

Верхня оцінка приведенного тиску та оптимізація параметрів схеми прямого видавлювання деталей з конічною порожниною

А. Є. Грановський¹ - ORCID <https://orcid.org/0009-0006-1657-2232>

Received: 30 October 2025 / Revised: 15 December 2025 / Accepted: 22 December 2025

Анотація. Об'єктом дослідження є процес прямого холодного видавлювання деталей з конічною порожниною. Проблема полягає у відсутності узагальнених аналітичних оцінок приведенного тиску, які одночасно враховують геометрію днища і стінки конічної порожнини, контактне тертя та параметри розбиття осередку деформування і залишаються придатними для інженерного розрахунку.

Метою роботи є розроблення параметричної схеми розбиття осередку деформування та визначення параметрів розбиття, за яких приведений тиск мінімальний.

Осередок поділено на зону стискання і розвертання в області днища та зону обтиснення стінки конічної порожнини; приведений тиск подано сумою внесків цих зон. Для днища отримано замкнені аналітичні вирази для оптимальних геометричних параметрів, для стінки задачу мінімізації зведено до одновимірного пошуку за параметром розбиття при фіксованій кількості подібних трикутних елементів.

Показано, що збільшення відносного радіуса отвору від 0,25 до 0,7 та кута внутрішньої поверхні стінки від 5 до 30 градусів, а також зменшення відносної товщини днища від 1,5 до 0,75 ведуть до зростання приведенного тиску приблизно у 1,5–2 рази. Виявлено порогову залежність від кількості подібних елементів у стінці: для малих відносних радіусів мінімум досягається при одному елементі, тоді як для більших радіусів оптимальна кількість становить від двох до п'яти.

Параметри розбиття не задаються наперед, а визначаються з умов мінімуму приведенного тиску, що дає змогу розглядати розбиття днища та стінки як два кінематичні модулі. Запропонована модель враховує геометрію, тертя та кількість подібних жорстких елементів і може застосовуватися для попереднього проектування процесів видавлювання конічних деталей і комбінованих схем видавлювання.

Ключові слова: пряме видавлювання, конічна порожнина, метод верхньої оцінки, жорсткі трикутні елементи, приведений тиск, кінематичний модуль, оптимізація.

Вступ

Процеси холодного об'ємного штампування посідають важливе місце у сучасному машинобудуванні, оскільки забезпечують високу точність розмірів, якість поверхні та економію матеріалу. Видавлювання є одним із найефективніших методів формоутворення суцільних і порожнистих тонкостінних деталей складної геометрії [1], [2], що широко застосовуються в прила-

добудуванні, автомобілебудуванні та авіаційній техніці. Окремий інтерес становлять порожнисті конічні деталі, для яких характерна різка неоднорідність течії, підвищені втрати на тертя та чутливість до геометрії інструмента і режимних параметрів [3]–[5].

На етапі попереднього проектування таких процесів потрібні швидкі, фізично узгоджені оцінки зусилля та приведенного тиску, які дозволяють звужити простір параметрів до конструктивно й технологічно досяжної області без негайного звернення до ресурсоємних розрахунків методом скінченних елементів. Метод верхньої оцінки (МВО) для плоского деформованого стану із розбиттям осередку деформування на жорсткі трикутні елементи є зручним інструментом одержання інженерних верхніх оцінок, оскільки дає змогу явно врахувати працю пластичної деформації та втрати

¹ Донбаська державна машинобудівна академія,
м. Краматорськ-Тернопіль, Україна,
<https://ror.org/02k14cb26>

✉ А. Є. Грановський
anton.hranovskyi@gmail.com



на тертя на контактах “матеріал–інструмент”. Водночас відомі схеми розбиття, що об’єднуються у кінематичні модулі [6], [7], часто базуються на наперед фіксованих кутах і співвідношеннях відрізків, що обмежує їх придатність для різної геометрії заготовки і інструменту.

У наявних джерелах практично відсутні узагальнені аналітичні вирази для приведенного тиску при видавлюванні порожнистих конічних деталей, які б одночасно враховували геометрію днища та конічної стінки, коефіцієнт тертя й можливість варіювання схеми розбиття осередку деформування [3]–[5], [11]–[15]. Це ускладнює цілеспрямований вибір параметрів процесу й інструмента та вимагає додаткових підходів, що поєднують аналітичну прозорість із гнучким налаштуванням схеми течії матеріалу, заданої розбиттям на жорсткі елементи та годографом швидкостей.

У цій роботі розглянуто процес прямого видавлювання деталі з конічною порожниною, для якого осередок деформування розбивається на жорсткі трикутні елементи в області днища та стінки конічної порожнини; на основі МВО отримано вирази для приведенного тиску, сформульовано задачі його мінімізації за параметрами розбиття та виконано параметричний аналіз впливу основних безрозмірних параметрів.

Окремі часткові результати дослідження попередньо апробовано та оприлюднено у матеріалах наукових конференцій [16], [17]. У даній статті ці результати подано у розширеному та систематизованому вигляді, з повним виведенням розрахункових залежностей і параметричним аналізом.

Аналіз літературних даних та постановка проблеми

У літературі наведено значну кількість теоретичних, експериментальних та чисельно-експериментальних досліджень процесів холодного видавлювання суцільних і порожнистих деталей [8]–[10], зокрема схем формоутворення конічних порожнистих виробів [3]–[5], [11]–[15]. У більшості таких робіт основну увагу зосереджено на **моделюванні методом скінчених елементів (МСЕ)** та аналізі силового режиму, напружено-деформованого стану заготовки й впливу геометричних параметрів інструмента та умов тертя на формоутворення. Отримані результати є практично корисними для конкретних технологічних схем, проте, як правило, прив’язані до фіксованої геометрії заготовки й інструменту і не забезпечують узагальненої аналітичної оцінки приведенного тиску для процесів прямого видавлювання конічних деталей та деталей з конічною порожниною.

У спорідненій роботі [11] застосовано метод балансу потужностей та інженерний метод для аналізу усталеної стадії холодного зворотного видавлювання з роздачею, результати перевірено за допомогою МСЕ-

моделювання. Отримано компактні розрахункові залежності для сили процесу і питомих зусиль, однак розглядається схема зворотного видавлювання циліндричних виробів конічним пуансоном; структура осередку деформування задається наперед і не оптимізується.

У статті [12] початкова стадія видавлювання порожнистих конічних деталей проаналізована методом верхньої оцінки з розбиттям осередку деформації на жорсткі трикутні елементи та побудовою годографів швидкостей. На основі цих схем у середовищі MathCAD виконано числовий пошук оптимальних геометричних параметрів: кути й відрізки в модулях розглядаються як змінні, але оптимальні значення визначаються виключно чисельно. Узагальнених аналітичних виразів для мінімального приведенного тиску та умов екстремуму (через диференціювання і подальшу перевірку) не наведено, а розгляд обмежено початковими стадіями процесу.

Багато публікацій присвячені комбінованому видавлюванню порожнистих конічних деталей з конічних та циліндричних заготовок [3]–[5], [13]–[15], зосереджені переважно на **МСЕ-аналізі** силового режиму, полів напружень та інтенсивностей деформацій. У [3], [4], [13]–[15] розглянуто різні варіанти комбінованого прямого та зворотно-прямого видавлювання, порівнюються форми вихідних заготовок (циліндрична, конічна, конус із наміткою тощо), оцінюється вплив кута конуса, тертя та конструкції попередньо оформленої заготовки на зусилля й якість виробів. У роботі [5] виконано МСЕ-моделювання процесу отримання порожнистих конічних деталей типу «стакан» зі стадійним аналізом формозміни та впливу тертя. Отримані рекомендації стосуються вибору схеми комбінованого процесу та геометрії інструмента, однак поле течії матеріалу визначається чисельно як результат МСЕ-розрахунку; аналітичні вирази для енергосилових параметрів у явному вигляді відсутні.

Окремий напрям становлять роботи, де метод верхньої оцінки застосовується у вигляді **модульних схем із жорсткими трикутними елементами** [6]–[10]. У цих підходах осередок деформування розбивають на універсальні кінематичні модулі, для яких будуються або вже є відомими розрахункові залежності для приведенного тиску. Водночас у відомих схемах зазвичай використовують фіксовані кути ліній зсуву (наприклад, 45°) та жорстко регламентовані співвідношення відрізків у модулі. Це забезпечує компактність формул, але суттєво обмежує гнучкість: при зміні геометричних параметрів інструмента або розмірів заготовки умови наперед заданих оптимальних кутів і відрізків можуть виявитися невиконуваними, і неочевидно, як адаптувати схему без її повної перебудови. Крім того, кількість елементів у конічних ділянках, як правило, задається наперед, а її вплив на рівень приведенного тиску практично не досліджено.

