 2 представлена в спрощенні структура базису ПАП у разі виготовлення композитної (вуглепластик) панелі крила літака [3], [7], [9].

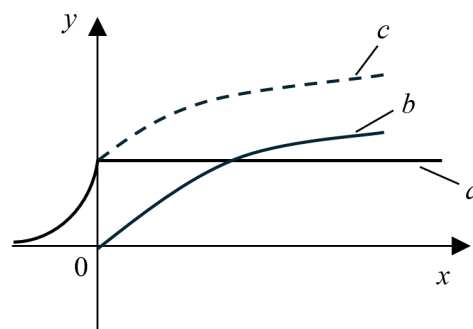


Рис. 4. Графіки функцій формування композитних панелей: a – вакуумне формування, b – автоклашне формування, c – сумарне вакуум-автоклашне формування

Із можливих варіантів тут представлена в першому наближенні два взаємних приклади [9], [14]–[20] базисів ТП, а саме базис – 1 (a, b, c) для ПАП і альтернативний до нього інтегрально-інфузійний ТП з базисом – 2 (a', b', c'). Водночас, вектори цих базисів структурно являють собою лінійну комбінацію базисних векторів. Тобто, в будь-якому векторному просторі мають місце різні базиси, за рахунок, наприклад, перебору векторів базису, а також за рахунок того, що вектори можна вибрати різним чином, змінивши напрям цих векторів. В такому разі базис є нормалізованим [9], а також як приклад, табл. 1 та 2. Відомо, що три вектори, які задані в прямокутній декартовій системі координат, є лінійно незалежними, якщо визначник матриці, складеної з їхніх координат, не дорівнює нулю.

Щодо зазначених альтернативних варіантів ТП і КТР композитних АК, то вони зазначені в [9], [1]–[4], [14]–[20]. Саме в розрізі техніко-економічних і експлуатаційних властивостей. Тут в табл. 1 та 2, представлені, як різновиди дві трійки базисних векторів (a, b, c) і (a', b', c'), що утворюють два координатних векторних КТР (р. 2). Визначивши двох звичайних матриць, що складається з координат вказаних базисних векторів,

мають наприклад, в першому наближенні значення 4 і 5. Тобто тут, детальніше, мають на увазі препрегово-автоклавні технології (літаки В – 787 і А – 350 XWB) перший в експлуатації 13 років, а другий 10 [9]. А літак

Таблиця 1. Вектори двох систем КТР та визначники матриць, складених з їхніх координат

Варіанти КТР	Трійки векторів, що утворюють базиси в R^3	Визначники матриці
препрегова автоклавна	$\begin{aligned}\bar{a} &= \bar{i}_1 + 2\bar{i}_2 + 3\bar{i}_3, \\ \bar{b} &= \bar{i}_3, \\ \bar{c} &= 3\bar{i}_1 + 2\bar{i}_2 + \bar{i}_3\end{aligned}$	4*
інтегральне інфузійне	$\begin{aligned}\bar{a}' &= \bar{i}_1 + 2\bar{i}_2 + 3\bar{i}_3, \\ \bar{b}' &= \bar{i}_3, \\ \bar{c}' &= 3,5\bar{i}_1 + 2\bar{i}_2 + \bar{i}_3\end{aligned}$	5*

$\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3$ – орти прямокутної декартової системи координат

* без порівняння варіантів КТР щодо несучої здатності та технічно-експлуатаційних властивостей крила

МС-21 повинен був вийти в серійне виробництво у 2016 році, але з тих пір терміни переносились більше 10 разів. В 2025 році серійне виробництво знову перенесли вже на 2026 рік [9]. Ясно, що вибір варіанта (різновиду) по двом різним технологіям має пройти дійсно техніко-економічне та експлуатаційне обґрунтування. Тому тут за попередньо заявленим даним щодо економічної ефективності, перевага віддана інфузійним технологіям [4], [9]. Це відображено в значеннях визначників матриці, поряд з тим в [1], [3], [9]–[14] і в табл. 2 зазначені низка дійсних переваг препрегово-автоклавних технологій.

В ній зі спрощенням поданий зміст компонентам векторів базису (a, b, c) першого різновиду зі спрощенням (наявність кількох резервних показників).

Таким чином, тут можна говорити про технологіко-векторний простір.

3. Введення в технологічне відображення тензора (вектора) Контраваріантні (звичайні) і коваріантні (дуальні) вектори

3.1. Загальні технологічні положення

За вектором та тензором стоять реальні технологічні об'єкти: ТП, обладнання, тощо, а тому вектор (тензор) – це тототжний опосередкований нормативний

Таблиця 2. Векторна система базису в технологічній інтерпретації: вектор $\bar{r}$ – препрегово-автоклавний ТП. Серійне виробництво

Вектори базису вектора $\bar{r}$	Компоненти визначених векторів базису	
	Позначення*	Технологічне відображення формальних виразів і формул
$\bar{a}$ Матеріали та технологічні процеси	$\bar{i}_1$	Компоненти ПКМ, препреги фізико-механічні характеристики, технологічність
	$2\bar{i}_2$	Схема технології виготовлення “сирої” панелі, обладнання, параметри ТП
	$3\bar{i}_3$	Вакуум-автоклавне термосилове формування панелі, параметри ТП; габарити і форма панелі
$\bar{b}$ Технологічна оснастка (ТО)	$\bar{i}_3$	ТО (форма) для вакуум-автоклавного формування формоутворюючий лист-метал (титан), Габарити
$\bar{c}$ Порівняльна ефективність виробу. ТП і ТО	$3\bar{i}_1$	Підвищення фізико-механічних характеристик ПКМ, надійності та контролепридатності матеріалу і виробу
	$2\bar{i}_2$	Високий рівень зазначеної технології, як показник якості ТП, суттєво впливаючи на якість продукції
	$\bar{i}_3$	Висока доступність**, а також висока якість відформованої панелі

