

УДК 629.784: 532.53

Ковалев В.А., д.т.н., проф., Крищук Н.Г., д.т.н., проф.
НТУУ «Киевский политехнический институт», г.Киев, Украина

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЦИРКУЛЯЦИИ ЖИДКОГО ТОПЛИВА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Kovalev V., Krishchuk N.

National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine (vaskov@ukr.net)

UNSTEADY LIQUID PROPELLANT CIRCULATIONS IN SPACECRAFT CYLINDRICAL TANK

Приведены результаты имитационного моделирования инерционных осесимметричных течений вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрическом резервуаре после резкой остановки его вращения. Представлены результаты численного расчета уравнений движения жидкости в форме Навье-Стокса с соответствующими граничными и начальными условиями в широком диапазоне изменения угловых скоростей, вязкости жидкости и критерияльных параметров Рейнольдса, Струхала и др. Приведенные линии тока и поля давлений позволяют построить нестационарную картину развития циркуляций в меридиональных плоскостях цилиндра и установить их влияние на формирование поля азимутальной скорости. Полученные численные результаты отличаются от известных данных более широким диапазоном моделирования и учетом всех нелинейных особенностей распределения скоростей частиц жидкости.

Ключевые слова: численное моделирование, цилиндрический резервуар, уравнения движения жидкости, числа подобия, поле скоростей и давлений.

Введение

Исследования течений жидкости в ограниченных объемах имеют широкое приложение к ракетной и космической технике, так как подобные подвижные тела могут содержать большие количества жидкого топлива. При движении подобных жидкостей в пределах топливных резервуаров космического аппарата (КА) могут возникать неустойчивости из-за динамического воздействия течений на стенки.

Точное определение величин и направлений подобных возмущений позволит увеличить надежность управления КА, сократить расход топлива на борту, запасы которого трудновосполнимы, а также избежать аварийных ситуаций из-за возникновения резонансных воздействий со стороны жидкости на конструкцию объекта. В этой связи исследования гидродинамических полей в ограниченных объемах, заполненных вязкой несжимаемой жидкостью, и определение оптимальных методов и средств воздействия на внутренние инерционные течения представляются весьма актуальными.

Большую часть теоретических и экспериментальных исследований в указанной области гидромеханики представляют работы по изучению течений в сосудах различной геометрии, например, сфере или цилиндре, частично заполненных идеальной жидкостью [1]. Изучаются резонансные плескания в широком диапазоне частот колебаний и силовые влияния на стенки, ВСУ и другие гидродинамические параметры течений. При этом течениям в сосудах, целиком заполненных вязкой несжимаемой жидкостью, уделяется недостаточно внимание, поскольку они могут генерировать только вращательные движения жидкости и достаточно слабые по сравнению с предыдущим случаем силовые воздействия на стенки.

Несмотря на несущественность, на первый взгляд, указанных гидродинамических задач, возрастание продолжительности полета КА, большие количества транспортируемых жидких грузов и высокие требования к надежности управления подобными объектами увеличивают актуальность исследований в этой области. Определение величин и направлений силовых инерционных воздействий на стенки резервуаров стороны жидкого топлива позволит оптимизировать работу автоматической системы стабилизации, сократить расход топлива и увеличить надежность управления подобными объектами.

Целью исследования является имитационное моделирование указанных течений с помощью уравнений движения жидкости Навье-Стокса на базе компьютерного комплекса, методов конечных элементов и прикладного пакета программ, анализ и сопоставление полученных численных данных с известными экспериментальными результатами.

Постановка задачи исследований и методы численного решения

Подход к имитационному моделированию течений в ограниченных объемах с криволинейными стенками с помощью компьютерных средств вычисления включает в себя построение геометрии сосуда, в данном случае, цилиндрического, и введение в расчетную схему соответствующей системы координат. Далее, согласно известным численным методам и стандартным пакетам прикладных программ [2], исследуемое пространство сосуда разбивается на сетки с треугольными элементами конечных размеров. Учитывая также результаты экспериментальных измерений поля скоростей в резервуаре [2-4], а именно: в пристеночной области, шаг сетки можно увеличивать или уменьшать. Это обеспечит устойчивость численного расчета, увеличит вычислительный ресурс и позволит учесть особенности распределения скоростей в окрестности перегородок.