Таким чином, критичний аналіз літератури дозволяє виділити такі не вирішені аспекти. По-перше,

відсутній узагальнений аналітичний вираз для приведенного тиску при прямому видавлюванні порожнистих конічних деталей, який би виходив із параметризованої схеми розбиття осередку деформування і дозволяв розглядати геометрію днища та стінки, коефіцієнт тертя й параметри розбиття як взаємопов'язані змінні. По-друге, існуючі модульні схеми МВО здебільшого спираються на наперед фіксовані кути та співвідношення відрізків, що не завжди дає можливості отримати оптимальні параметри розбиття з умови мінімуму приведенного тиску для заданих розмірів інструмента і заготовки. По-третє, недостатньо висвітлено вплив числа жорстких елементів у конічних ділянках на рівень приведенного тиску й не сформовано рекомендацій щодо вибору кількості елементів для різних діапазонів геометричних і трибологічних параметрів.

Ці обмеження визначають нішу досліджень, що потребує заповнення: необхідна параметрична схема осередку деформування, в якій зони днища та стінки конічної порожнини описуються системою жорстких трикутних елементів із змінними параметрами розбиття, а приведений тиск виражається через безрозмірні геометричні та трибологічні параметри. На основі такої схеми необхідно сформулювати задачі аналітичної і числової оптимізації параметрів розбиття за критерієм мінімуму приведенного тиску та виконати параметричний аналіз впливу основних безрозмірних параметрів, а також оцінити можливість використання окремих частин осередку деформації як кінематичних блоків, придатних для методу кінематичних модулів – саме це реалізовано в цій роботі.

Мета і задачі дослідження

Метою дослідження є розроблення узагальненої параметричної схеми розбиття осередку деформування на жорсткі трикутні елементи та отримання узагальненого аналітичного виразу для приведенного тиску при прямому видавлюванні деталей з конічною порожниною на основі методу верхньої оцінки, а також визначення оптимальних параметрів цієї схеми з урахуванням геометрії заготовки, інструмента та коефіцієнта тертя для мінімізації приведенного тиску.

Це дасть можливість виконувати швидко інженерне оцінювання енергосилових параметрів процесу на етапі попереднього проектування, звужувати область пошуку раціональних геометричних параметрів та трибологічних умов процесу без негайного звернення до трудомістких чисельних розрахунків, підвищити стійкість інструмента та забезпечити стабільну якість виготовлення деталей з конічною порожниною.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі **задачі дослідження**:

1. Проаналізувати існуючі теоретичні та чисельні підходи до розрахунку енергосилових параметрів процесів холодного видавлювання, зокрема порожни-

стих конічних деталей, та виявити обмеження класичних кінематичних схем методу верхньої оцінки (фіксовані кути, жорстко задані співвідношення відрізків).

2. Побудувати узагальнену параметричну схему розбиття осередку деформування при прямому видавлюванні деталі з конічною порожниною, розділивши його на зону стискання і розвертання (днище) та зону обтиснення стінки конічної порожнини, із розбиттям кожної зони на систему жорстких трикутних елементів та побудувати годограф швидкостей.

3. Сформулювати для зони днища вираз для приведенного тиску як функції параметрів розбиття, вивести необхідні умови досягнення екстремуму цієї функції та, по можливості, отримати аналітичні вирази оптимальних значень цих параметрів, перевірити їх на відповідність мінімуму.

4. Для зони обтиснення стінки на основі розбиття на подібні жорсткі трикутні елементи отримати вираз внеску цієї зони в приведений тиск, встановити зв'язки між параметрами розбиття з урахуванням геометричних обмежень, звести задачу до одновимірної мінімізації за одним параметром і визначити оптимальні значення параметрів числовими методами.

5. Представити повний приведений тиск у безрозмірному вигляді через відносні геометричні параметри, кут конічної стінки, коефіцієнт тертя та кількість подібних жорстких елементів у стінці; виконати параметричний аналіз впливу цих факторів на рівень навантаження.

6. На основі отриманих залежностей сформулювати практичні рекомендації щодо вибору геометричних параметрів заготовки та інструмента, а також умов тертя в процесі прямого видавлювання деталей з конічною порожниною для зниження зусиль деформування та підвищення якості виробів.

Наукова новизна роботи полягає в наступному:

- запропоновано узагальнену параметричну схему розбиття осередку деформування на жорсткі трикутні елементи при прямому видавлюванні деталей з конічною порожниною без фіксованих кутів і наперед заданих співвідношень відрізків, у якій геометричні параметри жорстких трикутних елементів визначаються з задачі мінімізації приведенного тиску;

- модифіковано відому схему для зворотного видавлювання циліндричних заготовок [7] і використано її для розбиття зони днища деталі у випадку прямого видавлювання, побудовано новий годограф швидкостей і з урахуванням тертя отримано оптимальні аналітичні вирази параметрів розбиття;

- розроблено нову схему розбиття стінки конічної порожнини на жорсткі трикутні елементи та сформовано вираз для внеску цієї зони в приведений тиск, для якого оптимальні параметри визначаються чисельно з урахуванням геометричних і трибологічних обмежень;

- показано, що отримані оптимізовані схеми для днища та стінки задають два кінематичні модулі з

відомими внесками в приведений тиск, які можуть розглядатися як елементи модульного підходу для комбінованих процесів видавлювання.

Матеріали та методи дослідження

Дослідження виконано в рамках методу верхньої оцінки для плоского деформованого стану в осьовому перерізі осесиметричної задачі жорстко-пластичного, ізотропного, нестисливого матеріалу. Розглядається квазіусталений (умовно стаціонарний) етап прямого видавлювання деталі з конічною порожниною за якого структура осередку деформування та схема течії приймаються незмінними; пружні деформації інструмента не враховуються. Геометрію заготовки, інструмента та готової деталі задано радіусами, початковою висотою, кутом нахилу конічної стінки. Осередок деформування розбивається на жорсткі трикутні елементи у зоні днища та конічної стінки; будується годограф швидкостей, на основі схеми розбиття визначаються довжини ліній зсуву й тертя, на основі годографа швидкостей – відповідні компоненти швидкостей.

У роботі аналіз проводиться в термінах безрозмірного приведенного тиску $\bar{p}$, що визначається за МВО з енергетичного балансу через параметри кінематичної схеми (довжини ліній зсуву/тертя та відповідні швидкості) згідно з (1). Параметр k (напруження текучості при зсуві) у цьому випадку виступає масштабним множителем при переході до абсолютних значень тиску та зусилля. Для холодного деформування зі зміцненням перехід до тиску p та зусилля видавлювання P може виконуватися із використанням середнього значення опору деформації, визначеного за кривою течії (зміцнення) матеріалу залежно від середньої інтенсивності (еквівалентної) деформації; зазначений етап виходить за межі даної роботи, оскільки її мета – оптимізація параметрів кінематичної схеми та аналіз впливу геометрії й тертя на приведений тиск $\bar{p}$.

Вираз для приведенного тиску отримано з умови рівності потужності зовнішніх сил сумі потужностей пластичної деформації та тертя. У рамках запропонованої схеми приведений тиск подано як функцію параметрів розбиття $h_0 \dots h_4$ та геометричних і трибологічних параметрів процесу; далі введено безрозмірні змінні $\bar{r}_p$, $\bar{h}$, $\bar{H}_0$, що дає змогу провести параметричний аналіз.

Аналітичні перетворення, символічне диференціювання, формування градієнтів та матриці Гессе для внеску $\bar{p}_1$, розв'язання систем умов екстремуму та перевірка критерія Сильвестра виконувалися в системі комп'ютерної алгебри **Maple**. У **Maple** також реалізовано числове розв'язання алгебраїчних рівнянь для висоти стінки конічної порожнини, обчислення $\bar{p}_2(h_4, n)$ та одновимірну мінімізацію за параметром h_4 у допустимій області з контролем умов фізичної коректності.

Числові розрахунки приведенного тиску для наборів безрозмірних параметрів $\bar{r}_p, \bar{h}, \alpha, \mu, n$ виконано в **Maple** у вигляді таблиць; отримані дані експортовано до **Microsoft Excel** для подальшої обробки та побудови графіків залежностей $\bar{p} = \bar{p}(\bar{r}_p)$, $\bar{p} = \bar{p}(\bar{h})$, $\bar{p} = \bar{p}(\alpha)$, $\bar{p} = \bar{p}(n)$.

Результати дослідження процесу прямого видавлювання деталей з конічною порожниною

Далі виклад основного матеріалу подано у чотирьох послідовних кроках: розклад приведенного тиску $\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2$ на внески базової зони (днище) та конічної стінки; аналітична оптимізація параметрів h_0, h_1, h_2 для $\bar{p}_1$; використання подібності жорстких елементів у стінці та отримання зв'язку $h_3(h_4)$; зведення оптимізації внеску стінки до одновимірної задачі за параметром h_4 з явними умовами допустимості та підготовка розрахункової формули для подальшого графічного аналізу.

Розрахункова схема та енергетична постановка

Схему прямого видавлювання та готову деталь із третинним вирізом наведено на рис. 1.

Позначення: R_0 – радіус заготовки, H_0 – висота заготовки; r_m – радіус отвору матриці; $R_{h.p.}$ – радіус верхнього рухомого пуансона; h – товщина днища деталі; H_1 – висота стінки конічної порожнини, H – загальна висота деталі після видавлювання; r_p – радіус меншої основи нерухомого протипуансону; r_k – радіус більшої основи конічної порожнини; r_1 – радіус заокруглення кромки меншої основи протипуансону; α – кут нахилу бічної поверхні протипуансону (кут нахилу внутрішньої поверхні стінки деталі); s – хід верхнього пуансона.

