

УДК 539.3

Чемерис О.М., к.т.н., доц.
НТУУ «Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна

КОЛИВАННЯ ЕЛІПТИЧНОЇ ПЛАСТИНКИ

Chemeris O.
National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine (mmi@kpi.ua)

VIBRATION OF THE PLATE DE FORME ELLIPTIQUE

Еліптична цільна пластинка по зовнішній границі закріплена жорстко чи шарнірно. В роботі визначаються найнижчі власні частоти при симетричних коливаннях пластинки. З метою знаходження області визначення наближених рекомендованих формул для частотного параметра еліптичної жорстко затиснутої пластинки проведені розрахунки даного параметра при різних значеннях ексцентриситету. Для еліптичних пластин з ексцентриситетом менше ніж 0.5 всі формули і розрахунки дають практично один результат. Із збільшенням ексцентриситету результати суттєво відрізняються і необхідні подальші теоретичні та експериментальні дослідження для визначення функціональної залежності частотного параметра в залежності від ексцентриситету. Для цільної еліптичної шарнірно закріпленої по зовнішньому контуру пластинки створено алгоритм визначення частотного параметра. На основі функцій Мат'є складено частотні рівняння і знайдено його найменші корні. Обчислені значення частотного параметра при симетричних і несиметричних коливаннях. Як і в випадку круглої шарнірно закріпленої по зовнішній границі пластинки із збільшенням ексцентриситет частоти збільшуються.

Ключові слова: еліптична пластинка, зацементована, шарнірна, частота.

Вступ

Днища посудин, чутливі елементи приладів в ряді випадків представляють собою еліптичні пластинки. В процесі проектування такої пластинки необхідно забезпечити задані частотні характеристики. Частоти власних коливань жорстко зацементованої пластинки вперше розглянута в роботі [1] на основі методики викладеної в роботах [2], [3]. В роботі [4] рішення задачі дано наближеним методом Релея-Рітца. В роботі [5] приведено рішення даної і дана інтерполяційна формула для частотного параметра в залежності від ексцентриситету еліпса. Частоти коливань еліптичної пластинки при значеннях ексцентриситету більше чим 0.6 суттєво відрізняються в роботах [4], [5]. Результати даних робіт ввійшли в довідники [6], [7] для визначення частот коливань таких пластин. Рішення задачі по визначенню частот коливань еліптичної шарнірно закріпленої пластинки в літературі відсутнє.

Мета досліджень

З'ясувати, як змінюється частотний параметр при симетричних і несиметричних коливаннях цільної еліптичної пластинки з жорстко затиснутим краєм при різних значеннях ексцентриситету та порівняти значення частотного параметру з рекомендованими різними авторами. Для цільної шарнірно закріпленої по контуру еліптичної пластинки розробити алгоритм та провести обчислення частотного параметра при різних значеннях ексцентриситету.

Основна частина

Рівняння коливань пластинки в прямокутній системі координат має вигляд

$$\nabla^4 w + \frac{D}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

w - нормальне переміщення, $D = E\delta^3/12(1-\mu^2)$ - циліндрична жорсткість E - модуль Юнга, μ - коефіцієнт Пуассона, δ - товщина пластинки, m - маса пластинки на одиницю площі, t - час. Якщо ω колова частота коливань, а $k^4 = D/m$, то w змінюється з часом як $\cos \omega t$ і рівняння (1) матиме вигляд,

$$(\nabla^2 + k_1^2)(\nabla^2 - k_1^2)w = 0. \quad (2)$$

Переміщення w_1, w_2 являються відповідно рішеннями рівнянь:

$$(\nabla^2 + k_1^2)w_1 = 0, \quad (3)$$

$$(\nabla^2 - k_1^2)w_2 = 0. \quad (4)$$

Між прямокутними x, y та еліптичними ортогональними координатами ξ, η існує залежність

$$x + iy = h \cosh(\xi + i\eta), (x = h \cosh \xi \cdot \cos \eta, y = h \sinh \xi \cdot \sin \eta)$$

де $2h$ - відстань між фокусами еліпса, a, b - півосі еліпса, $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$ його ексцентриситет.