Для численного моделирования замкнутых осесимметричных течений в качестве стандартной принималась цилиндрическая геометрия сосуда, которая описывается полными уравнениями Навье-Стокса в цилиндрических координатах R, Θ, H

Рассматриваемая задача о вращении вязкой несжимаемой жидкости, целиком заполняющей сосуд, относится к классу задач о внутренних течениях вокруг продольной вертикальной оси и рассматривалась многими авторами, например, Н.А.Слезкиным для течения в круглом цилиндре бесконечной длины [2]. Несмотря на то, что в действительности свойство симметричности относительно продольной оси в подобном течении может не выполняться из-за влияния различных случайных факторов, решение задачи в осесимметричной постановке представляется достаточно обоснованным.

Кроме свойства осевой симметрии течения в исследованиях, как правило, используется условие симметрии относительно горизонтальной плоскости, которая делит цилиндр на две равные части, так называемой средней плоскости [2, 7]. На рис.1 представлена цилиндрическая система координат, свойства осевой и экваториальной симметрии для задачи об инерционном течении в цилиндре. Таким образом, рассматриваемую задачу можно представить совокупностью двумерных решений в масштабе четверти продольного сечения цилиндра, что существенно уменьшает вычислительный ресурс и продолжительность компьютерных расчетов.

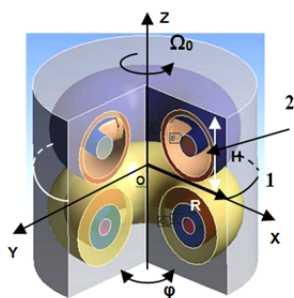


Рис.1. Условия симметрии задачи о вращении жидкости в цилиндре:

1 – средняя плоскость цилиндра; 2 – область численных расчетов

Для моделирования течений в ограниченных объемах применяются известные методики конечно-разностной, конечно-элементной и конечно-объемной аппроксимации [7]. Рассмотрим круговой цилиндр радиуса R и высотой $2H$, который целиком заполнен несжимаемой жидкостью с кинематическим коэффициентом вязкости ν в системе координат r, φ, z . Согласно условиям осевой симметрии течения, когда все производные по координатному углу φ равны нулю, и пренебрегая влиянием сил гравитации, которые уравновешиваются архимедовыми силами, за основу расчетов примем нестационарные уравнения Навье-Стокса для течения вязкой несжимаемой жидкости.

Приведение уравнений к безразмерному виду осуществлялось с помощью соответствующих формул связи, в качестве которых приняты начальная угловая скорость сосуда Ω_0 , радиус стенок цилиндра R_0 и давление на стенках сосуда p_0 :

- а) для линейного параметра $\bar{r} = r \cdot R_0$, $\bar{z} = z \cdot R_0$;
 б) компонент скорости жидкости $\bar{u} = u / \Omega_0 \cdot R_0$, $\bar{v} = v / \Omega_0 \cdot R_0$, $\bar{w} = w / \Omega_0 \cdot R_0$;
 в) времени течения $\bar{t} = t / \Omega_0$ и
 г) давления $\bar{p} = p \cdot \rho \cdot \Omega_0^2 \cdot R_0^2$,

где черточка над символом обозначает безразмерную величину.

Опуская для упрощения обозначений в дальнейшем черточки над безразмерными величинами, получим безразмерные уравнения Навье-Стокса для численного моделирования течений с учетом начального числа Рейнольдса Re_0 в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= 1 / Re_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{u^2}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + 1 / Re_0 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + 1 / Re_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

а также уравнение неразрывности
$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

где u , v и w – соответственно окружная, радиальная и меридиональная компоненты вектора скорости, а p – давление в течении.

Для решения уравнений движения жидкости Навье-Стокса в терминах скорости и давления широко применяется метод переменных направлений, а для уравнений в терминах функции тока и завихренности – метод последовательной релаксации. В указанном методе градиенты течения в вертикальном направлении аппроксимируются и корректируются согласно итерациям по времени.