* коефіцієнти (числа) біля ортів-координат $\bar{r}$ в базисі a, b, c

** здатність системи працювати безперервно без збоїв протягом заданого періоду часу [9]

набір чисел. Вектор (тензор) – це чи не єдині об'єкти, які можуть бути задіяні різними способами, залежно від технологічного контексту, а набір компонент є лише його зображенням у певному вибірковому базисі. Тут також може використовуватись координатний підхід, а також можливість інших способів завдань і роботи з векторами (тензорами). Найперше, на прикладі звичайних векторів і простих тензорів другого рангу з потужною ідеєю ортогональності. Слід зазначити, що розмірність векторних і тензорних величин залежить від технологічної задачі, і якщо задача заздалегідь призведе до безрозмірного вигляду, то і компоненти є безрозмірними. При розв'язуванні задачі з технологічними величинами базис можна задати безрозмірним. Тоді компоненти векторів і тензорів є безрозмірними (по аналогії з фізичними величинами [9]).

3.2. Приклади узагальненого вектора та його складових в технології ПКМ

1. Як відомо [9], категоризація – прийом використання у структурній інтерпретації виділених у процесі описового аналізу найбільш суттєвих одиниць. Тут, як перший варіант ідеться про технологічне відображення (в скороченні) конструктивно-технологічних рішень (КТР) в цільовому напрямку (технологічність ПКМ, оснастка, автоклавне та інфузійне формування композитної панелі та ін. Детальніше, це у формальному вигляді: узагальнений вектор $\mathbf{a}$ – КТР та його складові категорії, або категорії: – вектор $\mathbf{e}_1$ – технологічні рішення (ТР), в скороченні це, наприклад директивні ТП; – вектор $\mathbf{e}_2$ – конструктивні рішення (КР), в скороченні це, наприклад, ПКМ, технологічність конструкції та ін. Вони детермінують найбільш характерні рішення.

2. У другому прикладі ідеться про технологічну систему (ТС) у складі двох її підсистем, саме технологічного процесу (ТП) та технологічної оснастки (ОС). Сам факт об'єднання цих двох підсистем говорять про їх перехід з вихідного стану в робочий стан. Так, перехід ОС в робоче положення, наприклад при автоклавному формуванні пов'язане з наладою вакуумної системи та ін. Детальніше у формалізованому вигляді цей варіант розглядається нижче.

3.3. Геометричний узагальнений вектор $\mathbf{a}$ на площині: технологічно контраваріантні (звичайні) та коваріантні компоненти

3.3.1. Загальне визначення. Розглянемо вектор $\mathbf{a}$ (ТС). Як відомо, будь-який вектор можна задати на площині за допомогою двох неколінеарних векторів:

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 \quad (3)$$

Тут a^i , $i = 1, 2$ коефіцієнти розкладання (під верхнім індексом слід розуміти саме номер компонент, а не

зведення у ступінь), так звані контраваріантні координати вектора $\mathbf{a}$. Геометрично – це можна зобразити так, як показано на рис. 5 [15]. Вектори $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ є базисними (вектори базису), кут між ними, при умові $\varphi \neq 0, \pi$ може бути довільним, довільним також ненульова довжина базисних векторів. Вказаний базис задає косокутову систему координат на площині, з осями (u, v) .

Виходячи із рис. 5 довжини відрізків OA_1 і OA_2 дорівнюють:

$$OA_1 = a^1 |\mathbf{e}_1|, \quad OA_2 = a^2 |\mathbf{e}_2|, \quad (4)$$

Нехай в (3) і (4) вектор $\mathbf{e}_1$ – ТР; а вектор $\mathbf{e}_2$ – КР. Аналогічне, приведене має місце і для ТС, ТП, ОС.

Ясно, що зазначене в (3) не єдиний спосіб визначити вектор $\mathbf{a}$ в даній системі координат, його можна також задати ортогональними проекціями на осі (u, v) , а саме:

$$OB_1 = OA_1 + OA_2 \cos \varphi = a^1 |\mathbf{e}_1| + a^2 |\mathbf{e}_2| \cos \varphi \quad (5)$$

$$OB_2 = OA_1 \cos \varphi + OA_2 = a^1 |\mathbf{e}_1| \cos \varphi + a^2 |\mathbf{e}_2| \quad (6)$$

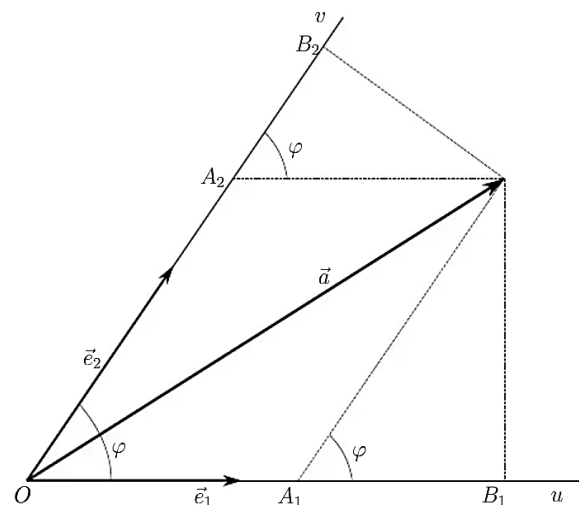


Рис. 5. Задання базисом (вектори $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) системи координат на площині

Далі, виразимо довжини цих проекцій через довжину базисних векторів [15]. В результаті одержимо:

$$OB_1 = \frac{a_1}{|\mathbf{e}_1|}, \quad (7)$$

$$OB_2 = \frac{a_2}{|\mathbf{e}_2|}, \quad (8)$$

де $a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1$ і $a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2$ – коваріантні координати вектора $\mathbf{a}$.