У розглянутій схемі радіус заготовки дорівнює радіусу отвору матриці та радіусу верхнього пуансону: $R_0 = r_m = R_{h.p.}$

Для визначення приведенного тиску осесиметричну задачу зведено до плоского деформованого стану в осьовому перерізі (ПДС) і використано метод верхньої оцінки. Права частина осередку деформування (рис. 1, а) розбита на жорсткі трикутні елементи; відповідно побудовано годограф швидкостей (рис. 2, б). Розрахункова схема з трикутними елементами подана на рис. 2, а.

Осередок деформування складається з трьох зон:

- **зона стискання** (жорсткі елементи 1 та 2);
- **зона розвертання потоку** (жорсткі елементи 1, 3 і частина елемента 4);

- зона обтиснення стінки (жорсткі елементи 5–9 та частина елемента 4).

Відповідно до МВО при плоскому деформованому стані умова рівності потужності зовнішніх та внутрішніх сил дає вираз для приведенного тиску [18]:

$$\bar{p} = \frac{1}{2Bv_0} \left[\sum_1^n l_{ij} v_{ij} + 2\mu \sum_1^n l_{ik} v_{ik} \right], \quad (1)$$

де $B = r_m$ – довжина лінії контакту заготовки та інструменту;

v_0 – швидкість інструменту;

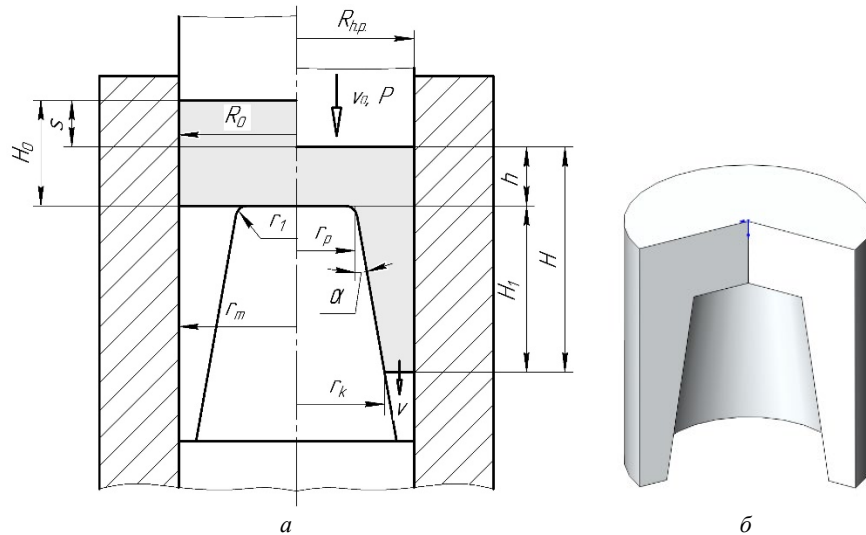


Рис. 1. Схема видавлювання (а) і деталь після видавлювання із третинним вирізом (б)

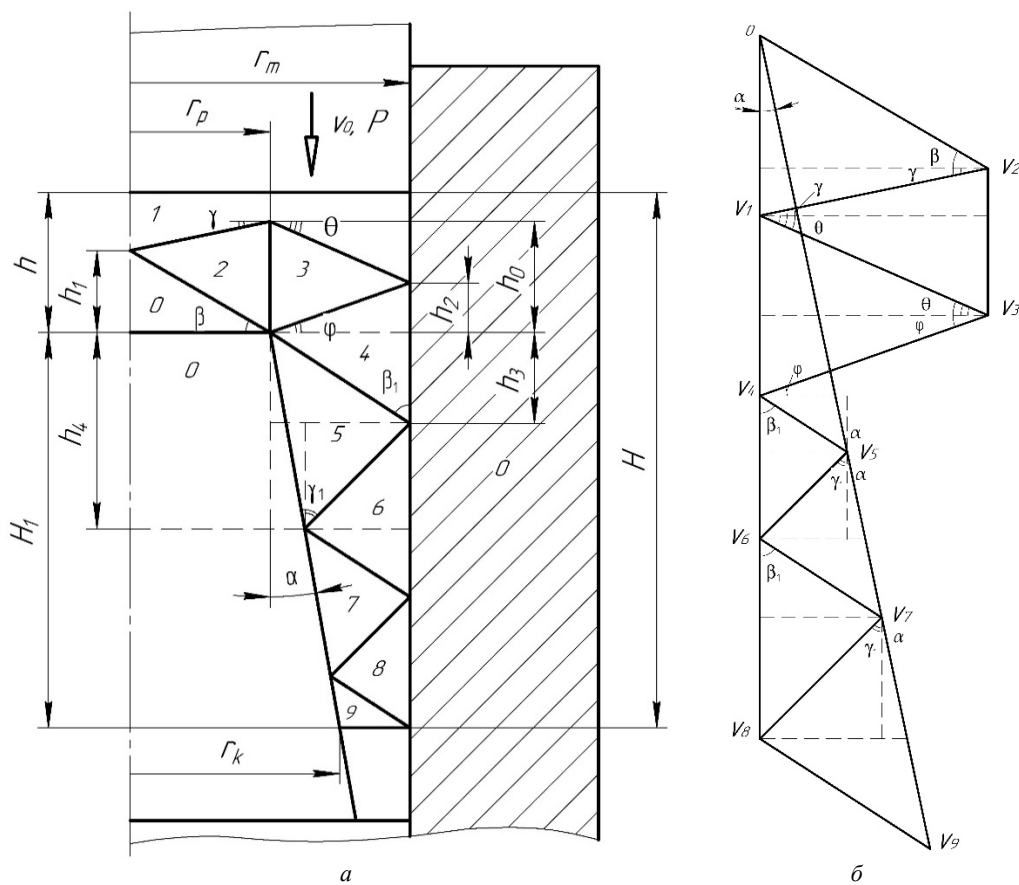


Рис. 2. Розрахункова схема процесу видавлювання (а) і графік швидкостей (б). Примітка. Товсті суцільні лінії – лінії і швидкості зсуву, тонкі пунктирні – допоміжні відрізки.

l_{ij} та l_{ik} – довжини ліній зсуву і тертя;

v_{ij} та v_{ik} – компоненти швидкостей зсуву і тертя;

μ – коефіцієнт тертя.

Розклад приведенного тиску за зонами та параметризація схеми

Згідно з розрахунковою схемою (рис. 2, а) вводяться змінні параметри h_0, h_1, h_2, h_3, h_4 , які визначають геометрію жорстких елементів, трикутників годографу і, відповідно, впливають на величину приведенного тиску. Для деяких відрізків маємо, зокрема:

$$l_{23} = h_0, \quad l_{04} = h_2 + h_3, \quad l_{05} = \frac{h_4}{\cos \alpha}.$$

Таким чином

$$\bar{p} = f(h_0, h_1, h_2, h_3, h_4). \quad (2)$$

З урахуванням виділених зон (днище + стінка) приведений тиск зручно подати як суму двох внесків:

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2, \quad (3)$$

де $\bar{p}_1$ – внесок зони стискання та розвертання потоку; $\bar{p}_2$ – внесок зони обтиснення стінки конічної порожнини.

Після підстановки довжин ліній та швидкостей ковзання (отриманих із геометричних співвідношень та годографа швидкостей на рис. 2 б) з урахуванням (3) вираз (2) набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \bar{p} = & \frac{1}{2r_m v_{01}} [l_{02} v_{02} + l_{12} v_{12} + h_0 v_{23} + l_{13} v_{13} + \\ & + l_{34} v_{34} + 2\mu h_2 v_{04}] + \\ & + \frac{1}{2r_m v_{01}} [l_{45} v_{45} + l_{56} v_{56} + l_{67} v_{67} + \\ & + l_{78} v_{78} + l_{89} v_{89} + \\ & + 2\mu \left(h_3 v_{04} + \frac{h_4}{\cos \alpha} v_{05} + l_{06} v_{06} + \right. \\ & \left. + l_{07} v_{07} + l_{08} v_{08} + l_{09} v_{09} \right)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Оптимізація параметрів зони стискання і розвертання

Довжини ліній ковзання розраховуються з відповідних прямокутних трикутників через величини h_0, h_1 і h_2 (рис. 2, а). Кути в даному випадку можуть бути виражені через тригонометричні функції, як співвідношення сторін трикутних елементів і параметрами, що задаються:

$$\tan \beta = \frac{h_1}{r_m}, \quad \tan \gamma = \frac{h_0 - h_1}{r_p}, \quad \tan \theta = \frac{h_0 - h_2}{r_m - r_p}, \quad \tan \varphi = \frac{h_2}{r_m - r_p}.$$

Для визначення швидкостей ковзання зроблено додаткові побудовання на годографі швидкостей (рис. 2, б), початкова швидкість v_{01} задавалася довільно.

Результати розрахунку довжини граничних ліній і швидкостей ковзання приведено у табл. 1.