Итерационная процедура по времени в численных расчетах позволяет избежать взаимного влияния узлов расчетной сетки в поперечном направлении, уменьшающих в свою очередь область вычислений, и снизить продолжительность расчетов. Для всех пространственных переменных во внутренней области можно применить центральные разности, а производные по времени аппроксимируются односторонними разностями второго порядка на трех уровнях. По результатам численного моделирования инерционного течения в цилиндре во времени затухания скорости можно составить нестационарную картину течения с учетом нелинейного распределения скорости во времени. Для этого необходима корректная постановка граничных и начальных условий задачи об инерционном течении жидкости после внезапной остановки вращения цилиндрической оболочки.

Таким образом, для численного решения системы четырех уравнений (1) и (2) имеем четыре неизвестных – азимутальную u , радиальную v и меридиональную w компоненты вектора скорости течения и давление p . Для постановки граничных и начальных условий задачи об инерционном течении вязкой несжимаемой жидкости в цилиндре отметим следующее. Согласно математической постановке задачи цилиндр, целиком заполненный несжимаемой жидкостью, вплоть до момента времени $t \leq 0$ вращается как сплошное твердое тело вокруг своей вертикальной оси с постоянной угловой скоростью Ω_0 . При рассмотрении течения в системе координат, жестко связанной с оболочкой, все компоненты вектора скорости u , v и w , а также градиент давления равны нулю. То есть, начальные условия задачи представляются в виде:

$$\text{при } t \leq 0 \quad v = w = 0, \quad u = \Omega_0 \cdot R. \quad (3)$$

При $t > 0$ оболочка резко останавливается, тогда как жидкость в сосуде продолжает двигаться под действием сил инерции. В результате относительно стенок сосуда формируется переходное азимутальное течение, которое сопровождается возникновением и развитием меридиональных циркуляций. При этом из условий прилипания жидкости к стенкам сосуда все составляющие скорости на стенках равны нулю

$$\text{при } R = R_0 \quad u = v = w = 0, \quad (4)$$

а в предположении об осевой симметрии течения все скорости на оси сосуда также равны нулю:

$$\text{при } R = 0 \quad u = v = w = 0.$$

Из результатов анализа экспериментальных данных [4, 5], следует, что циркуляции в меридиональных плоскостях зависят от угловой скорости Ω_0 и вязкости модельной жидкости ν . При этом пропорциональное увеличение параметров Ω_0 и ν , составляющих центробежное число Рейнольдса, $Re_0 = \Omega_0 \cdot R^2 / \nu$ не всегда обеспечивает адекватное представление физических особенностей течения.

Анализ полученных результатов исследования

Расчетная сетка для рассматриваемой цилиндрической области разбивалась на 140 000 элементов, что позволяло обеспечить устойчивость расчетной схемы за счет малого шага как по радиальной координате R , так и по высоте области H . Результаты расчетов для $Re = 880$ в сравнении с данными К.Китченса для течения с ускорением (spin-up) [6] при $Re = 9761$, а также С.Хиньдун для течения с торможением (spin-down) [7] при $Re = 4000$ приведены на рис.2, где показан пример существования одной циркуляции в меридиональной плоскости цилиндра.

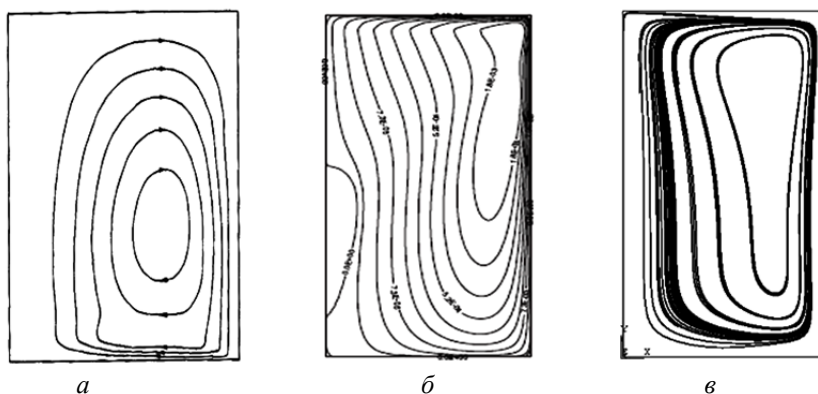


Рис.2. Примеры возникновения одной циркуляции в цилиндре: а - по данным К.Китченса для течения с ускорением (spin-up) [5], $Re = 9761$, б - Хиньдун Суй для течения с торможением (spin-down) [7], $Re = 4000$ и в - данные автора для течения с торможением, $Re = 880$