Зі спрощенням, коваріантний вектор – це такий математичний об'єкт, який діє на звичайний контрва-

ріантний вектор і в результаті дає число-скалярний добуток цих векторів із звичайними властивостями лінійності. Розмірність ковекторів збігається з розмірністю їх контраваріантних аналогів.

Тобто один і той же вектор може бути записаний, як коваріантний (тобто набір коваріантних координат) і контраваріантний (набір контраваріантних координат).

Контраваріантні вектори часто називають простовекторами, а коваріантні – ковекторами або подвійними векторами. Як відомо в математиці фіксація однієї величини відносно інших змінюється відповідно до фіксованого математичного співвідношення. При розгляді коваріантних компонентів на будь-яку вісь, необхідно використовувати скалярний добуток [9].

В математиці, зазвичай контраваріантним вектором називають сукупність (стовпець) координат вектора у звичайному базисі (контрваріантні координати).

Зразок контраваріантного вектора – це вектор зміщення, записаний у вигляді набору збільшених координат: dx^1 . Більш близьким до технологічного охарактеризування є наступні дефініції. В цьому випадку формальне визначення контраваріантності, саме якщо воно зберігає порядок типів ($\leq$); який упорядковує типи від більш специфічних до більш загальних; а контраваріантний, якщо він може змінювати цей порядок [9]. Так, ковектор дозволяє призначити екземпляр змінної, тип якої є одним із найбільш загальних типів екземпляра, тобто супертип. Контраваріант же лише дозволяє призначити екземпляр змінної, тип якої є одним із похідних типів екземпляра, тобто підтип.

Для можливості більш точного технологічного відображення необхідні додаткові пояснення. Виберемо базис в сполучному (спряженому) просторі так, що $g^i(x) = x^i$, тобто ці функціонали знаходять i -ту координату вектора. Тобто взагалі дуальний базис змінюється збіжно зміні основного базису. Отже, його вектори будуть змінюватись, як основний базис – саму цю властивість називають коваріантністю. Саме лінійні функціонали в координатному представленні в дуальному базисі називають коваріантними векторами

чи коротко ковекторами. Зовнішньо ковектор виглядає, як звичайний вектор – у сенсі звичайного набору чисел, представляючи координатами (рис. 5, рис. 6), В табл. 3. показана інтерпретація процесного циклу ПКМ. Значна відмінність ковектора від контраваріантного вектора висновується (виявляється) в правилі перетворення його координат при зміні базису: вони перетворюються так, як базис. У відмінності від контраваріантних векторів, що перетворюються (координати) протилежно базису. Для ідентифікації ковекторів використовується, як це було задумано, нижній, або коваріантний індекс [9].

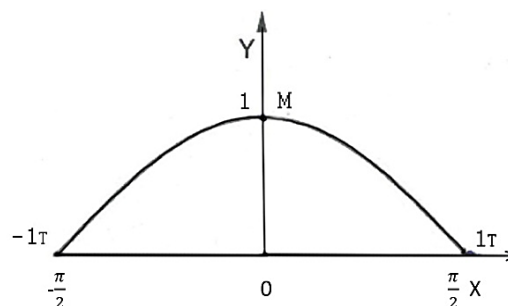


Рис. 6. Конусоїда на проміжку від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Інтервал між точками $-1t$ і $1t$ початок та закінчення ТП

Два базиси (e_1, e_2, e_3) і (e'_1, e'_2, e'_3) називаються взаємними, якщо їх вектори задовольняють співвідношенням:

$$e_i \cdot e^k = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases} \quad (9)$$

Із зазначеного випливає, що кожний вектор основного базису перпендикулярний двом векторам взаємного базису, а з третім складає гострий кут.

Таблиця 3. Косинус технологічної подібності (інтерпретація процесного циклу ПКМ)

Назва, позначення	Початок процесу	Середня частина процесу	Закінчення процесу
Точки по осі X	$-1t$	0	$1t$
Кути по осі X	$-\frac{\pi}{2}(90^\circ)$	0	$\frac{\pi}{2}(90^\circ)$
Значення по осі Y $Y = \cos x$	0	$1(M)^*$	0
Коротке визначення	Компоненти ПКМ напівфабрикати “сирі” об’єкти	“Сира” цілісна панель і початок активної реакції зв’язуючого	Готові панелі та її зразки – свідки

* M – середина-точка зосередження технологічних відносин процесу.

Таблиця 4. Альтернативні ТП. Векторно-технологічна система a на площині: контраваріантні і коваріантні координати з прикладами (рис. 5)

Вектор a		Автономна динамічна система: етапи 3 та 4 [11]–[13]	
Система координат		Косокутова. Базисні вектори: e_1, e_2 . Вісь u – суцільність виготовленої панелі, вісь v – технологічне оснащення	
Контраваріантні координати		Коваріантні координати	
OA_1 – вісь u	OA_2 – вісь v	OB_1 – вісь u	OB_2 – вісь v
Фактор: суцільність “сирої” панелі	Фактор: технологічна оснастка	Фактор: теплосилове пропресування	Фактор: технологічне обладнання

3.3.2. Технологічне відображення. При виборі (визначенні) контраваріантних і коваріантних векторів в їх технологічному трактуванні (технологічний зміст та зв'язки) були відображені особливості вказаних об'єктів і прийняті такі зазначені умови. В технологічній адаптації це об'єкти ТП з виготовлення композитних АК. Наприклад, вуглепластикові панелі кесона крила в альтернативних технологіях та ін., з розробкою моделей формалізації, в т.ч. автономної динамічної системи (АДС) [1]–[4], [10]–[14].