В даному випадку маємо для різних h систему еліпсів $x^2 / \cosh^2 \xi + y^2 / \sin^2 \eta = h^2$ які перетинаються системою гіпербол $x^2 / \cosh^2 \eta - y^2 / \sin^2 \xi = h^2$. При $c=1$ еліпс переходить в лінію (Рис 1.В), а при $e=0$ еліпс переходить в коло (Рис. 1. С).

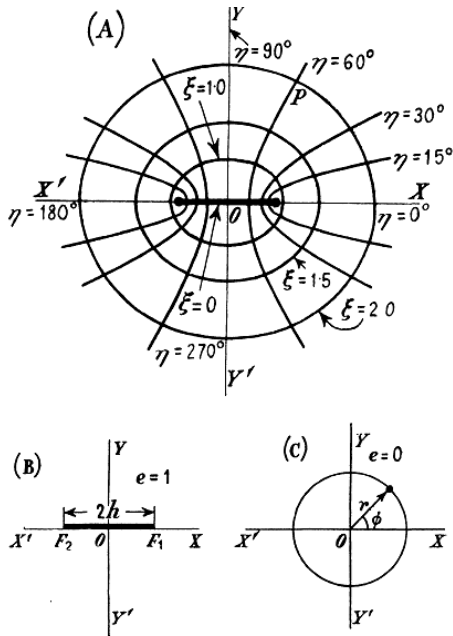


Рис. 1. Еліптична система координат

В еліптичній системі координат рівняння (3) при $k_1^2 h = 2q$ матиме вигляд

$$\partial^2 w / \partial \xi^2 + \partial^2 w_1 / \partial \eta^2 + 2k^2 (\cosh 2\xi - \cos 2\eta) w_1 = 0 \quad (5)$$

$$w(\xi, \eta) = \psi(\xi) \cdot \varphi(\eta)$$

Рівняння (5) матиме вигляд $\phi \cdot d^2 \psi / d\xi^2 + \psi \cdot d^2 \phi / d\eta^2 + 2q(\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \cdot \psi \xi = 0$

Позначимо через a сталу величину і запишемо це рівняння в такій формі

$$d^2 \psi / d\xi^2 + (2q \cos 2\xi) \cdot \psi = -d^2 \phi / d\eta^2 + (2q \cos 2\eta) \cdot \phi = a \quad (6)$$

Із даного співвідношення випливає канонічна форма системи рівнянь Матґе

$$d^2 \phi / d\eta^2 + (a - 2q \cosh 2\eta) \cdot \phi = 0 \quad (7)$$

$$d^2 \psi / d\xi^2 - (a - 2q \cos 2\xi) \cdot \psi = 0 \quad (8)$$

Частинне рішення (7) складають звичайні функції Матґе $ca_m(\eta, q), sa_m(\eta, q)$. Рівняння (8) і його рішення називають модифікованими $Ca_m(\eta, q), Sa_m(\eta, q)$. Рівняння і рішення можна отримати шляхом заміни η на $i\eta$.

$$ca_m(i\eta, q) = Ca_m(\eta, q), sa_m(i\eta, q) = Sa_m(\eta, q),$$

Частинне рішення (4) складають звичайні $ca_m(\eta, -q), sa_m(\eta, -q)$ та модифіковані функції

$$Ca_m(\eta, -q), Sa_m(\eta, -q)$$

Цільна еліптична пластинка Рис. 2 жорстко затиснута по зовнішній границі. Рішення рівнянь коливань пластинки в даному випадку буде

$$w(\xi, \eta) = A_m \tilde{N}e_m(\xi, q) ca_m(\eta, q) + B_m Ce_m(\xi, -q) ce_m(\eta, -q) + D_m Se_m(\xi, q) se_m(\eta, q) + K_m Se_m(\xi, -q) ce_m(\eta, -q) \quad (9)$$