Как видно из рисунка 2,а, при формировании одной циркуляции наиболее динамичной представляется верхняя приосевая область цилиндра, где в начальные моменты времени течения под действием центробежных сил инерции возникает радиальное течение от оси к периферии в виде экмановского течения. При этом в осевой области цилиндра возникает восходящее приосевое течение со скоростью до 3 мм/с под действием градиента давления, направленного в зону разрежения.

В то же время на вертикальных стенках цилиндра наблюдается достаточно слабое, до 0,3 мм/с течение, благодаря сильному влиянию вязкой диффузии в пристеночной области сосуда. Дальнейшее увеличение начальной угловой скорости Ω_0 , приводит к возрастанию компонент вектора скорости. Как отмечалось ранее, при $Re > 970$ в меридиональных плоскостях цилиндра могут возникать двух- и трех-циркуляционные течения, структуру которых можно проследить из рис.3.

Как видно из рис.3,б, вторая устойчивая циркуляция возникает в верхней периферийной области цилиндра, где наблюдается смыкание экмановского радиального течения, направленного к оси вращения, и пристеночного течения на вертикальных стенках цилиндра. При возрастании начальных чисел Рейнольдса $Re_0 = 1030$ (рис.3,в) вторая циркуляция может уже занимать верхнюю часть течения около крышки (до 43% пространства) и существовать достаточно долго. При этом скорость w в ее пределах составляет до $0,09 \bar{u}_i$ безразмерной окружной скорости, а базовая циркуляция смещается к среднему сечению цилиндра.

Дальнейшее увеличение начального числа $Re_0 = 1150$ приводит к возрастанию меридиональной скорости в средней области сечения цилиндра и образованию третьей циркуляции (рис.3,г). Эта структура может развиваться как в средней области сечения, так и в пристеночной, мигрируя вверх вдоль стенок цилиндра. Увеличение параметра Re_0 до 2500 и далее приводит к возрастанию радиальной и меридиональной скоростей и дроблению циркуляций на более мелкие структуры масштаба 0,15-0,2 сечения. Однако, существенного их влияния на поле окружной скорости \bar{u}_i не установлено.

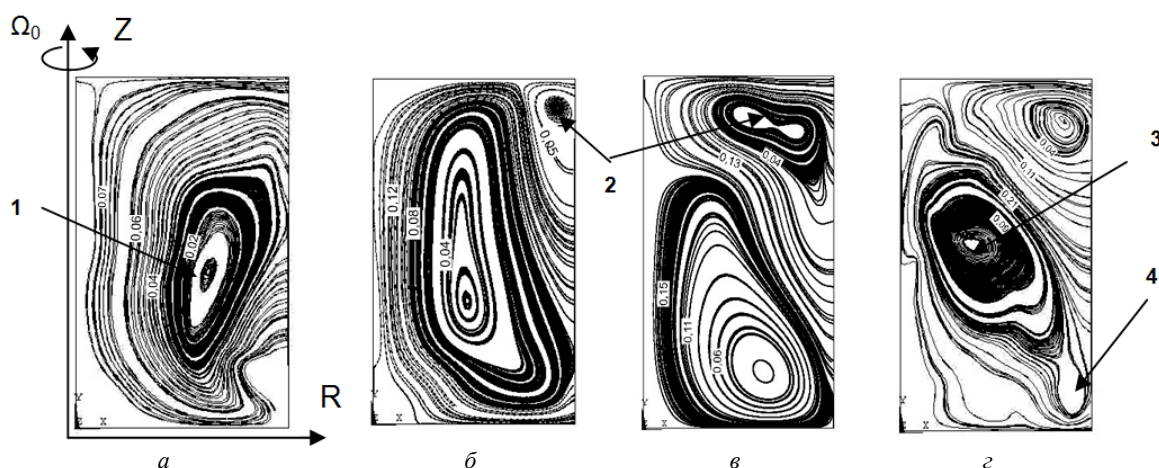


Рис.3. Развитие циркуляционных течений в цилиндре при возрастании угловой скорости Ω_0 : а– $Re_0 = 920$; б– $Re_0 = 970$; в– $Re_0 = 1030$; г– $Re_0 = 1150$: 1–базовая циркуляция; 2–образование второй циркуляции; 3–дробление второй циркуляции; 4–образование третьей циркуляции