В статті на основі поняття “довільний вектор” [4], [23], що саме застосовується в розумінні “технологічний вектор”. Це не обов'язково направлений відрізок, але тут кожному вектору можна поставити у відповідність деякий направлений відрізок, який має напрямок вектора, який розглядається і довжину, що може дорівнювати числовому значенню його модуля (у повному масштабі). Тобто в основі поняття технологічний вектор або технолого-векторні величини лежить поняття геометричний вектор, таким чином, можна говорити про адаптовані технологічні об'єкти, що поставлені у відповідності (в певному наближенні) до геометричних об'єктів.

Далі для технологів, як і для фізиків за вектором і тензором завжди стоїть реальний об'єкт, а тому вектор (тензор) не тотожні набору чисел. Вектор (тензор) – це єдиний об'єкт, який може бути заданий різним способом, залежно від контексту, а набір компонент є лише його відображення у певному базисі користуючись яким у розглянутій задачі це може бути зручно або ні [9], [23].

При зазначеному відображенні слід вказати, що якщо визначено невироджений метричний тензор, то “коваріантний вектор і контраваріантний вектор” є просто різним представленням одного і того ж об'єкта. Однак, у випадку переймання щодо коваріантного вектора, то це представлення ТП вже більш розширене. Тут можливе застосування поняття “технолого-коваріантний вектор”, або в більш широкому значенні “технологічний ковектор” розвитку (розмаху) ТП

(ТКВР). Приймається, що дві складових взаємопов'язаних частин ТКВР, саме вхідна та вихідна.

На прикладі (рис. 5 табл. 4) елементів 3 та 4 широко представленої АДС [11]–[13], де контраваріантні координати цього вектора (вхідна частина), що надає цьому змісту системо подібний характер, націлений на розвиток конкретного ТП. Так “сира панель” на “оснастці” (контраваріантні координати) проходить “термосилове пропресування” в “автоклав” і (коваріантні координати). Тут можна провести певну аналогію з складнопідрядним реченням (СПР), яке складається з головної та підрядної частин. Головна частина СПР, від якої ставиться питання до підрядної, а підрядна частина відповідає на поставлене питання.

3.4. Підсумкові дані

В позначеннях [24] щодо вказаних векторів має місце:

1. v – звичайний (контраваріантний вектор – утворюючий векторний простір v .

ω – дуальний подвійний вектор (ковектор), утворюючий дуальний, спряжений простір ω^k (часто – це простір v^k). Наприклад такі пари: автоклав-форма; прес-штамп, верстат-пристрій тощо.

2. Дуальний вектор приймає в себе звичайний вектор і видає якесь число. Тобто:

$$\omega(v) = a \in R. \quad (10)$$

Йдеться про технологічне відображення зв'язку між вказаними векторами (приклад, між вказаними вище парами в різних технологіях). Найперше, цей зв'язок типу техніко-технологічне пристосування об'єктів у лінійно-функціональному ТП. Він формалізовано відповідає певним властивостям, а саме дуальний простір повинен бути лінійний.

Наприклад:

$$\omega(av + b\omega) = a\omega(v) + b\omega(\omega)$$

3. Далі в положеннях [9], [15] визначається контраваріантні компонентні вектори – це його координати при розвиненні за основним базисом, а коваріантні компоненти – за взаємним:

$a^1, a^2, \dots, a^{10}$ – контраваріантні компоненти вектора;
 $a_1, a_2, \dots, a_n$ – коваріантні компоненти вектора.

Зв'язок між вказаними компонентами (координатами) можливий тільки в просторі, де заданий метричний тензор [9].

4. Згідно [9] будемо вважати, що зміст контраваріантного і ковектора різний лише тому саме, який з себе із представлених більш технологічно прийнятий (притаманий, природний). Як приклад задіяні в табл. 4 об'єкти, в тому числі технолого-коваріантні та контраваріантні вектори.

5. Таким чином мова йде про описову адекватність, де правила створення добре сформованої конструкції.

4. Символ Кронекера. Скалярний добуток. Косинус подібності. (Початкове визначення та призначення)

4.1. Символ Кронекера (або дельта Кронекера чи кронекеріан) – одиничний тензор 2-го рангу (порядку). Може розглядатись, як операція скалярного добутку векторів. Це функція двох змінних, яка дорівнює 1, якщо змінні рівні, 0 в іншому випадку [9]. В лінійній алгебрі символ Кронекера може використовуватись для запису умови ортонормативного базису $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, а також в загальному випадку – для визначення дуального базису. Матриця (g) , що складена із елементів (δ_{ij}) є одиничною. Вона вказує на те, що всі діагональні елементи дорівнюють 1, а всі недіагональні елементи рівні 0. Це проста, але потужна функція слугує фундаментальним побудовним блоком в багатьох математичних випадках чи операціях. Так, часто дельта Кронекера використовується в підсумуваннях і інтегралах для спрощення виразів шляхом вибіркового включення членів, заснованих на рівності індексів. Нижче наведений приклад:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

4.2. Скалярний добуток – бінарна операція над векторами: результатом якої є скаляр. Два означення добутку векторів:

– скалярним значенням двох векторів є число рівне добутку довжини цих векторів на косинус кута між ними.

– скалярним добутком двох векторів також називають число, рівне добутку довжини одного з цих векторів на проекцію іншого вектора на вісь, обумов-

ному першим з вказаних векторів.

Взагалі для векторного простору існують різні варіанти скалярного добутку. В статті застосовується узагальнююча форма запису скалярного множення, що не залежить ні від розмірності простору, ні від розгляданого (аналізованого) базису, всі властивості якого обрані в матриці g (р. 5 метричний тензор).