Таблиця 1. Довжини граничних ліній і швидкості ковзання зони стискання і розвертання

ij	Довжина граничної лінії l_{ij}	Швидкість ковзання v_{ij}
0–2	$\sqrt{r_p^2 + h_1^2}$	$\frac{v_{01}}{h_0} \sqrt{r_p^2 + h_1^2}$
1–2	$\sqrt{r_p^2 + (h_0 - h_1)^2}$	$\frac{v_{01}}{h_0} \sqrt{r_p^2 + (h_0 - h_1)^2}$
2–3	h_0	$\frac{v_{01}}{h_0} \left[\frac{r_m (h_0 - h_1) + r_p (h_1 - h_2)}{r_m - r_p} \right]$
1–3	$\sqrt{(r_m - r_p)^2 + (h_0 - h_2)^2}$	$\frac{v_{01} r_p}{h_0 (r_m - r_p)} \cdot \sqrt{(r_m - r_p)^2 + (h_0 - h_2)^2}$
3–4	$\sqrt{(r_m - r_p)^2 + h_2^2}$	$\frac{v_{01} r_p}{h_0 (r_m - r_p)} \sqrt{(r_m - r_p)^2 + h_2^2}$
0–4	h_2	$\frac{v_{01} r_m}{r_m - r_p}$

Після підстановки цих величин у (4) та спрощення отримано вираз для $\bar{p}_1$:

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 = & \frac{1}{2r_m} \left[\frac{2r_p^2 + h_1^2 + (h_0 - h_1)^2}{h_0} + \right. \\ & + \frac{r_m (h_0 - h_1) + r_p (h_1 - h_2)}{r_m - r_p} + \\ & + \frac{r_p \left[2(r_m - r_p)^2 + (h_0 - h_2)^2 + h_2^2 \right]}{h_0 (r_m - r_p)} + \\ & \left. + 2\mu \frac{r_m}{r_m - r_p} h_2 \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Оптимальні значення h_0, h_1, h_2 визначаються з умови мінімуму $\bar{p}_1$. Для цього складається система умов екстремуму:

$$\nabla_{\mathbf{h}_a} \bar{p}_1(\mathbf{h}_a) = 0, \quad \mathbf{h}_a = (h_0, h_1, h_2) \quad (6)$$

де $\nabla_{\mathbf{h}}$ - градієнт за вектором змінних $\mathbf{h}_a$.

Обчисливши часткові похідні, систему (6) можна записати у вигляді:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{h_0^2} \left(h_1^2 + \frac{r_p h_2^2}{r_m - r_p} + r_m r_p \right) - \frac{r_m}{r_m - r_p} = 0, \\ \frac{4h_1}{h_0} - 3 = 0, \\ \frac{4r_p h_2}{h_0} - 3r_p + 2\mu r_m = 0. \end{array} \right. \quad (7)$$

Звідси безпосередньо отримуємо залежності для h_1 і h_2 записані через h_0 : $h_1 = \frac{3h_0}{4}$; $h_2 = \frac{3h_0}{4} - \frac{\mu r_m h_0}{2r_p}$.

Після підстановки значення h_1 і h_2 у перше рівняння системи (7) і проведення обчислень і спрощень отримаємо остаточні вирази для визначення оптимальних параметрів $h_0 \dots h_2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_0 = 4r_p \sqrt{\frac{\frac{r_m}{r_p} - 1}{(12\mu + 7) - 4\mu^2 \frac{r_m}{r_p}}}, \\ h_1 = 3r_p \sqrt{\frac{\frac{r_m}{r_p} - 1}{(12\mu + 7) - 4\mu^2 \frac{r_m}{r_p}}}, \\ h_2 = r_p \left(3 - 2\mu \frac{r_m}{r_p} \right) \sqrt{\frac{\frac{r_m}{r_p} - 1}{(12\mu + 7) - 4\mu^2 \frac{r_m}{r_p}}}. \end{array} \right. \quad (8)$$

Для підтвердження того, що знайдений стаціонарний пункт відповідає мінімуму, побудовано матрицю Гессе [19] функції:

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial h_0^2} & \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial h_0 \partial h_1} & \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial h_0 \partial h_2} \\ \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial h_1 \partial h_0} & \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial h_1^2} & \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial h_1 \partial h_2} \\ \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial h_2 \partial h_0} & \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial h_2 \partial h_1} & \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial h_2^2} \end{bmatrix}.$$

За критерієм Сильвестра [19] для трьох головних мінорів перевірено додатну визначеність матриці:

$$\Delta_1 = G_{11} = \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial h_0^2} > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial h_0^2} & \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial h_0 \partial h_1} \\ \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial h_1 \partial h_0} & \frac{\partial^2 \bar{p}_1}{\partial h_1^2} \end{bmatrix} > 0;$$

$$\Delta_3 = \det(G) > 0.$$

Отримано, що

$$\Delta_1 = \frac{2}{r_m h_0^3} \left(h_1^2 + \frac{r_p h_2^2}{r_m - r_p} + r_m r_p \right);$$

$$\Delta_2 = \frac{4}{r_m^2 h_0^4} \left(\frac{r_p h_2^2}{r_m - r_p} + r_m r_p \right); \Delta_3 = \frac{8r_p^2}{r_m^2 h_0^5 (r_m - r_p)}.$$

Для додатності цих виразів і фізичної коректності розв'язку з урахуванням (8) мають виконуватися умови:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_0, h_1, h_2 > 0; r_m > r_p > 0; \frac{r_m}{r_p} - 1 > 0; \\ (12\mu + 7) - 4\mu^2 \frac{r_m}{r_p} > 0; 3 - 2\mu \frac{r_m}{r_p} > 0. \end{array} \right. \quad (9)$$

Оптимізація параметрів зони обтиснення стінки

Схема розбиття стінки (рис. 2, а) задана так, що $l_{45} \parallel l_{67}$, $l_{67} \parallel l_{89}$ і $l_{56} \parallel l_{78}$, що забезпечує подібність трикутних жорстких елементів і відповідних трикутників годографа швидкостей. Виділяються дві групи подібних елементів:

- перша – елементи 5 і 7;
- друга – елементи 6 і 8, які мають спільні сторони.

Коефіцієнт подібності λ для геометрії жорстких трикутних елементів визначається як відношення відповідних сторін жорстких елементів відповідних груп:

$$\lambda = \frac{r_m - r_p - h_4 \tan \alpha}{r_m - r_p}. \quad (10)$$

Довжини ліній ковзання l_{45} , l_{56} , l_{05} знаходяться з прямокутних трикутників, отриманих при додаткових побудовах. При цьому, виходячи з рис. 2, а:

$$\tan \beta_1 = \frac{r_m - r_p}{h_3}; \tan \gamma_1 = \frac{r_m - r_p - h_4 \tan \alpha}{h_4 - h_3}.$$

Решта довжин ліній ковзання знаходяться з умов подібності трикутників. Важливою умовою розбиття стінки на подібні модулі є:

$$H_1 = h_3 \lambda^n + h_4 \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda},$$

де n – кількість подібних трикутних елементів.

Звідси:

$$h_3 = \frac{H_1 - h_4 \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda}}{\lambda^n}. \quad (11)$$

Висоту конічної стінки H_1 визначають, виходячи з умови рівності об'ємів заготовки та деталі після видавлювання. Об'єм циліндричної заготовки:

$$V_0 = \pi r_m^2 H_0,$$

а об'єм деталі:

$$V_d = V_1 + (V_c - V_k),$$

де $V_1 = \pi r_m^2 h$ – об'єм циліндра днища деталі висотою h ;

$V_c = \pi r_m^2 H_1$ – об'єм циліндра радіусом r_m і висотою H_1 ;

$$V_k = \frac{\pi H_1 (r_k^2 + r_p r_k + r_p^2)}{3} - \text{об'єм конічної порожнини};$$

$r_k = H_1 \tan \alpha + r_p$ – радіус більшої основи конічної порожнини.

Після підстановки й спрощень одержуємо кубічне рівняння відносно H_1 :

$$\frac{\pi}{3} \tan^2 \alpha H_1^3 + \pi r_p \tan \alpha H_1^2 - (\pi r_m^2 - \pi r_p^2) H_1 + \pi r_m^2 H_0 - \pi r_m^2 h = 0. \quad (12)$$

Розв'язавши (12) щодо H_1 , далі підставляємо H_1 у (11), що дає залежність $h_3(h_4, \lambda, n)$ для використання в оптимізації $\bar{p}_2$.

Групи подібних трикутників годографа швидкостей: перша – трикутники $v_4 v_5 v_6$ та $v_6 v_7 v_8$, друга – $v_5 v_6 v_7$ та $v_7 v_8 v_9$. Швидкості ковзання v_{45} , v_{56} , v_{05} знаходяться з прямокутних трикутників, отриманих при додаткових побудовах (рис. 2, б). Коефіцієнт подібності для швидкостей можна знайти наступним чином:

$$\lambda_v = \frac{v_{06}}{v_{04}} = \frac{r_m - r_p}{r_m - r_p - h_4 \tan \alpha}. \quad (13)$$

Решта швидкостей визначаються з подібності трикутників. Результати розрахунку довжин граничних ліній і швидкостей ковзання для зони обтиснення наведено в табл. 2.