Структуру и характер развития во времени осесимметричного течения в ограниченном объеме во многом определяет поле давления. Распределение давления, например, минимальные величины давления в меридиональном сечении цилиндра, показывают координаты областей низкого давления, характеризующих центры меридиональных циркуляций. Из рис.4, на котором приведено контурное изображение распределения давления в меридиональном сечении цилиндра при затухании скорости, можно наблюдать распределение давления для случая возникновения двух циркуляций, где темные области обозначают местонахождение областей низкого давления и формирования устойчивых циркуляционных структур.

По результатам расчетов полей давления в цилиндре в диапазоне чисел Рейнольдса $Re=700-5700$ установлено явление миграции зон пониженного давления и, как следствие, перемещения центров циркуляций от периферии к оси вращения цилиндра. Подобное явление подтверждает результаты численных расчетов, проведенных С.Хинjun'ом для $Re_0 = 4000$ [7], однако, по данным автора оно может наступить уже при $Re_0 = 2500$. Подобные результаты хорошо согласуются с данными численных расчетов, приведенных К.Кitchens'ом в работе [6], и позволяют установить перераспределение окружной скорости.

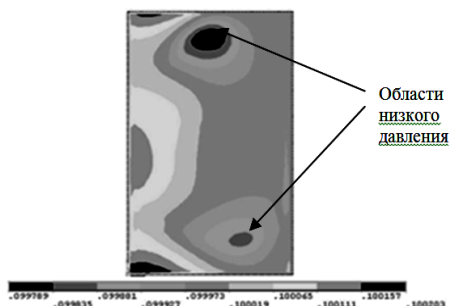


Рис.4. Распределение давления в меридиональной плоскости цилиндра при $Re_0 = 1030$

Следует отметить, что расположение областей низкого давления, то есть, центров циркуляций, в диапазоне чисел Рейнольдса $Re_0 = 970 - 2500$ носит достаточно устойчивый характер. Как правило, они содержат одну базовую циркуляцию, пример которой приведен на рис.3,б, занимающую приосевую и среднюю области сосуда, а также более мелкие и низкоскоростные структуры, расположенные по периферии вокруг нее. Однако, существенного влияния на формирование силовых воздействий жидкости на стенки сосуда они не оказывают.

Численное моделирование нестационарного течения при внезапной остановке вращения цилиндра позволило определить характер изменения вторичных течений в различные моменты процесса затухания от твердотельного вращения с оболочкой ($t \leq 0$) до полного затухания при безразмерном времени $T = 27,3$.

На рис.5 приведен пример эволюции двух циркуляций в одну при $Re_0 = 1000$ в период времени $T = 1,57 - 11,3$. Как видно из изображений траекторий жидких частиц, центры циркуляций смещаются к оси вращения от радиальной координаты $R = 0,83$ при $T = 1,57$ до $R = 0,67$ при $T = 11,3$, что подтверждается результатами экспериментальных измерений поля окружной скорости.

Таким образом, проявляется влияние пристеночного заторможенного течения на формирование циркуляций, способствующего слиянию мелких структур в более крупные и низкоскоростные вторичные течения. Указанные закономерности затухания вторичного течения после внезапной остановки вращения подтверждают наши предположения о преобладающем влиянии вязкой диффузии в завершающей стадии течения и тенденции к объединению циркуляций в более крупные низкоскоростные структуры.

Дальнейшее увеличение начальных чисел Рейнольдса, $Re = 1700 - 5700$, приводит к появлению 3-х и более циркуляций и пропорциональному возрастанию скоростей, которые в свою очередь вызывают увеличение сил вязкого трения жидкости о стенки. При этом никаких качественных изменений в картине распределения скоростей не наблюдается. Варьирование параметрами кинематического коэффициента вязкости ν и начальной угловой скорости цилиндра Ω_0 , составляющих величину начального числа Рейнольдса Re_0 , также не оказывает заметного влияния на результаты решения системы уравнений. В целом же, характер распределения компонент вектора скорости, как окружной u , так радиальной v и меридиональной w , соответствует результатам, полученным при экспериментальных измерениях.