Припустимо, що наш базис – декартовий, тобто ортонормований [9], [25]. Тоді матриця g стає одиничною

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Нехай вектор a заданий в такому базисі. Квадрат довжини вектора, як відомо, це скалярний добуток вектора самого на себе, тобто:

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= \vec{a} \cdot \vec{a} = g_{ij} a^j a^i = (g_{11} a^1 + g_{12} a^2 + g_{13} a^3) a^1 + \\ &+ (g_{21} a^1 + g_{22} a^2 + g_{23} a^3) a^2 + (g_{31} a^1 + \\ &+ g_{32} a^2 + g_{33} a^3) a^3 = (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2. \end{aligned} \quad (13)$$

В цьому випадку квадрат довжини вектора збігається з заданим в прямокутній системі координат.

4.3. Косинус подібності

У другому випадку застосування розглядається так званий косинус подібності [9], [16]. Це коефіцієнт двох ненульових векторів, який обчислюється, як косинус кута між ними Косинус 0° дорівнює 1 (рис. 6, точка M), а всі інші значення кута в інтервалі $(0, \pi)$ буде менше за 1. Отож, це оцінка напрямку, а не величини: два вектори з однаковим напрямком мають косинус подібності 1, а два вектори, що утворюють кут 90° від одного, мають подібність 0^U , а два діаметрально направлених вектори мають подібність -1 , незалежно від їх довжини. В статті в технологічному просторі, задіяні перша та друга чверті координатної системи (рис. 4, 6). Друга чверть, як і в роботах [11]–[13] пов'язується зі зв'язуючим r , а саме: ПКМ, “сирими” заготовками та панеллю (проміжок, $-\pi/2, 0$), а перша чверть (проміжок: $0, \pi/2$) з температурного початку активної реакції зв'язуючого та процесом повного затвердіння. Зазначений проміжок та фактор $\cos \varphi = 1$, як напрямок, може мати таке технологічне трактування: полімеризація зв'язуючого. Значення $\cos \varphi = 0$ в точці $1t3$ означає остаточне затвердіння ПКМ. При цьому існуючі габарити панелі тут мають незмінні розміри, (рис. 2). Функція $y = \cos x$ є парною. Тому графік симетричний відносно Oy . Тоді, наприклад значення $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, можна зазначити дві точки, в другій та першій чверті, на рис. 3 це стадії “infusion” та “cure”.

5. Метричний тензор

5.1. Введення

Лінійний елемент (елемент довжини ds) [9], [22]. Зазначений математичний об'єкт грає вирішальну роль (свого роду у технологічному відображенні “механіка”, або навіть “механізм” зв'язку) розгорнутому формулюванні метричного тензора (див. нижче), чи метрики, що задіяно на тензорному полі. В спрощенні щодо тензора, то це узагальнення понять, що характеризуються розміром і напрямом далі в скороченому складанні визначимо узагальнення. Для цього, наприклад розглядається прямокутний паралелепіпед, його вісім вершин: AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . Далі зазначається діагональ паралелепіпеда. Це, наприклад, відрізок AC_1 , що не лежить на одній його грані. В декартовій системі координат в елементарному паралелепіпеді виділені три ребра: $dy^1(AD)$, $dy^2(AA_1)$, $dy^3(AB)$. Тут позначається ds безкінечно мала відстань AC , з назвою ds елементом довжини чи лінійним елементом. Вираз для ds визначається через диференціали dx^r :

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 = dy^i dy^i. \quad (14)$$

Далі, через деталізоване просте визначення позначень dy^i і g_{mn} отримано кінцевий результат:

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n. \quad (15)$$

Позначено, що g_{mn} симетричний, а так як ds є інваріант, то із (15) слідує, що $g_{mn} dx^m dx^n$ також є інваріант при довільному контрваріантному векторі dx^r . Звідсіля слідує, що g_{mn} є коваріантний тензор другого порядку під назвою фундаментальний чи метричний тензор [9], [22].

Більш формально це тензор другого рангу на гладкому многовиді, що задає його локальні можливості, зокрема, визначає скалярний добуток. Простими словами, метричний тензор дозволяє вимірювати відстані та довжини на викривленому просторі.

Мета, заради якої метрику і метричний вектор введено в науковий простір – бажання описати будь – який простір за допомогою математичних формул – і по певній аналогії – визначити технологічний простір. Суть технолого-фізичного матричного простору в тому, що якщо відомі компоненти метрики матричного простору g_{mn} , то можна “побудувати” простір. Коефіцієнти g_{mn} можуть бути записано у вигляді двовірної матриці, що складається з рівного числа строк та стовбців (симетрія). Саме матричне представлення g_{mn} тут має на увазі (15), яка являє собою формулу розрахунку ds^2 в самому загальному вигляді, і тому вона справедливо для кожних просторів [9].

Приклад, зв'язок між вказаними компонентами (координатами) можливий тільки в просторі, де заданий метричний тензор [9].

5.2. Відображення порядку (рангу) векторів

Тензор – об'єкт лінійної алгебри лінійно-перетворюючий елемент лінійного простору в елементи дру-

гого, зокрема (в окремої) тензорами є скаляри вектори, білінійна форма та ін. Сучасна математика розглядає узагальнені простори, наприклад лінійний простір у лінійній алгебрі, простір подій у теорії ймовірності, фазовий простір фізичної системи. Точками (елементами) цих просторів можуть бути геометричні фігури, функції, стани технологічної і фізичної системи тощо [9], [13]–[22].

Ранг, чи порядок тензора визначається числом осей: скаляр – тензор нульового порядку, вектор-тензор першого порядку, матриця – тензор другого порядку, куб-тензор третього порядку щодо відображень тензорів.

Тензор першого порядку (вектор) відображена тензор першого порядку в тензор нульового порядку (скаляр), тоді, як тензор другого порядку відображає тензор першого порядку в першого порядку. Далі тензор третього порядку відображає тензор першого порядку в тензор другого порядку.