Таблиця 2. Довжини граничних ліній і швидкостей ковзання зони обтиснення

ij	Довжина граничної лінії l_{ij}	Швидкість ковзання v_{ij}
4-5	$\sqrt{(r_m - r_p)^2 + h_3^2}$	$\frac{v_{04} \tan \alpha}{r_m - r_p - h_3 \tan \alpha} \cdot \sqrt{(r_m - r_p)^2 + h_3^2}$
0-4	h_3	$\frac{v_{01} r_m}{r_m - r_p}$
5-6	$\frac{\sqrt{(h_4 - h_3)^2 + (r_m - r_p - h_4 \tan \alpha)^2}}{(r_m - r_p - h_4 \tan \alpha)^2}$	$\frac{v_{04} \tan \alpha (r_m - r_p)}{r_m - r_p - h_3 \tan \alpha} \cdot \frac{\sqrt{(r_m - r_p - h_4 \tan \alpha)^2 + (h_4 - h_3)^2}}{r_m - r_p - h_4 \tan \alpha}$
0-5	$\frac{h_4}{\cos \alpha}$	$\frac{v_{04}}{\cos \alpha} \cdot \frac{r_m - r_p}{r_m - r_p - h_3 \tan \alpha}$
0-6	$h_4 \frac{r_m - r_p - h_3 \tan \alpha}{r_m - r_p}$	$v_{04} \left[\frac{r_m - r_p}{r_m - r_p - h_4 \tan \alpha} \right]$
6-7	$\lambda \sqrt{(r_m - r_p)^2 + h_3^2}$	$\lambda_v \frac{v_{04} \tan \alpha}{r_m - r_p - h_3 \tan \alpha} \cdot \sqrt{(r_m - r_p)^2 + h_3^2}$
0-7	$\lambda \frac{h_4}{\cos \alpha}$	$\frac{\lambda_v v_{04}}{\cos \alpha} \cdot \frac{r_m - r_p}{r_m - r_p - h_3 \tan \alpha}$
7-8	$\frac{\lambda \sqrt{(h_4 - h_3)^2 + (r_m - r_p - h_4 \tan \alpha)^2}}{(r_m - r_p - h_4 \tan \alpha)^2}$	$\lambda_v \frac{v_{04} \tan \alpha (r_m - r_p)}{r_m - r_p - h_3 \tan \alpha} \cdot \frac{\sqrt{(r_m - r_p - h_4 \tan \alpha)^2 + (h_4 - h_3)^2}}{r_m - r_p - h_4 \tan \alpha}$
0-8	$\lambda h_4 \frac{r_m - r_p - h_3 \tan \alpha}{r_m - r_p}$	$\lambda_v v_{04} \left[\frac{r_m - r_p}{r_m - r_p - h_4 \tan \alpha} \right]$
8-9	$\lambda^2 \sqrt{(r_m - r_p)^2 + h_3^2}$	$\lambda_v^2 \frac{v_{04} \tan \alpha}{r_m - r_p - h_3 \tan \alpha} \cdot \sqrt{(r_m - r_p)^2 + h_3^2}$
0-9	$\frac{h_3}{\cos \alpha} \lambda^2$	$\frac{\lambda_v^2 v_{04}}{\cos \alpha} \cdot \frac{r_m - r_p}{r_m - r_p - h_3 \tan \alpha}$

З урахуванням подібності елементів, внесок стінки у приведенний тиск можна записати як

$$\bar{p}_2 = \frac{1}{2 r_m v_{01}} [l_{45} v_{45} + l_{56} v_{56} + \lambda l_{45} \lambda_v v_{45} + \lambda l_{56} \lambda_v v_{56} + \lambda^2 l_{45} \lambda_v^2 v_{45} + 2 \mu (h_3 v_{04} + l_{05} v_{05} + l_{06} v_{06} + \lambda l_{05} \lambda_v v_{05} + \lambda l_{06} \lambda_v v_{06} + l_{09} \lambda_v^2 v_{05})]. \quad (14)$$

З урахуванням (10) і (13) отримуємо, що

$$\lambda\lambda_v = \frac{r_m - r_p - h_4 \tan \alpha}{r_m - r_p} \cdot \frac{r_m - r_p}{r_m - r_p - h_4 \tan \alpha} = 1,$$

вираз (14) спрощується, і з урахуванням подібності та кількості жорстких елементів n маємо:

$$\bar{p}_2 = \frac{1}{2r_m v_{01}} \left[(n+1)l_{45}v_{45} + nl_{56}v_{56} + 2\mu \left(h_3 v_{04} + nl_{05}v_{05} + nl_{06}v_{06} + \frac{h_3}{\cos \alpha} v_{05} \right) \right]. \quad (15)$$

Після підстановки даних з табл. 2 у (15) та спрощення отримано вираз $\bar{p}_2(h_3, h_4, n)$ у вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{p}_2 = & \frac{1}{2} \left[\frac{(n+1) \tan \alpha \left[(r_m - r_p)^2 + h_3^2 \right]}{(r_m - r_p)(r_m - r_p - h_3 \tan \alpha)} + \right. \\ & + \frac{n \tan \alpha \left[(r_m - r_p - h_4 \tan \alpha)^2 + (h_4 - h_3)^2 \right]}{(r_m - r_p - h_3 \tan \alpha)(r_m - r_p - h_4 \tan \alpha)} + \\ & + 2\mu \left(\frac{h_3}{r_m - r_p} + \frac{nh_4}{r_m - r_p} \cdot \frac{r_m - r_p - h_3 \tan \alpha}{r_m - r_p - h_4 \tan \alpha} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{nh_4 + h_3}{r_m - r_p - h_3 \tan \alpha} \right) \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

З урахуванням (11) і (16) отримуємо вираз $\bar{p}_2(h_4, n)$ через єдиний параметр h_4 та дискретний параметр n . Для існування фізично коректного розв'язку необхідно:

$$\begin{aligned} r_m - r_p - h_3 \tan \alpha > 0; r_m - r_p - h_4 \tan \alpha > 0; \\ \frac{r_m - r_p - h_4 \tan \alpha}{r_m - r_p} \neq 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Через алгебраїчну громіздкість похідної $\frac{\partial \bar{p}_2}{\partial h_4}$ закритий аналітичний вираз для оптимального h_4 відсутній; мінімум $\bar{p}_2(h_4, n)$ визначається чисельно на допустимій області $0 < h_4 < \frac{r_m - r_p}{\tan \alpha}$ із контролем наведених вище умов (17).

Повний вираз приведенного тиску та безрозмірна форма

Додаючи (5) та (16), одержуємо загальний вираз для приведенного тиску процесу прямого видавлювання:

$$\begin{aligned} \bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = & \frac{1}{2r_m} \left[\frac{2r_p^2 + h_1^2 + (h_0 - h_1)^2}{h_0} + \right. \\ & + \frac{r_m(h_0 - h_1) + r_p(h_1 - h_2)}{r_m - r_p} + \\ & + \frac{r_p \left[2(r_m - r_p)^2 + (h_0 - h_2)^2 + h_2^2 \right]}{h_0(r_m - r_p)} + \\ & + 2\mu \frac{r_m}{r_m - r_n} h_2 \left. \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(n+1) \tan \alpha \left[(r_m - r_p)^2 + h_3^2 \right]}{(r_m - r_p)(r_m - r_p - h_3 \tan \alpha)} + \right. \\ & + \frac{n \tan \alpha \left[(r_m - r_p - h_4 \tan \alpha)^2 + (h_4 - h_3)^2 \right]}{(r_m - r_p - h_3 \tan \alpha)(r_m - r_p - h_4 \tan \alpha)} + \\ & + 2\mu \left(\frac{h_3}{r_m - r_p} + \frac{nh_4}{r_m - r_p} \cdot \frac{r_m - r_p - h_3 \tan \alpha}{r_m - r_p - h_4 \tan \alpha} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{nh_4 + h_3}{r_m - r_p - h_3 \tan \alpha} \right) \right]. \quad (18) \end{aligned}$$

де $\bar{p}_1$ визначається (5) з оптимальними параметрами (8), а $\bar{p}_2$ – виразом (18) із урахуванням залежності $h_3(h_4, \lambda, n)$ і умов (17).

Остаточні умови фізичної коректності розв'язку можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} 1 < \frac{r_m}{r_p} < \frac{3}{2\mu}, h_0 > 0, h_1 > 0, h_2 > 0, h_3 < \frac{r_m - r_p}{\tan \alpha}, \\ h_4 < \frac{r_m - r_p}{\tan \alpha}, h_4 \neq 0, \alpha \neq 0, \alpha \neq \frac{\pi}{2}, \mu < \frac{3r_p}{2r_m}. \end{aligned} \quad (19)$$

Введемо безрозмірні параметри: $\bar{r}_p = r_p / R_0$, $\bar{h} = h / R_0$, $\bar{H}_0 = H_0 / R_0$, а також безрозмірні висоти $\bar{h}_i = h_i / R_0$, $i=0, 1, 2, 3, 4$.

У цих позначеннях розрахункову формулу для приведенного тиску можна записати у безрозмірній формі:

$$\bar{p} = \bar{p}(\bar{r}_p, \bar{h}_0, \bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4, \alpha, \mu, n), \quad (20)$$

де явний вигляд безрозмірних доданків відповідає нумруванню виразів (5) та (18) на R_0 .

