

УДК 532.516

Весков Е.В.

ГП «КБ «Южное» им. Янгеля», г. Днепропетровск, Украина

МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ В БЕССЕТОЧНОМ МЕТОДЕ СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Veskov E.

«Yuzhnoye» state design office, Dnepropetrovsk, Ukraine (vs198080@mail.ru)

METHODS OF MAINTENANCE OF STABILITY OF THE SOLUTION IN SMOOTHED PARTICLES HYDRODYNAMICS

Для исследования течений жидкости со свободной поверхностью применяется бессеточный метод сглаженных частиц SPH (Smoothed Particles Hydrodynamics). Анализируются несколько приемов обеспечения устойчивости SPH: применение отталкивающих сил, действующих на частицы жидкости; использование ядер специального вида; вычисления с переменным радиусом сглаживания; адаптация, основанная на расщеплении частиц; интегрирование уравнений движения с помощью симплектических интеграторов.

Вычислительные эксперименты показали, что для задач с простой геометрией (разрушение плотины) для обеспечения устойчивости достаточно применить ядро Гаусса и симплектический интегратор Верле. Для задач со сложной геометрией и плохообтекаемыми телами необходимо дополнительно использовать адаптацию частиц и переменный радиус сглаживания.

Результаты работы могут использоваться в гидродинамических расчетах гидротехнических сооружений, а также при исследовании процессов в топливных баках летательных аппаратов.

Ключевые слова: бессеточный метод сглаженных частиц, адаптация частиц, устойчивость, Smoothed Particles Hydrodynamics, tensile instability

Введение

Бессеточный метод сглаженных частиц SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) является бессеточным лагранжеевым методом. Область применения метода находится в пределах от микро- до макромасштаба, и даже астрономического масштаба [1]. SPH позволяет решать задачи со свободными поверхностями и деформируемыми границами. SPH применяется для решения задач астрофизики, гидродинамики, механики деформируемых тел, моделирования подводных взрывов [1], [2].

Бессеточный метод сглаженных частиц обладает следующими преимуществами по сравнению с сеточными методами:

1. Уравнение переноса скалярной величины решается точно. Численная диффузия не возникает [2].
2. Движение частиц неявно удовлетворяет кинематическому условию на свободной поверхности, а отсутствие сетки делает тривиальным решение сложных задач со свободной поверхностью [3].
3. Частицы могут интерпретироваться как система дискретных частиц или части континуума.
4. SPH является лучшим методом исследования хрупкого разрушения твердых тел [2].

К недостаткам SPH относятся высокая чувствительность к пространственному положению частиц, сложность вычисления вторых производных, большой объем вычислений [1], [3].

Основной проблемой метода является неустойчивость (tensile instability, clumping particles), которая проявляется как скопление частиц или отрыв частиц друг от друга на большие расстояния. Неустойчивость обусловлена вычислением давления и скорости в одной точке, а также ошибками аппроксимации при замене интегрирования суммированием в SPH интерполяции.

Цель работы

Целью данной работы является исследование методов обеспечения устойчивости решения в SPH.

В качестве объектов исследований выбраны задачи о разрушении плотины и сливе жидкости из бака. Расчетные схемы плотины и бака приведены на рисунке 1а и 1б соответственно.