Розглянемо об'єкт другого порядку. Найпростішим видом такого об'єкта є добуток двох векторів, або об'єктів першого порядку. Такий добуток може бути трьох різних типів:

- 1) добуток двох контраваріантних векторів;
- 2) добуток двох коваріантних векторів;
- 3) добуток контраваріантного та коваріантного

векторів, такий об'єкт є змішаним тензором другого порядку. Він позначається за допомогою одного верхнього та другого нижнього індексів [9], [22].

6. Формальна спроможність в області ТП: Перетворення координат на площині. Технологічний об'єкт (вектор) – виготовлення композитної панелі

6.1. Загальна частина

Йдеться про “формальну спроможність” в технологічній області. Так, формалізація спроможності означає перетворення “спроможності” (здатності) у відому формальну систему, де форма стає важливим об'єктом дослідження. Це може бути виражено через формальні мови, правила, моделі які дозволяють окреслити цю область формалізації.

При перетворенні координат завжди можна вказати на величини (об'єкти), що залишаються незмінними (інваріантними) при цьому перетворенні [9]. Це фізичні величини; також тут можна вказати на технологічні об'єкти (різноманітність процесів), що йдуть до однієї цілі виготовлення. Зазвичай, системи координат можуть бути переміщені або повернуті один до одного. При цьому скаляри, вектори, тензори визначаються своїми властивостями трансформації при зазначених перетвореннях.

Так, на рис. 7 препрегово-автоклава і інфуційно-пічна технології виготовлення однієї і тієї ж композитної панелі в різних системах координат. Перша

зазначена технологія в декартовій системі, а друга – в косокутовій (п. 6.2).

Вище було зазначено, що по взаємовідношенням ковектор приймає в себе вектор (діє на нього). Тут також важливим є питання збігу базисів. Якщо взяти базис декартової прямокутної системи координат (базисні вектори взаємно перпендикулярні), то взаємний базис збігається (співпадає) з ним. Тобто в декартових системах контраваріантні і коваріантні компоненти по напрямку осі (пряма лінія) збігаються [9], [20], [25]. Наприклад, в таб. 4 та на рис. 7 щодо контраваріантних компонент, то по осі x_0x_1 це “суцільність ПКМ”, а по осі y_0y_1 – “технологічна оснастка”.

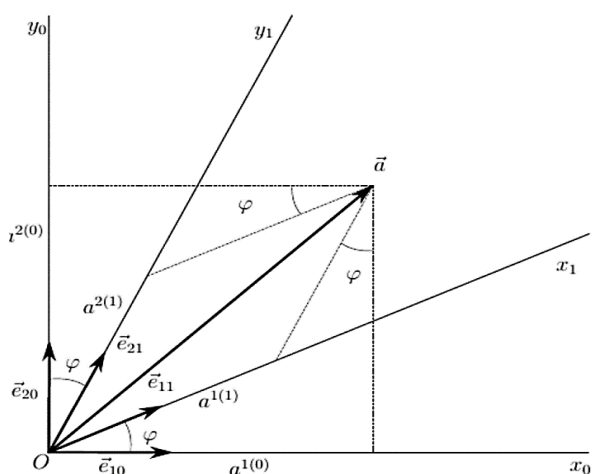


Рис. 7. Перехід векторів (рис. 2) в косокутовій системі координат до декартової

Відносно дуальних векторів і їх коваріантних компонент, то по осі x_0x_1 – це “Термосилове пропресування ПКМ”. Це багатофакторний об’єкт, що включає: товщину композитної панелі, фізико-механічні характеристики, структуру ПКМ: об’ємну долю зв’язуючого і армуючих волокон, пористість, якість відформованої поверхні, тощо. А по осі y_0y_1 – це “технологічне обладнання”. В афінній (косокутній системі) координат базис і кобазис не збігається. (рис. 5, рис. 7)

6.2. Приклад (формалізація на основі [15] рис. 7)

Нехай вектор a (виготовлення панелі) заданий в двох нормованих базисах – прямокутовому (e_{10}, e_{20}) – препрего-автоклавне ТП ($a^{(0)}$) і косокутовому (e_{11}, e_{21}) – інфузійно-пічне ТП ($a^{(1)}$). Перетворення із косокутової системи в прямокутну виражається матрицею (16), зворотне перетворення матрицею (17).

$$A_{01} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$A_{10} = A_{01}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Задамо кут нахилу осей (рис. 7) $\varphi = \frac{\pi}{6}$ (п. 4.2).

Тоді в (18) тригонометричні функції мають такі значення:

ная: $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = 0,5$ і $\sin 30^\circ = 0,5$. При об-

численні контраваріантних компонент вектора a в косокутових осях, для цього також необхідно знати компоненти вектора в прямокутних координатах.

Нехай такий вектор $a^{(0)}$ має компоненти (18). Тобто $a^{(1(0))} = 3$, а $a^{(2(0))} = 4$.

$$a^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$g^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

В (18) йдеться про технологічні векторні координатні величини.

Ясно із (18), що отримана довжина цього вектора просто $|a| = 5$.

Далі, як і в п. 4.2 метричний тензор в ортонормованому базисі представляється одиничною матрицею (19). Тоді по аналогії з (13) має місце (20):

$$|a|^2 = g_{ij}^{(0)} a^{j(0)} a^{i(0)} = \left(g_{11}^{(0)} a^{1(0)} + a_{12}^{(0)} a^{2(0)} \right) a^{1(0)} + \left(g_{21}^{(0)} a^{1(0)} + g_{22}^{(0)} a^{2(0)} \right) a^{2(0)} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 9 + 16 = 25. \quad (20)$$

Тобто отриманий квадрат довжини вектора.