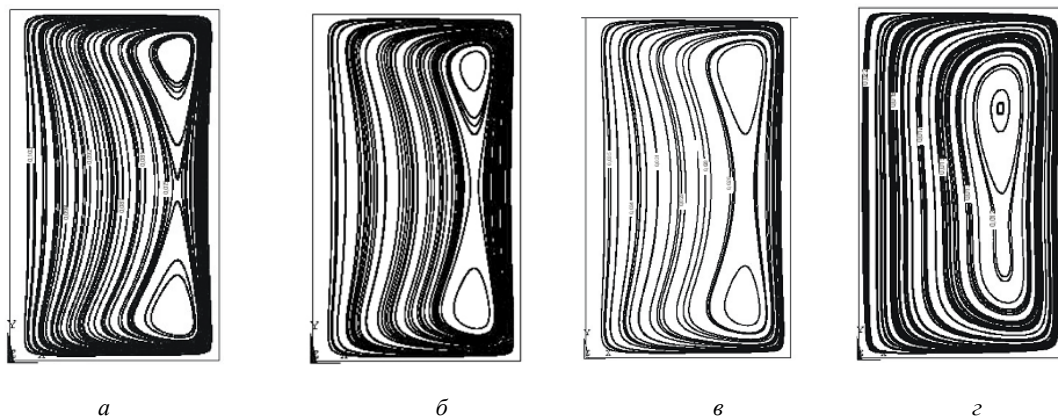


Рис.5. Пример преобразования двух циркуляций в одну в меридиональной плоскости цилиндра при возрастании времени течения T , $Re_0 = 1000$: а - $T = 1,57$; б - $3,44$; в - $7,52$; г - $11,3$ T

При рассмотрении нестационарной картины распределения скоростей циркуляций следует отметить почти одинаковый характер их изменения во времени, когда с возрастанием T мелкие циркуляции объединяются в более крупные структуры с меньшими градиентами скорости. В результате, при больших значениях безразмерного времени $T = 17,2 - 25,5$ имеет место одно-циркуляционная низкоскоростная структура, меридиональная скорость которой составляет $0,2 - 0,5$ мм/с.

Выводы

Анализируя и обобщая результаты численного моделирования замкнутых течений жидкости в цилиндре в широком диапазоне чисел Рейнольдса, можно заключить следующее. Благодаря криволинейной геометрии замкнутого осесимметричного течения в меридиональных плоскостях сосуда возникают нестационарные

циркуляції, оказывающие влияние на формирования поля азимутальной скорости течения. При возрастании времени затухания скорости течения, благодаря влиянию сил вязкости, более мелкие циркуляции объединяются и образуют более крупные структуры.

Наиболее значительные отклонения скоростей от твердотельного характера распределения скорости имеют место в экваториальной области сосуда, где наиболее сильно выражено неравновесие центробежных сил инерции и радиальных градиентов давления. Результаты численного расчета подтверждают структуру циркуляций в рассматриваемом диапазоне критериальных параметров и позволяют качественно оценить силовое влияние течений на стенки резервуара.

Варьируя величинами начальной угловой скорости, вязкости жидкости и т.д. можно установить значения круговых моментов вязкого трения жидкости о стенки резервуара и таким образом прогнозировать величины и направления компенсационных воздействий на возмущения со стороны жидкого топлива на борту космического аппарата. Это, в свою очередь, позволит сократить затраты топлива на ориентационные и компенсационные развороты объекта, увеличить продолжительность полета объекта и повысить надежность управления им в условиях штатного маневрирования. Перспективными численными исследованиями представляются построения имитационных моделей течений в трехмерной постановке, с учетом таких критериальных параметров как числа Эйлера, Струхала и Россби.