де A_m, B_m, D_m, K_m - сталі величини. Для m форми колень симетричної відносно обох осей еліпса (m парне) або відносно малої вісі (m - непарне)

$$w(\xi, \eta) = A_m \tilde{N}e_m(\xi, q) ca_m(\eta, q) + B_m C_m(\xi, -q) ce_m(\eta, -q)$$

Якщо m - ой форми колень несиметричної відносно обох осей (m - парне) або відносно великої вісі еліпса (m - непарне), то рішення має вигляд

$$w(\xi, \eta) = A_m Se_m(\xi, q) sa_m(\eta, q) + B_m Se_m(\xi, -q) se_m(\eta, -q) \quad (10)$$

Граничні умови

$$A_m \tilde{N}e_m(\xi_0, q) ca_m(\eta, q) + B_m C_m(\xi_0, -q) ce_m(\eta, -q) = 0$$

$$A_m \tilde{N}'e_m(\xi, q) ca_m(\eta, q) + B_m C'e_m(\xi, -q) ce_m(\eta, -q) = 0$$

Прирівнюємо до нуля визначник даної системи і знаходимо частотне рівняння

$$Ce_m(\xi_0, q) C'e'_m(\xi_0, -q) - C'e'_m(\xi_0, q) Ce_m(\xi_0, -q) = 0$$

$$Se_m(\xi_0, q) S'e'_m(\xi_0, -q) - S'e'_m(\xi_0, q) Se_m(\xi_0, -q) = 0$$

$$\xi_0 = a \cosh(1/e), e = \sqrt{1 - (b/a)^2}, \omega = \frac{4q}{e^2} \cdot \sqrt{\frac{D}{m}}$$

де

$$Ce_0(\xi_0, q) = 1 - \frac{q}{2} ch 2\xi_0 + \frac{q^2}{32} \cdot ch 4\xi_0 - \frac{q^3}{128} \left(\frac{1}{9} \cdot ch 2\xi_0 - 7ch 2\xi_0 \right) + \frac{q^4}{73828} (ch 8\xi_0 - 320ch 4\xi_0)$$

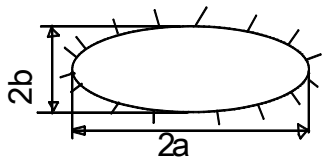


Рис. 2. Жорстко затиснута еліптична пластинка

$$\begin{aligned}
 Ce_1(\xi_0, q) &= ch\xi_0 - \frac{q}{8}ch3\xi_0 + \frac{q^2}{64} \cdot \left(\frac{1}{3}ch5\xi_0 - ch3\xi_0\right) - \frac{q^3}{512} \left(\frac{1}{3} \cdot ch3\xi_0 - \frac{4}{9}ch5\xi_0\right) + \frac{1}{18}ch7\xi_0 + \\
 &+ \frac{q^4}{4096} \left(\frac{11}{9} \cdot ch3\xi_0 + \frac{1}{6}ch5\xi_0 - \frac{1}{12}ch7\xi_0 + \frac{1}{180}ch9\xi_0\right) \\
 Se_1(\xi_0, q) &= sh\xi_0 - \frac{q}{8}sh3\xi_0 + \frac{q^2}{64} \cdot \left(\frac{1}{3}sh5\xi_0 + sh3\xi_0\right) - \frac{q^3}{512} \left(\frac{1}{3} \cdot ch3\xi_0 + \frac{4}{9}ch5\xi_0\right) + \frac{1}{18}ch7\xi_0 + \\
 &+ \frac{q^4}{4096} \left(-\frac{11}{9}sh3\xi_0 + \frac{sh5\xi_0}{6} + \frac{sh7\xi_0}{12} + \frac{1}{180}sh9\xi_0\right) \\
 Ce_2(\xi_0, q) &= ch2\xi_0 - \frac{q}{8} \left(\frac{2}{3}ch4\xi_0 - 2\right) + \frac{q^2}{384} \cdot ch6\xi_0 - \frac{q^3}{512} \left(\frac{1}{45} \cdot ch8\xi_0 + \frac{43}{27}ch4\xi_0 + \frac{40}{3}\right) + \\
 &+ \frac{q^4}{4096} \left(\frac{1}{540} \cdot ch10\xi_0 + \frac{293}{540}ch6\xi_0\right) \\
 Se_2(\xi_0, q) &= sh2\xi_0 - \frac{q}{12}sh4\xi_0 + \frac{q^2}{384} \cdot sh6\xi_0 - \frac{q^3}{512} \left(\frac{1}{45} \cdot ch8\xi_0 - \frac{5}{27}ch4\xi_0\right) + \\
 &+ \frac{q^4}{4096} \left(-\frac{37}{540}sh6\xi_0 + \frac{sh10\xi_0}{540}\right)
 \end{aligned}$$