Вказані вище положення і норми тензорного аналізу дозволяють визначити контраваріантні координати вектора a в косокутних осях (інфузійно-пічні ТП):

$$a^{1(1)} = a_1^1 a^{1(0)} + a_2^1 a^{2(0)} = \sqrt{3} - 4 \quad (21)$$

$$a^{2(1)} = a_1^2 a^{1(0)} + a_2^2 a^{2(0)} = -3 + 4\sqrt{3} \quad (22)$$

Отже, за вектором та тензором стоїть реальний технологічний об’єкт. При адоптації кожний вектор (наприклад, етап ТП) задається своїми компонентами (координатами), які залежать уже не тільки від самого вектора (виготовлення частково технологічного об’єкта етапу ТП), але й від розгалуженої координатної системи, яка розглядається. Далі проведена деталізація з наявності контраваріантних і коваріантних координат. Можна сказати, що вони є узагальненим зображенням вектора (тензора) у цій системі координат. Йдеться

про векторно-тензорний аналіз в контексті технологічних операцій і тим самим, як наприклад, формальні спроможності в області ТП.

Для того, щоб обчислити довжину вектора a в кожному базисі необхідно перетворити і метричний тензор:

$$g^{(1)} = \begin{bmatrix} g_{11}^{(1)} & g_{12}^{(1)} \\ g_{21}^{(1)} & g_{22}^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

З метою скорочення виконаних обчислень, нижче представлені їх остаточні результати [9], [15], а саме:

$$g_{11}^{(1)} = 1; \quad g_{12}^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad g_{21}^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad g_{22}^{(1)} = 1.$$

Це остаточно, по аналогії з (20), надає змогу обчислити довжину вектора a в новому базисі:

$$\begin{aligned} |a|^2 &= g_{ij}^{(1)} a^{j(1)} a^{i(1)} = \left(g_{11}^{(1)} a^{1(1)} + g_{12}^{(1)} a^{2(1)} \right) a^{1(1)} + \\ &+ \left(g_{21}^{(1)} a^{1(1)} + g_{22}^{(1)} a^{2(1)} \right) a^{2(1)} = \left(3\sqrt{3} - 4 - 3\frac{\sqrt{3}}{2} + 6 \right) \times \\ &\times \left(3\sqrt{3} - 4 \right) + \left(\frac{9}{2} - 2\sqrt{3} - 3 + 4\sqrt{3} \right) \left(-3 + 4\sqrt{3} \right) = \\ &= \frac{27}{2} + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} - 8 - \frac{9}{2} - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} + 24 = 9 + 16 = 25 \end{aligned} \quad (23)$$

Тобто доведено, що в косокутних координатах $|a|^2 = 5$. Таким чином, скалярний добуток і довжина вектора в технологічному трактуванні інваріантні, тобто незмінні при перетворенні координат.

Але в технологічній інтерпретації йдеться про блок змінних (тензорний аналіз) і їх адаптивних версій значень, зокрема, для можливих цілей символічної розв'язки задач, а саме, в спрощенні:

- кути нахилу осей ($\cos \varphi$):
- контраваріантні компоненти вектора:

$$(a^1, a^2, \dots, a^n);$$

- коваріантні компоненти вектора:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n);$$

- зв'язки між вказаними компонентами (координатами).

Висновки з проведеного дослідження ADC

1. Як подальший розвиток попередніх результатів робіт [1]–[5] на основі системного аналізу з інтерпретаційно-формальному підходу в новонауково-технічному напрямку-технологічної інтерпретації уподібнених (доволі зближених, співзвучних), а саме положень векторного та тензорного аналізу. Тобто йдеться про розширення щодо формального поля представлення ТП в концепті “технологічний смисл” (формальна спроможність в області ТП).

2. Інтерпретація ТП, як низки положень і моделей векторного та тензорного просторів (технологічного-векторного та технологічного-тензорного простори).

3. Зазначена інтерпретативна адекватність технологічному перейманню (тлумаченню) контраваріантним і коваріантним координатам вектора (технологічного-контраваріантні і технологічного-коваріантні координати) та зв'язки між ними.

4. Наведений приклад інваріантності укрупнених етапів складного ТП в різних системах координат, тобто незмінності технологічного вектора при перетвореннях його координат.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що вони не мають жодного конфлікту інтересів щодо цього дослідження, включаючи фінансові, особисті, авторські або будь-якого іншого характеру, які могли б вплинути на дослідження та його результати, представлені в цій статті.

Використання штучного інтелекту

Автори підтверджують, що не використовували технології штучного інтелекту при створенні даної роботи.

References

- [1] D. S. Kiva and V. F. Zabashta, “On the fundamental property of polymer composite materials in the context of creating and producing effective structures”, *Technological Systems*, Vol. 3, pp. 45–55, 2015. Available: <https://www.technological-systems.com/index.php/Home/article/view/170G>.
- [2] A. Krivov, Yu. M. Tarasov, A. G. Gromashev and V. F. Zabashta, “Technologies for non-autoclave forming of power structures from polymer composite materials”, *Technological Systems*, Vol. 5, pp. 47–70, 2009. Available: <https://www.technological-systems.com/index.php/Home/article/view/539>.
- [3] D. S. Kiva and V. F. Zabashta, “Composite wing caisson for transport aircraft (structural-technological aspects)”, *Technological Systems*, Vol. 3, pp. 7–31, 2018. Available: <https://www.technological-systems.com/index.php/Home/article/view/144>.
- [4] A. V. Kovalenko, *Research of binders for molding products by pressure impregnation*. VIAM Proceedings, 1, 2019.
- [5] V. F. Zabashta, “Technological preparation of production of composite materials”, *Scientific Encyclopedia Mechanical Engineering*, Vol. 6, pp. 104–142, 2006.