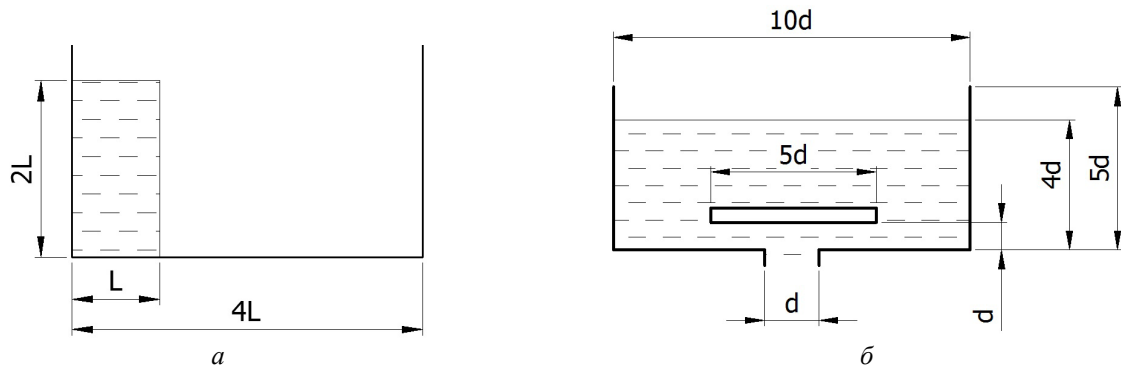


Рис. 1. Расчетные схемы

Плотина представляет собой столб жидкости длиной L и высотой $2L$ в верхнем бьефе, отделенный от нижнего бьефа перегородкой, которая мгновенно разрушается в начальный момент времени $t = 0$.

Бак является плоской прямоугольной емкостью с заборным устройством в виде пластины, установленной над входом в сливное отверстие. В начальный момент времени $t = 0$ жидкость находится в состоянии покоя, затем начинает истекать через отверстие в нижнем днище с постоянной скоростью V . С помощью численного моделирования определяется форма свободной поверхности в жидкости и момент прорыва газа под пластину заборного устройства [4].

Постановка задачи

Для определения формы свободной поверхности жидкости применим уравнения Навье-Стокса совместно с уравнением неразрывности и уравнением состояния Тейта для слабосжимаемых жидкостей [3], [1]

$$\frac{d\bar{v}^\alpha}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} + \bar{F}^\alpha, \quad (1)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \bar{v}, \quad (2)$$

$$P = B \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right], \quad (3)$$

$$B = c_0^2 \rho_0 / \gamma, \quad c^2(\rho) = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{B\gamma}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = \frac{B\gamma}{\rho_0^\gamma} \rho^{\gamma-1}, \quad c_0^2 = c^2(\rho_0) = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = \frac{B\gamma}{\rho_0},$$

\bar{F} - внешняя сила, приходящаяся на единицу массы, м/с²; α и β - индексы координат; B - модуль упругости жидкости кг/(м·с²); ρ_0 - плотность на свободной поверхности, кг/м³; γ - показатель политропы, значения которого обычно лежат в пределах от 1 до 7; c_0 - скорость звука при плотности ρ_0 , м/с; c - скорость звука при плотности ρ , м/с; $\delta^{\alpha\beta}$ - символ Кронекера; σ - тензор напряжений, который состоит из двух слагаемых: изотропного давления p и тензора вязких напряжений τ

$$\sigma^{\alpha\beta} = -p\delta^{\alpha\beta} + \tau^{\alpha\beta}. \quad (4)$$

Для ньютоновских жидкостей тензор вязких напряжений пропорционален тензору скоростей деформаций ε с коэффициентом пропорциональности μ

$$\tau^{\alpha\beta} = \mu \varepsilon^{\alpha\beta}, \quad (5)$$

где

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{\partial \bar{v}^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \bar{v}^\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \bar{v}) \delta^{\alpha\beta}. \quad (6)$$

Для аппроксимации функций, входящих в уравнения (1) и (2) используется метод интегральных представлений (аппроксимация функцией ядра). Интегральное представление в дальнейшем аппроксимируется частицами. Аппроксимация осуществляется заменой интегрирования функции и ее производных суммированием по всем соответствующим значениям функции в соседних частицах в локальной области, размеры которой определяются радиусом сглаживания h . Для поиска соседних частиц в данной работе используется алгоритм поиска по квадродереву [1].

Аппроксимация частицами производится на каждом временном шаге и применяется ко всем функциям, входящим в уравнения с частными производными для получения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Обыкновенные дифференциальные уравнения решаются путем численного интегрирования.