Значення найменшого кореня q рівнянь (9), (10) для функцій

$$Ce_0(\xi_0, q), Ce_1(\xi_0, q), Se_1(\xi_0, q), Ce_2(\xi_0, q), Se_2(\xi_0, q),$$

при різних значеннях ексцентриситету e приведені в таблиці 1 для різних значень $Ce_m(\xi_0, q), Se_m(\xi_0, q), m = 0, 1, 2$. В таблиці 2 приведені результати розрахунку частотного параметру $k = k(e)$, який приводиться в роботах різних авторів.

Таблиця 1

e	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
q C0	0.025	0.103	0.239	0.449	0.782	2.581	3.143	3.318	3.299
q C1	0.049	0.201	0.466	0.862	1.415	2.15	3.073	4.106	5.159
q S1	0.049	0.199	0.456	0.831	1.339	1.989	2.78	3.677	4.624
q C2	0.072	0.293	0.671	1.204	1.861	2.564	3.211	3.718	4.043
q S2	0.072	0.294	0.681	1.264	2.11	3.376	5.623	10.446	14.606

Таблиця 2

e	0.2	0.4	0.5	0.6	0.7	0,8	0.866	0.943
k	10.54	11.33	12.11	13.39	15.69	20.56	28.04	59.514
k_o	10.42	11.18	11.87	11.29	-----	-----	28.05	20.53
k_{oc}	10.3	11.26	12.51	28.69	25.66	20.74	17.71	14.42
k_{1s}	19.9	20.78	21.42	22.1	22.69	22.98	22.99	22.63
k_{1c}	20.1	21.55	22.64	23.89	25.09	25.66	25.59	25.34
k_{2c}	29.3	30.1	29.78	28.49	26.21	23.237	21.089	18.55
k_{2s}	29.4	31.6	33.76	37.51	45.9	65.29	71.88	70.15

Частотний параметр k визначався по формулі рекомендованій Collatz I. [5].

$$k = \sqrt{40} \cdot \sqrt{\left(1 + 2/3\alpha^2 + \alpha^4\right)} \quad (\alpha = b/a)$$

Частотний параметр k_o визначався по формулі рекомендованій Shibaoka Y. [5]., яку рекомендують використовувати при «малих» значеннях e . В таблиці 2 параметр k_o визначався при $e \leq 0.5$. При $e \geq 0.6$ значення параметра

k_o бралось із роботи [5]., [6].

$$k_o = (3.1961 + 0.7991e^2 + 0.7892e^4)^2$$

Параметр k_{oc} визначали як менший корінь рівняння

$$Ce_o(\xi_o, q)Ce'_o(\xi_o, -q) - Ce'_o(\xi_o, q)Ce_o(\xi_o, -q) = 0$$

по формулі

$$k_{oc} = 4q_{co} / e^2$$

Параметр k_{1s} визначали як менший корінь рівняння

$$Se_1(\xi_o, q)Se'_1(\xi_o, -q) - Se'_1(\xi_o, q)Se_1(\xi_o, -q) = 0$$

по формулі

$$k_{1s} = 4q_{1s} / e^2$$

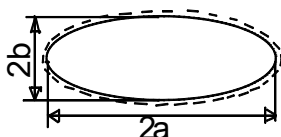


Рис. 3. Шарнірно закріплена еліптична пластинка

Цільна еліптична пластинка Рис.3 має шарнірну границю.