Таким чином, оптимальне значення приведенного тиску можна обчислити за формулою (20) після знаходження оптимальних параметрів та числа подіб-

них трикутних елементів у стінці. На основі цих виразів сформовано безрозмірні залежності $\bar{p}$ від $\bar{r}_p$, $\bar{h}$, μ , α та n . Всі дослідження зроблені в межах $h > h_0$. Графічні залежності за виразом (20) наведено на рис. 3-7. Аналіз графічних залежностей наведено у наступному розділі.

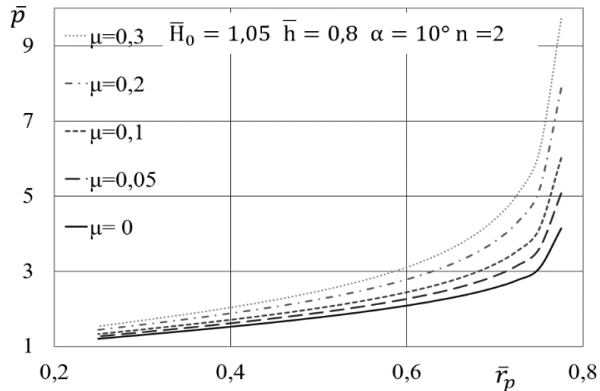


Рис. 3. Залежність приведенного тиску $\bar{p}$ від відносного радіуса $\bar{r}_p$ при різних значеннях коефіцієнта тертя μ

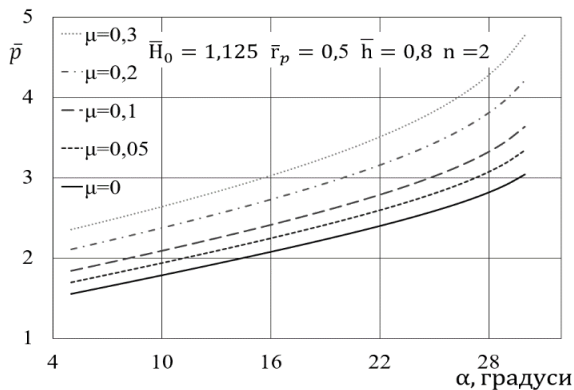


Рис. 4. Залежність приведенного тиску $\bar{p}$ від кута нахилу бічної поверхні протипансону α при різних значеннях коефіцієнта тертя μ

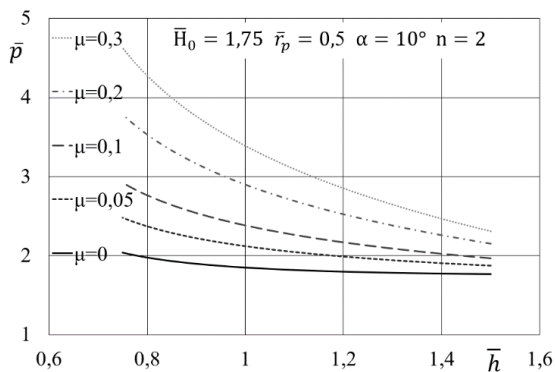


Рис. 5. Залежність приведенного тиску $\bar{p}$ від відносної висоти днища $\bar{h}$ при різних значеннях коефіцієнта тертя μ

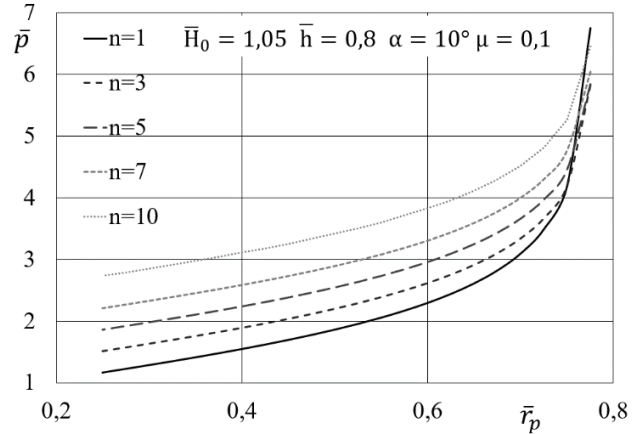


Рис. 6. Залежність приведенного тиску $\bar{p}$ від відносного радіуса $\bar{r}_p$ при різних кількості модулів n

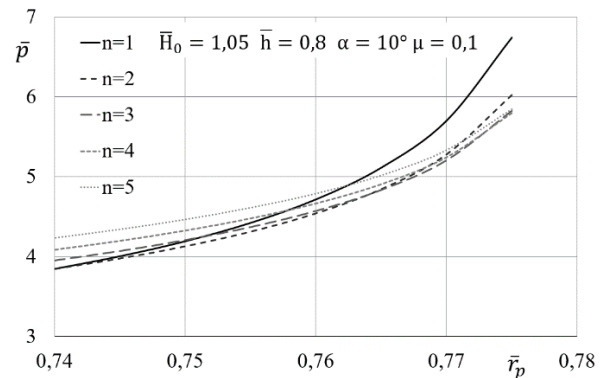


Рис. 7. Залежність приведенного тиску $\bar{p}$ від $\bar{r}_p \in [0.74; 0.775]$ при $n = 1 \dots 5$

Аналіз та обговорення результатів

Вплив основних параметрів

Подальший параметричний аналіз показав узгоджену з фізикою поведінку приведенного тиску $\bar{p}$.

(а) Відносний радіус $\bar{r}_p$

За фіксованого r_m збільшення $\bar{r}_p$ зменшує площу отвору для витікання матеріалу. Це концентрує деформацію в області днища і одночасно призводить до стоншення стінки та збільшення її деформації. У формулах для довжин ліній зсуву і швидкостей (див. (20)) це проявляється збільшенням відповідних величин.

Кількісно, на широкому інтервалі $\bar{r}_p = 0.25 \dots 0.6$ приведений тиск при $\mu = 0.1$ зростає з 1,3 до 2,5, а при $\mu = 0.3$ – з 1,5 до 3,1. Це відповідає усередненому приросту порядку 39–46 % на кожні 0,12 зміни $\bar{r}_p$. На наступній, набагато коротшій ділянці $\bar{r}_p = 0.6 \dots 0.75$ локальна чутливість зростає: при $\mu = 0.1$ збільшується з 2,5

до 4 ($\approx 60\%$), а при $\mu=0,3$ – з 3,1 до 6 ($\approx 93\%$) за $\Delta\bar{r}_p = 0,15$. Тобто приріст за майже той самий крок стає істотно більшим, ніж на інтервалі 0,25...0,6.

При подальшому збільшенні радіуса, $\bar{r}_p = 0,75...0,775$ спостерігається різке посилення впливу: для $\mu=0,1$ зростає з 4 до 6,0 ($\approx 50\%$), а для $\mu=0,3$ – з 6 до 9,8 ($\approx 63\%$) на інтервалі $\Delta\bar{r}_p = 0,075$, що в два рази менше попереднього. Це означає, що поблизу порогового значення $\bar{r}_p^* \approx 0,75$ «швидкість» росту приведенного тиску різко збільшується порівняно з областю малих радіусів. Для більших коефіцієнтів тертя всі зазначені прирости ще більші, тобто чутливість приведенного тиску посилюється зі зростанням тертя.

(б) Кут нахилу внутрішньої поверхні стінки α

Зі збільшенням кута α зростає радіальна складова течії матеріалу в стінці, подовжуються лінії зсуву та контактні ділянки, що підсилює як пластичні, так і контактні втрати. На проміжку $\alpha = 5...25^\circ$ приведений тиск при $\mu = 0,1$ зростає з 1,8 до 2,85, а при $\mu=0,3$ – з 2,4 до 3,8. Тобто у цьому діапазоні збільшення кута на кожні 5° дає усереднений приріст $\bar{p}$ порядку 12%. Подальше збільшення кута до $\alpha=30^\circ$ призводить до суттєво більшого і відчутного приросту: при $\mu = 0,1$ приведений тиск змінюється з 2,85 до 3,7 ($\approx 30\%$), а при $\mu = 0,3$ – з 3,8 до 4,8 ($\approx 26\%$). Тобто приріст за той самий крок стає істотно більшим. Для більших коефіцієнтів тертя μ прирости $\bar{p}$ у тих самих кутових інтервалах вищі, тобто вплив α посилюється зі збільшенням тертя.

(в) Коефіцієнт тертя μ

Зростання μ прямо підсилює контактні доданки у виразі для приведенного тиску, що відповідають потужності сил тертя на контактах «матеріал–інструмент». У всьому дослідженому діапазоні параметрів збільшення μ веде до підвищення $\bar{p}$; характер кривих зберігається, відбувається практично паралельний зсув вгору.

(г) Відносна товщина днища $\bar{h}$

Зменшення $\bar{h}$ означає меншу остаточну товщину днища при цьому збільшується робота деформації у зоні днища та зростає висота стінки H_1 , тобто більша частка формозміни переноситься на стінку. Це змінює оптимальні параметри розбиття h_3, h_4 таким чином, що в (20) зростають як швидкості ковзання, так і довжини ліній тертя. У результаті приведений тиск зростає при зменшенні $\bar{h}$.