Анотація. Наведено результати імітаційного моделювання інерційних вісесиметричних течій в'язкої нестисливої рідини в циліндричному резервуарі після різкої зупинки його обертання. Представлені результати чисельного розрахунку рівнянь руху рідини у формі Нав'є-Стокса з відповідними граничними та початковими умовами у широкому діапазоні зміни куткових швидкостей, в'язкості рідини та критериальних параметрів Рейнольдса, Струхала та ін.. Наведені лінії течій і поля тисків дозволяють побудувати нестационарну картину розвитку циркуляцій у меридіональних площинах циліндра і встановити їх вплив на формування поля азимутальної швидкості. Отримані чисельні результати відрізняються від відомих даних більш широким діапазоном моделювання та урахуванням всіх нелінійних особливостей розподілу швидкостей частинок рідини.

Ключові слова: чисельне моделювання, циліндричний резервуар, рівняння руху рідини, числа подібності, поле швидкостей і тисків.

Abstract. The results of the inertial axisymmetric flows simulation of incompressible viscous fluid in a cylindrical tank after a sudden stop of its rotation are presented. There are results of numerical calculation of the Navier-Stokes equations with the appropriate boundary and initial conditions in a wide range of angular velocities, viscosity, and criterion parameters Reynolds, Strouhal, etc. These streamlines and pressure field can build a picture of the time-dependent circulation in the cylinder's meridional planes and establish their influence on the azimuthal velocity field structure. The obtained numerical results differ from the known data over a wide range of modeling and taking into account all nonlinear characteristics of the velocity distribution of the fluid particles.

Keywords: numerical modeling, cylindrical tank, equations of fluid motion, similarity number, velocity field and pressure field.

Библиографический список использованной литературы

1. Dodge F. The new dynamic behavior of liquids in moving containers / Southwest Res. Institute, Texas, U.S.A. – 2000. – 202p.
2. Ковалев В.А. Критериальная оценка физической модели гидродинамических процессов в топливных баках космического аппарата // Вестник НТУУ «КПИ», Машиностроение, 2009. - вып.55. - С.22-28.
3. Ковалев В.А., Носко С.В. Решение уравнений Навье-Стокса для инерционного течения в цилиндре, заполненном жидкостью // Вестник НТУУ «КПИ», Машиностроение, 2002. - вып. 42, Т. 1. - С.41-44.
4. Ковалев В.А., О.Яхно. Особенности циркуляционных течений жидкого топлива в баках космического аппарата // Hydraulics & Pneumatics, Wroclaw, Poland, Сб. трудов конференции. – 2009. - С. 296-302
5. Kitchens C. Navier-Stokes solution for spin-up in a filled cylinder // AIAA Journal. - 1980. - vol.18, № 8. - p.929-934.
6. Xinjun C. A Numerical Study of the Recirculation Zones During Spin-Up and Spin-Down for Confined Rotating Flows // Journal of Theoretical and Computation in Fluid Dynamics. - 2003. - vol.1. - p.31-49.

References

1. Dodge F. The new dynamic behavior of liquids in moving containers. F.T.Dodge. Southwest Res. Institute, Texas, U.S.A. 2000, 202 p.
2. Kovalev V.A. Kriteriálnaya otsenka fizicheskoy modeli gidrodinamicheskikh processov v toplivnih bakah kosmicheskogo apparata. Vestnik NTUU "KPI", Mashinostroyeniye, 2009, No.55, pp.22-28.
3. Kovalev B.A., Nosko S.V. Resheniye uravneniy Navye-Stoksa dlya inertsionnogo techeniya v tsilindre, zapolnennom zhidkostyu. Vestnik NTUU "KPI", Mashinostroyeniye, 2002, No.42, T.1. pp.41-44.
4. Kovalev V., Yakhno O. Osobennosti tsirkulatsionnih techeniy zhidkogo topliva v bakah kosmicheskogo apparata. Hydraulics & Pneumatics, Wroclaw, Poland, Sb. trudov konferentsiyi. 2009, pp.296-302.
5. Kitchens C. Navier-Stokes solution for spin-up in a filled cylinder. AIAA Journal. 1980, vol.18, No8, pp.929-934.
6. Xinjun C. A Numerical Study of the Recirculation Zones During Spin-Up and Spin-Down for Confined Rotating Flows. Journal of Theoretical and Computation in Fluid Dynamics. 2003. vol.1, pp.31-49.