Граничні умови

$$w(\xi_o, \eta) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 w(\xi_o, \eta)}{\partial \xi^2} + (\mu \frac{\partial^2 w(\xi_o, \eta)}{\partial \eta^2} + (1 + \mu) \frac{\partial w(\xi_o, \eta)}{\partial \eta} \cdot \tilde{n} \text{th} \eta) \frac{1}{sh^2 \eta} = 0 \quad (11)$$

де L - оператор, що відповідає рівнянню (11)

Підставляємо (9) в (10) і одержимо систему двох рівнянь відносно коефіцієнтів A_o, B_o . Прирівнюємо до нуля визначник системи і знаходимо

частотне рівняння

$$Ce_m(\xi_o, q)Ce''_m(\xi_o, -q) - Ce''_m(\xi_o, q)Ce_m(\xi_o, -q) = 0 \quad (12)$$

$$SCe_m(\xi_o, q)Se''_m(\xi_o, -q) - Se''_m(\xi_o, q)Se_m(\xi_o, -q) = 0 \quad (13)$$

Менший корінь частотного рівняння при $m = 0, 1, 2$ для функцій $Ce_m(q, \xi_o)$, $Se_m(q, \xi_o)$ в таблиці 3.

Приведено значення найменшого кореня рівняють (12), (13).

Таблиця 3

e	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
q_{c0}	0.015	0.041	0.138	0.254	0.418	0.645	0.971	1.504	2.328
q_{s1}	0.034	0.138	0.318	0.583	0.949	1.443	2.113	3.072	4.733
q_{c1}	0.037	0.139	0.322	0.597	0.984	1.509	2.2	3.095	4.346
q_{c2}	0.057	0.232	0.532	0.962	1.511	2.146	2.808	3.422	4.089
q_{s2}	0.057	0.233	0.538	0.998	1.662	2.638	4.255	8.29-	13.65

Значення частотного параметра $k = 4q / e^2$ приведено в таблиці 4. Частота коливань визначається формулою

$$\omega = (k / a^2) \cdot \sqrt{D / m}$$

Таблиця 4

e	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
K_{co}	6	6	6.13	6.35	6.69	7.17	7.93	9.4	11.5
$ks1$	13.6	13.8	14.13	14.58	15.18	16.03	17.25	19.2	23.37
$kc1$	13.6	13.9	14.31	14.93	15.74	16.77	17.96	19.34	21.46
$kc2$	22.8	23.2	23.64	24.05	24.18	23.84	22.92	21.39	18.39
$ks2$	22.8	23.3	23.91	24.95	26.59	29.31	34.74	51.81	67.41

Висновки:

1 Знайдені частотні рівняння для і цільної еліптичної пластинки з жорстко затиснутим контуром при симетричних та несиметричних коливаннях та проведені обчислення частотного параметру.

2. Проведені порівняльні розрахунки по визначенню нижчої частоти коливань при різних значеннях ексцентриситету еліпса. При значеннях ексцентриситету $e \leq 0.5$ всі наведені формули приводять практично до одного результату. При $e \geq 0.6$ результати обчислення частотного параметра суттєво розходяться. І потрібні подальші теоретичні і особливо експериментальні дослідження.

3. Розроблено алгоритм та проведені розрахунки нижчої частоти коливань шарнірно закріпленої по контуру цільної еліптичної пластинки при різних значеннях ексцентриситету.

Аннотация. Цельная эллиптической формы пластинка по внешнему контуру закреплена или шарнирно оперта. В работе определяются наименьшие собственные частоты при симметричных колебаниях такой пластинки.