При зменшенні $\bar{h}$ з 1,5 до 1,0 приведений тиск при $\mu = 0,1$ зростає з 2,0 до 2,4 ($\approx 20\%$), а при $\mu=0,3$ – з 2,37 до 3,4 ($\approx 43\%$). Отже, уже на цьому етапі змен-

шення товщини днища на третину дає приріст $\bar{p}$ від помірного (для малого тертя) до досить значного (для більшого тертя). Подальше зменшення $\bar{h}$ з 1,0 до 0,75 проявляється ще виразніше. Для $\mu=0,1$ $\bar{p}$ збільшується з 2,4 до 2,95 ($\approx 23\%$), тоді як для $\mu=0,3$ – з 3,4 до 4,65 ($\approx 37\%$). Таким чином, зменшення $\bar{h}$ у діапазоні 1,5...0,75 дає сумарне зростання $\bar{p}$ приблизно в 1,5 рази для малого тертя і майже вдвічі для більшого, причому внесок тертя стає тим відчутнішим, чим тонше днище.

Узагальнюючи, найбільшу відносну чутливість $\bar{p}$ демонструє до відносного радіуса $\bar{r}_p$, особливо поблизу порогового значення $\bar{r}_p^* \approx 0,745$, де навіть невеликі зміни радіуса спричиняють різке зростання приведенного тиску. Вплив кута α та коефіцієнта тертя μ є значним і порівняного порядку, а вплив відносної товщини днища $\bar{h}$ є помірним, але стабільним за напрямом: у всьому дослідженому діапазоні $\bar{p}$ зростає зі зменшенням $\bar{h}$.

Вплив кількості подібних жорстких елементів n та порогова поведінка

Окремий інтерес становить вплив кількості подібних жорстких елементів n у стінці конічної порожнини. Параметричний аналіз продемонстрував порогову поведінку $\bar{p}(n)$ за відносним радіусом $\bar{r}_p$. Для прийнятих у роботі геометричних і трибологічних параметрів існує значення $\bar{r}_p^* \approx 0,745$, для якого характер залежності змінюється.

- При $\bar{r}_p \leq \bar{r}_p^*$ приведений тиск зростає зі збільшенням n ; мінімум $\bar{p}(n)$ досягається вже при $n=1$. У цьому режимі додаткове подрібнення стінки на жорсткі елементи лише збільшує сумарну довжину ліній зсуву та контактних поверхонь, не даючи вигаду в «кінематиці» течії.

- При $\bar{r}_p > \bar{r}_p^*$ залежність $\bar{p}(n)$ стає немонотонною: з'являється локальний мінімум при $n>1$, причому оптимальне значення n_{opt} зростає зі збільшенням $\bar{r}_p$. Для більших конічних порожнин «дрібніше» розбиття стінки на жорсткі елементи дає більш гнучку схему розбиття й дозволяє зменшити зсувні та контактні втрати у порівнянні з варіантом $n=1$.

Положення порогу $\bar{r}_p^*$ та числові значення n_{opt} зміщуються при зміні $\bar{r}_p$, $\bar{H}_0$, α та μ , однак якісна картина зберігається: для малих і середніх $\bar{r}_p$ оптимально $n = 1$, для великих $\bar{r}_p$ доцільно аналізувати кілька варіантів $n>1$.

Практичні рекомендації та подальша перевірка

Отримані закономірності дозволяють сформулювати низку практичних рекомендацій для попереднього проектування процесу прямого видавлювання деталей з конічною порожниною:

- **Малі та середні $\bar{r}_p$.** Доцільно обмежуватися

розбиттям стінки з $n=1$; зменшення α та коефіцієнта тертя μ (застосування ефективних мастил, покриттів інструмента) є найпростіший шлях до зниження $\bar{p}$.

- **Великі $\bar{r}_p$.** Рационально перевіряти декілька варіантів $n=1\dots 5$ і обирати число жорстких елементів за мінімальним значенням приведенного тиску.

- **Кут α та тертя μ .** Надмірно великі значення α та μ слід уникати, оскільки вони одночасно підсилюють і зсувні, і контактні втрати, приводячи до істотного зростання $\bar{p}$ і перевантаження інструмента.

- **Відносна товщина днища $\bar{h}$.** За можливості варто підтримувати більші значення $\bar{h}$, тому що це зменшує частку деформації як у днищі, так і в стінці та, відповідно, знижує приведений тиск.

Отримана аналітико-енергетична модель придатна для швидкого інженерного оцінювання $\bar{p}$ на ранніх етапах проектування, однак не замінює повністю детальний аналіз напружено-деформованого стану. Для точного визначення полів напружень, локальних концентрацій деформації та навантаження на інструмент доцільно виконати додаткову перевірку окремих конфігурацій методом скінченних елементів (МСЕ) та, за наявності, зіставити результати з експериментальними даними. Повномасштабна перевірка результатів за допомогою МСЕ-моделювання та/або експерименту розглядається як окремий напрям подальших робіт.

Висновки

1. На основі аналізу літератури з холодного видавлювання порожнистих конічних деталей встановлено, що поширені підходи (інженерні формули, МСЕ-моделювання та класичні модульні схеми МВО) або орієнтовані лише на окремі стадії процесу, або містять наперед фіксовані геометричні параметри (кут ліній зсуву, співвідношення відрізків). Це обмежує можливість одержання узагальненого аналітичного виразу для приведенного тиску при прямому видавлюванні деталей з конічною порожниною та не дозволяє обирати параметри розбиття з умови оптимальності, що й обґрунтувало необхідність побудови параметричної схеми осередку деформування на основі МВО.

2. Побудовано узагальнену параметричну схему осередку деформування для прямого видавлювання деталі з конічною порожниною, у якій осередок розділено на зону стискання/розвертання потоку (днище) та зону обтиснення стінки з відповідними внесками $\bar{p}_1$ і $\bar{p}_2$; для цієї схеми побудовано графік

швидкостей. На відміну від відомих схем із фіксованими оптимальними параметрами, у запропонованій постановці геометричні параметри розбиття (висоти трикутних елементів та кутові співвідношення) задаються як змінні й надалі визначаються з задачі мінімізації приведенного тиску.

3. Для зони стискання та розвертання потоку побудовано модифіковану кінематичну схему днища й отримано аналітичні оптимуми параметрів h_0, h_1, h_2 . Внесок $\bar{p}_1$ представлено як функцію параметрів розбиття та відношення радіусів матриці й протипуансону та коефіцієнта тертя. Розв'язано систему рівнянь для екстремуму цієї функції й отримано явні формули для оптимальних висот жорстких елементів; за допомогою матриці Гессе та критерію Сильвестра показано, що знайдена стаціонарна точка відповідає мінімуму. Встановлено умови на геометричні параметри й коефіцієнт тертя, які забезпечують фізичну коректність і відсутність вироджених конфігурацій розбиття днища.

4. Для зони стінки розроблено нову схему розбиття на систему подібних трикутних елементів і зведено оптимізацію до одновимірної задачі. Встановлено коефіцієнти подібності трикутних жорстких елементів і трикутників графіка швидкостей, отримано зв'язок $h_3(h_4, \lambda, n)$ та висоту стінки H_1 з умови рівності об'ємів заготовки й деталі. Внесок стінки $\bar{p}_2$ подано як функцію параметра розбиття h_4 та числа жорстких елементів n з явними умовами допустимості. Це відрізняється від класичних модульних схем тим, що параметри стінки не задаються наперед, а визначаються з умов оптимальності.

5. Отримано повний вираз для приведенного тиску $\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2$ у безрозмірній формі й виконано параметричний аналіз його залежностей. Показано, що $\bar{p}$ зростає зі збільшенням коефіцієнта тертя, кута нахилу внутрішньої поверхні стінки, радіуса протипуансону, а також при зменшенні відносної товщини днища. Така поведінка пояснюється збільшенням зсувних та контактних втрат, а також переносом деформацій на тоншу стінку та днище. Встановлено, що глобально найбільшою є чутливість $\bar{p}$ до відносного радіуса протипуансону, особливо поблизу порогового значення $\bar{r}_p^* \approx 0,745$, тоді як вплив кута нахилу та коефіцієнта тертя є значним, але менш різким, а вплив відносної товщини днища – помірним і монотонним ($\bar{p}$ зростає при зменшенні $\bar{h}$). Виявлено порогову поведінку $\bar{p}(n)$: для малих і середніх значень приведенного радіуса протипуансону оптимальним є $n=1$, тоді як для більших значень відносного радіуса з'являється локальний мінімум при $n>1$ і оптимальне число подібних жорстких елементів n_{opt} зростає зі збільшенням відносного радіуса протипуансону.