- [6] S. A. Bychkov, A. V. Gaydachuk, A. V. Andreev and Bo. Wang, “Development of new structural-technological solutions for aircraft wings and repair of composite structures”, *Open Information and Polymer Integrated Technologies*, Vol. 86, pp. 76–89, 2019, doi: <https://doi.org/10.32620/%25x>.
- [7] GOST R 58932-2020. *Technological support for the development and production of aircraft. Procedure for the development and content of directive technological materials*.
- [8] D. Kiva and V. Zabashta, “Alternative technologies of composite high-loaded aircraft constructions: a qualitative method of making multicriterial decisions. Part I. Initial stages in the problem of decision-making”, *Mech. Adv. Technol.*, Vol. 5, No. 2, pp. 203–211, Nov. 2021, doi: <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2021.5.2.245000>.
- [9] V. Zabashta, “Alternative technologies of composite highly loaded of aircraft structures: a qualitative method of making multicriteria decisions. Part II. Modeling in multi-criteria evaluation of alternatives”, *Mech. Adv. Technol.*, Vol. 6, No. 2, pp. 203–220, Oct. 2022, doi: <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2022.6.2.265371>.
- [10] V. Zabashta, “Alternative technologies of composite of highly loaded aircraft structures: a qualitative method for making multicriteria decisions: Part III. Research of the methodological basis in decision-making: technological constructions in in the assessment toolki”, *Mech. Adv. Technol.*, Vol. 7, No. 3 (99), pp. 374–388, Dec. 2023, doi: <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2023.7.3.293231>.
- [11] V. Zabashta, “Alternative technologies of composite highly loaded aircraft structures: a qualitative method of making multicriteria decisions. Comprehensive presentation: Part IV. Equilibrium and stability of the dynamic model of the ADS”, *Mech. Adv. Technol.*, Vol. 8, No. 3(102), pp. 316–331, Sep. 2024, doi: [https://doi.org/10.20535/2521-1943.2024.8.3\(102\).302969](https://doi.org/10.20535/2521-1943.2024.8.3(102).302969).
- [12] V. Zabashta, “Formalization of technological processes based on non-Euclidean geometries: spherical and Riemann geometry”, *Mech. Adv. Technol.*, Vol. 9, No. 2(105), pp. 238–253, Jun. 2025, doi: [https://doi.org/10.20535/2521-1943.2025.9.2\(105\).325989](https://doi.org/10.20535/2521-1943.2025.9.2(105).325989).
- [13] L. S. Lisovska et al., *Ensuring synergy of innovative processes at the enterprise*. Lviv: LNU “Lviv Polytechnic”, 103–108.
- [14] D. Pritykin, *Magic of tensor algebra*. Electronic resource, 2015. Available: <https://habr.com/ru/articles/261991/>.
- [15] *Cosine similarity*. Electronic resource. [Online]. Available: <https://www.sciencedirect.com/topics/computer-science/cosine-similarity>.
- [16] M. T. Senkiv, *Vector and tensor analysis. Lecture notes*. Lviv: Ivan Franko Lviv State University, 146 p., 1990.
- [17] S. M. Grebenyuk, Yu. M. Strelyaev and M. I. Klymenko, *Tensor analysis*. Zaporizhzhia: ZNU, 90 p., 2015.
- [18] Zh. V. Khuda, *Lecture notes on the discipline “Fundamentals of vector and tensor analysis”*, Kamianske: DSTU, 2020, 63 p.
- [19] O. V. Nikulin and T. V. Nakonechna, *Fundamentals of vector and tensor calculus*. Dnipropetrovsk: Bila K.O. publishing, 2012, [Online]. Available: <https://www.dstu.dp.ua/Portal/Data/1/5/3-21-b.pdf>.
- [20] G. M. Zrazhevsky and V. F. Zrazhevskya, *Applied vector analysis*. Kyiv: KDU, 142 p., 2023. [Online]. Available: https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2023/01/applied_vector_analysis.pdf.
- [21] L. J. McConnell, *Introduction to tensor analysis with applications to geometry, mechanics, physics*. Moscow: Fizmatgiz, 1963, 221 p. [Online]. Available: <https://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Mak-Konnel1963ru.pdf>.
- [22] M. A. Razumkova, and V. M. Khotyaintseva, *Fundamentals of vector tensor analysis*. Kyiv: KNU, 218 p., 2011. [Online]. Available: https://iht.knu.ua/sites/default/files/ovta-posibnyk_0.pdf.

Formalization of Technological Processes Based on Vector and Tensor Analysis

Volodymyr Zabashta¹

¹ Ukrainian Research Institute of Aviation Technology (UkrRIAT), Kyiv, Ukraine

Abstract. The work further develops the results of studies [1]–[5] based on a systematic analysis using an interpretative-formal approach in a new scientific and technical direction – the technological interpretation of provisions of vector and tensor analysis that are similar in meaning. This allows expanding the formal field of representation of technological processes within the concept of their “technological meaning” and increasing the formal capacity of TP description. The results of research are revealed in the practical and production aspects related to TP, providing for the application of vector and tensor analysis in the coordinate approach, technological space, scalar product, matrix tensor, as well as examples of tensor and vector analysis in composite AKZ technology. It is determined that vectors (tensors) can be specified in different ways, depending on the technological context (polymer composite materials technology – PCM), and the set of components is only its representation in a certain (in terms of detail) basis. A coordinate approach is used, as well as the possibility of other methods of specifying and working with vectors (tensors) using the example of ordinary vectors and simple second-rank tensors, characterized by the powerful idea of orthogonality. Since the second vector and tensor represent real technological objects, including: autonomous dynamic systems (ADS), structural and technological solutions (STS), technological processes (TP), in the form of contravariant and covariant vectors, etc.

The interpretative correspondence of the technological interpretation of contravariant and covariant coordinates of a vector is shown, and the nature of the relationships between technological contravariant and technological covariant coordinates is established.

The example demonstrates the invariance of the enlarged stages of a complex technological process in different coordinate systems, which confirms the invariance of the technological vector under the condition of transformation of its coordinates.

Keywords: vector, tensor, basis, Kronecker symbol, scalar product, cosine similarity, ADS, CTS, TP, PCM.