В основе интегрального представления функции $f(x)$ лежит следующее тождество [1]:

$$f(x) = \int_{\Omega} f(x') \delta(x - x') dx', \quad (7)$$

где f - функция трехмерного вектора положения x ;

$\delta(x - x')$ - дельта-функция Дирака, определяемая по формуле:

$$\delta(x - x') = \begin{cases} 1 & x = x' \\ 0 & x \neq x' \end{cases}. \quad (8)$$

В уравнении Ω - область интегрирования, содержащая x .

Если дельта-функцию (5) заменить сглаживающей функцией $W(x - x', h)$ с пределом $\lim_{h \rightarrow 0} W(x - x', h) = \delta(x - x')$ в уравнении (4), интегральное представление $f(x)$ запишется в виде

$$\langle f(x) \rangle = \int_{\Omega} f(x') W(x - x', h) dx', \quad (9)$$

где W - сглаживающая функция ядра, далее для краткости ядро. Угловые скобки $\langle \rangle$ обозначают аппроксимацию функцией ядра; h - сглаживающий радиус, определяющий область влияния сглаживающей функции.

Пространственная производная $\nabla \cdot f(x)$ определяется с помощью соотношения [1]:

$$\langle \nabla \cdot f(x) \rangle = \int_{\Omega} f(x') \nabla_x W(x - x', h) dx'. \quad (10)$$

Далее вычислительная область дискретизируется частицами, каждая частица j имеет массу m_j , плотность ρ_j и объем m_j / ρ_j . Дискретная форма уравнений (6) и (7) запишется в виде [1]:

$$\langle f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) W_{ij}, \quad (11)$$

$$\langle \nabla \cdot f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) \nabla_i W_{ij}, \quad (12)$$

где r_{ij} - расстояние между частицами,

$$W_{ij} = W(x_i - x_j, h) = W(|x_i - x_j|, h), \quad \nabla_i W_{ij} = \frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_{ij}}, \quad (13)$$

В качестве сглаживающего ядра часто используются функция Гаусса и кубический сплайн.

Сглаживающая функция Гаусса [3], [1]:

$$W(r, h) = \alpha_d e^{-q^2}, \quad (14)$$

где $r = |x_i - x_j|$, $q = \frac{|x_i - x_j|}{h}$, α_d равно $1/\pi^{1/2} h$, $1/\pi h^2$ и $1/\pi^{3/2} h^3$ соответственно в одно-, двух- и трехмерном пространстве.

Сглаживающее ядро в форме кубического сплайна [1], [3]:

$$W(r, h) = \alpha_d \times \begin{cases} \frac{2}{3} - q^2 + \frac{1}{2} q^3 & 0 \leq q < 1 \\ \frac{1}{6} (2 - q)^3 & 1 \leq q < 2 \\ 0 & q \geq 2 \end{cases}. \quad (15)$$

В одно-, двух- и трехмерном пространстве α_d равно $1/h$, $15/7\pi h^2$ и $3/2\pi h^3$ соответственно.

Используя формулы (8) – (9), приведем уравнения (1) и (2) к виду [1]:

$$\left\langle \frac{d\bar{v}^\alpha}{dt} \right\rangle_i = -\sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} + \sum_{j=1}^n m_j \left(\frac{\mu_i \varepsilon_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\mu_j \varepsilon_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} + \bar{F}^\alpha, \quad (16)$$

$$\left\langle \varepsilon^{\alpha\beta} \right\rangle_i = \sum_{j=1}^n \frac{m_j \bar{v}_{ji}^\beta}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\alpha} + \sum_{j=1}^n \frac{m_j \bar{v}_{ji}^\alpha}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} - \left(\frac{2}{3} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} \bar{v}_{ji} \cdot \nabla_i W_{ij} \right) \delta^{\alpha\beta},$$

$$\left\langle \frac{d\rho}{dt} \right\rangle_i = \sum_{j=1}^n m_j (\bar{v}_i^\beta - \bar{v}_j^\beta) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (17)$$