Проведены вычисления частотного параметра по различным приближенным формулам с целью определения их областей определения. Все приведенные формулы для частотного параметра при значениях эксцентриситета эллипса примерно меньше или равно 0.5 совпадают. При увеличении эксцентриситета результаты расчёта существенно расходятся и необходимы дальнейшие теоретические экспериментальные исследования для установления закона изменения частотного параметра в зависимости от эксцентриситета. Для цельной эллиптической пластинки шарнирно опертой по контуру разработан алгоритм определения частотного параметра. На основе функций Матье составлено частотное уравнение и найдены его низшие корни. Вычислены наименьшие частоты симметричных колебаний. Как и в случае закреплённой пластинки частоты колебаний увеличиваются с увеличением эксцентриситета.

Ключевые слова: эллиптическая, закреплённая и шарнирная пластинка, частоты

Abstract. Whole elliptic form a plate on an external contour is jammed or pin-ended. In this work the smallest eigenfrequencies at the symmetric vibrations of such plate are determined.

The calculations of frequency parameter on different approximate formulas are conducted with the purpose of determination of their ranges of definition. All exhibited formulas for a frequency parameter at the values of eccentricity of ellipse approximately less or equal 0.5 coincide. At the increase of eccentricity the results of calculation substantially diverge and needed further theoretical experimental researches for establishment of law of change of frequency parameter depending on an eccentricity. For a whole elliptic pin-ended plate is developed the algorithm of determination of frequency parameter. On the basis of Mathieu function a frequency equation was composed and his smallest roots was found. The smallest frequencies of symmetric vibrations were calculated. As well as in case of the jammed plate frequency of vibrations increase with the increase of eccentricity

Keywords: elliptic, jammed and hinged plate, frequenci

Бібліографічний список використаної літератури

1. Стретт М.Д., Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. – М.: Гостехиздат, 1935.- 159-164с.
2. Мак Лаклан. Теория и приложения функций Матье. ИЛ, 1954
3. Mathieu E., Memorie sur le mouvement vibratorie d'une membrane de form elliptique, J. de math, pures et appliques (Liouville), 1868. v.13. p. 137.
4. Collatz l., Eigenwertaufgaben mit technishen Anwendungen, Akad. Verlad. Lpz. 1949
5. Shibaoka Y., On the transverse vibration of an elliptic plate with clamped edges. J.Phys. Sos. Japan, 1956, 11, №7, p.797.
6. Гонтквич В.С, Собственные колебания пластин и оболочек. Справочник. -К. Наукова думка, 1964.—287с.
7. Справочник по теории сооружений. Под ред. Коренева Б. Г., Рабиновича И.М.- М.Стройиздат, 1972-510с.

References

1. Strett M.D. Fynktii Lame, Mathieu I rodstvinie im v phisike I texnike. Moskow. Hostexisdat .1935. 159-164p.
2. Mac Lachlan, Teoria I prilogenia phynkti Mathieu. I.L., 1954.
3. Mathieu E., Memorie sur le mouvement vibratorie d'une membrane de form elliptique, J. de math, pures et appliques (Liouville), 1868. v. 13. p. 137.
4. Collatz l., Eigenwertaufgaben mit technishen Anwendungen, Akad. Verlad. Lpz. 1949
5. Shibaoka Y., On the transverse vibration of an elliptic plate with clamped edges. J.Phys. Sos. Japan, 1956, 11, no 7, p. 797.
6. Gontkevich V.S. Sobstvennyye kolebanija plastinok. Spravochnoe posobie [Frequencies of eigentones plates. Certificate manual]. Kyiv: Naukova dumka, 1964, 287p.
7. Spravochnik po dinamike sooruzhenij [Reference book on the dynamics of buildings]. Pod red. Koreneva B.G, Rabinovicha. I.M. M: Strojizdat, 1972, 511p.

Подана до редакції 26.02.2014