1. Сформульовано практичні рекомендації й показано модульний потенціал запропонованої схеми. Для малих і середніх значень відносного радіусу протипуансону доцільно застосовувати один жорсткий елемент в стінці ($n=1$) та мінімізувати кут нахилу внутрішньої поверхні стінки і коефіцієнт тертя (змащення, покриття інструмента). Для більших значень відносного радіусу протипуансону рекомендовано перевіряти декілька варіантів n і обирати конфігурацію за мінімальним значенням приведенного тиску; підтримання більшої відносної товщини днища дозволяє знизити навантаження на інструмент. Розбиття ділянок днища і стінки на жорсткі елементи фактично формує два окремі кінематичні модулі для схем плоского деформованого стану, які можуть застосовуватися як готові кінематичні блоки в інших задачах видавлювання. Це надає моделі додаткового практичного значення як швидкого інженерного інструмента для попереднього проектування.

Конфлікт інтересів

Автори заявляють, що вони не мають жодного конфлікту інтересів щодо цього дослідження, включаючи фінансові, особисті, авторські або будь-якого іншого характеру, які могли б вплинути на дослідження та його результати, представлені в цій статті

Використання штучного інтелекту

Під час підготовки рукопису автор використовував інструмент ChatGPT (OpenAI) лише для мовного редагування та покращення стилю окремих фрагментів тексту українською та англійською мовами. Усі математичні виведення, результати моделювання, аналіз графіків та наукові висновки отримані автором самостійно. Інструмент не застосовувався для генерації даних, літературних посилань або оригінальних наукових результатів. Усі текстові фрагменти, відредаговані з використанням штучного інтелекту, були критично перевірені автором і за потреби скориговані.

References

- [1] S.H. Zhang et al., "Some new features in the development of metal forming technology", *J. Mater. Process. Technol.*, Vol. 1, pp. 39–47, 2004, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2004.04.098>
- [2] I. S. Aliiev, N. S. Hrudkina, Kh. V. Malii and L. V. Tagan, "Modeliuvannia ta rozrobka protsesiv tochnoho ob'emnoho shtampuvannia vydavliuvanniam ["Modeling and development of precision bulk stamping extrusion processes"], Kramatorsk: DDMA, 2021, 208 p. ISBN 978-617-7889-08-2.
- [3] I. S. Aliiev, M. Yu. Kordenko and A. D. Samohliadov, "Kombinirovanoe vydavlivanie polykh konicheskikh detalei", ["Combined extrusion of hollow conical parts"], *Obrabotka materialov davleniem*, No. 47, pp. 90–95, 2018.
- [4] I. S. Aliiev, L. V. Tagan, A. D. Samohliadov and K. D. Makhmudov, "Combined backward-forward extrusion of hollow conical parts," *Obrabotka materialov davleniem*, No. 49, pp. 98–105, 2019. doi: [https://doi.org/10.37142/2076-2151/2019-2\(49\)98](https://doi.org/10.37142/2076-2151/2019-2(49)98).
- [5] I. S. Aliiev, V. M. Levchenko, O. Ye. Markov, P. B. Abkhari and Kh. V. Malii, "Simulation of extrusion process of hollow conical parts," *Matematychni modeliuvannia*, Vol. 48, pp. 147–156, 2023. doi: [https://doi.org/10.31319/2519-8106.1\(48\)2023.280802](https://doi.org/10.31319/2519-8106.1(48)2023.280802).
- [6] I. S. Aliiev, "Metodika analiza protsesov tochnoi ob'yemnoi shtampovki s pomoshch'iu modul'nykh polei skorosti" ["Methodology for analyzing precision bulk forming processes using modular velocity fields"], Kyiv: UMK VO, 1990, pp. 7–17.
- [7] I. S. Aliiev, "Enerhetychni metody doslidzhen protsesiv obrobky metaliv tyskom" ["Energy methods for studying metal forming processes"], Kramatorsk–Ternopil: DDMA, 2023, 179 p. ISBN 978-617-7889-54-9.
- [8] V. M. Levchenko, L. I. Aliieva, A. V. Titov, P. B. Abkhari and O. Yu. Chepelenko, "Simulation of the force regime for lateral extrusion in a die with rounded areas," *Materials working by pressure*, No. 53, pp. 10–23, 2024. doi: [https://doi.org/10.37142/2076-2151/2024-1\(53\)10](https://doi.org/10.37142/2076-2151/2024-1(53)10).
- [9] I. S. Aliiev, V. M. Levchenko, O. V. Chuchyn, D. O. Kartamyshev and K. I. Kotsiubivska, "Upper-bound estimation of force parameters of transverse-angular extrusion," *Materials working by pressure*, No. 52, pp. 20–31, 2023. doi: [https://doi.org/10.37142/2076-2151/2023-1\(52\)20](https://doi.org/10.37142/2076-2151/2023-1(52)20).
- [10] V. M. Levchenko, I. S. Aliiev, O. Yu. Chepelenko, D. O. Kartamyshev and O. G. Malii, "Simulation of the process of transverse-forward extrusion with expansion," *Materials working by pressure*, No. 53, pp. 24–33, 2024. doi: [https://doi.org/10.37142/2076-2151/2024-1\(53\)24](https://doi.org/10.37142/2076-2151/2024-1(53)24).
- [11] V. L. Kaliuzhnyi and V. M. Levchenko, "Use of power-balance and engineering methods for steady-stage analysis of cold backward extrusion with expansion," *Materials working by pressure*, No. 48, pp. 45–52, 2019.
- [12] M. V. Kosenko, I. V. Nagorskaya and O. V. Gulkova, "Analysis of the initial stage of extrusion of hollow conical parts," *Obrabotka materialov davleniem*, No. 21, pp. 61–65, 2009.
- [13] I. S. Aliiev and P. V. Hnezdylov, "Kombinirovanoe vydavlivanie polykh konicheskikh detalei iz zagotovok razlichnoi formy" ["Combined extrusion of hollow conical parts from billets of various shapes"], *Obrabotka materialov davleniem*, No. 41, pp. 162–165, 2015.
- [14] S. F. Sabol, V. V. Pimanov and Ye. V. Korobka, "Combined cold extrusion of a conical hollow billet for a special-purpose product," *Visnyk NTU "KhPI"*, No. 1133, pp. 103–107, 2015.

- [15] I. S. Aliiev and A. D. Samohliadov, "Manufacturing of hollow conical parts using combined backward-forward extrusion schemes," in *Proc. Int. Sci.–Pract. Conf. "Prohresyvna tekhnika, tekhnolohiia ta inzhenerna osvita"*, Kyiv, No XX, pp. 93–95, 2019. Accessed Sept. 10, 2019, Available: <https://proc.mmi.kpi.ua/article/view/174481>.
- [16] A. Ye. Hranovskyi, "Upper-bound estimation of the conical cavity wall contribution to the reduced pressure in forward extrusion," *Global Development of Science, Technology and Culture: Proceedings of the International scientific and practical conference*, Nov. 28–30, 2025, Oxford, United Kingdom, 2025, pp. 76–83, ISBN 978-617-8680-22-0, doi: <https://doi.org/10.64828/conf-75-2025>.
- [17] A. Ye. Hranovskyi, "Modeling of the conical cup extrusion process using the upper-bound method," *Perspektyvy rozvytku mashynobuduvannia ta transport, 2025: Abstracts of papers presented at IV International scientific and technical conference*, June 3–5, 2025, Vinnytsia, VNTU, 2025, pp. 300–301, ISBN 978-617-8163-51-8.
- [18] V. A. Evstratov, "Theory of Metal Forming Processes," Kharkiv: Vyscha Shkola, 1981.
- [19] R. A. Horn and C. R. Johnson, "Matrix Analysis", 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 2013.

Upper-bound estimate of reduced pressure and optimisation of scheme parameters for direct extrusion of parts with a conical cavity

Anton Hranovskyi

Donbass State Engineering Academy, Kramatorsk-Ternopil, Ukraine

Abstract. The object of the study is the process of direct cold extrusion of parts with a conical cavity. The problem addressed is the absence of general analytical estimates of the reduced pressure that simultaneously take into account the geometry of the bottom and wall of conical cavity, contact friction and the parameters of the deformation-zone partition, while remaining suitable for engineering calculations. The aim of the work is to develop a parametric scheme for partitioning the deformation zone and to determine the partition parameters for which the reduced pressure is minimal. The deformation zone is divided into a compression and flow-turning region in the bottom and a compression region in the wall of conical cavity; the reduced pressure is represented as the sum of the contributions of these regions. For the bottom, closed-form expressions for the optimal geometric parameters are obtained; for the wall, the minimisation problem is reduced to a one-dimensional search with respect to the partition parameter at a fixed number of similar triangular elements. It is shown that increasing the relative radius of the cavity from 0.25 to 0.7 and the cone angle of the wall from 5° to 30°, as well as decreasing the relative bottom thickness from 1.5 to 0.75, leads to an increase in reduced pressure by approximately 1.5–2 times. A threshold dependence on the number of similar elements in the wall of conical cavity is revealed: for small relative radii the minimum is achieved with one element, whereas for larger radii the optimal number ranges from two to five.

The partition parameters are not prescribed in advance but are determined from the minimum-pressure condition, which allows the partitions of the bottom and wall to be treated as two kinematic modules. The proposed model accounts for geometry, friction and the number of similar rigid elements and can be used for preliminary design of extrusion processes for parts with a conical cavity and combined extrusion schemes.

Keywords: direct extrusion, conical cavity, upper-bound method, rigid triangular elements, reduced pressure, kinematic module, optimisation.