или

$$\langle \rho \rangle_i = \sum_{j=1}^n m_j W_{ij}. \quad (18)$$

Уравнения (12), (13) интегрируются по схеме чехарда [1].

$$\mathbf{v}^{n+1/2} = \mathbf{v}^{n-1/2} + \delta t \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}^n), \quad \mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \delta t \cdot \mathbf{v}^{n+1/2}, \quad \rho^{n+1} = \rho^n + \delta t \cdot g(\mathbf{v}^n, \mathbf{x}^n), \quad (19)$$

где f_1, f_2 — правые части уравнений (12) и (13) соответственно.

Для выполнения граничных условий на твердой стенке применяются динамические частицы [3].

Динамические граничные частицы имеют те же свойства, что и частицы жидкости. Они удовлетворяют тем же уравнениям состояния, неразрывности и энергии. Однако они являются неподвижными или движутся в соответствии с заданным законом.

Граничное условие в сливном отверстии бака ставится по следующему алгоритму [4].

На границе создаются два слоя неподвижных частиц, которые имеют те же свойства, что и частицы жидкости. Они удовлетворяют тем же уравнениям состояния и неразрывности.

Каждой частице присваивается значение скорости в соответствии с профилем скорости на границе.

Частицы жидкости удаляются из вычислительной области при достижении границы.

Методы обеспечения устойчивости можно разделить на 5 групп: 1) Применение отталкивающих сил, предотвращающих кластеризацию частиц; 2) Использование ядер специального вида; 3) Вычисления с переменным сглаживающим радиусом; 4) адаптация сетки частиц в соответствии с заданным критерием или перестройка сетки частиц; 5) Интегрирование уравнений движения с помощью симплектических интеграторов.

Наиболее естественным является представление отталкивающей силы в виде функции ядра. Подходящая функция, которая возрастает с убыванием расстояния между частицами может быть записана в виде [5]:

$$f_{ij} = \frac{W(r_{ij})}{W(\Delta p)}, \quad (20)$$

где Δp - среднее расстояние между частицами.

В правую часть уравнения движения добавим член:

$$\Delta F_{ij} = R f_{ij}^n, \quad (21)$$

где $n > 0$, и множитель R зависит от давления и плотности. Отталкивающую силу можно интерпретировать как искусственное давление $R = R_i + R_j$, $R_i = \varepsilon |P_i| / \rho_i^2$, R_j вычисляется аналогично.

Как правило, принимают $\varepsilon = 0,2$, хотя необходимое значение зависит от h , n и количества пространственных измерений. При решении задач динамики жидкости $n = 4$ для обеспечения влияния только ближайших соседних частиц на искусственное давление.

Также применяется отталкивающая сила в форме потенциала Леннарда-Джонса [6]:

$$\mathbf{F}_{Pij} = \begin{cases} \left[\left(\frac{r_0}{r_{ij}} \right)^{n_1} - \left(\frac{r_0}{r_{ij}} \right)^{n_2} \right] \frac{\beta \mathbf{x}_{ij} v_{\max}^2}{r_{ij}^2} \frac{r_0}{r_{ij}} \leq 1 \\ 0 & \frac{r_0}{r_{ij}} > 1 \end{cases}, \quad (22)$$

где $n_1 = 12$, $n_2 = 6$ - показатели степени; β - зависящий от задачи параметр; $r_0 \approx h_0$ - радиус отсечения.

Ядра специального вида действуют аналогично отталкивающей силе.

Ядро Linear Quartic Kernel получается модификацией ядра кубического сплайна с целью обеспечения постоянства первой производной [7]. Ядро является гладким, первая производная - монотонно возрастающая функция.

$$w_r(q) = \begin{cases} F - q & 0 \leq q < x_s \\ Aq^4 + Bq^3 + Cq^2 + Dq + E & x_s \leq q < 1 \\ 0 & 1 \leq q \end{cases} \quad (23)$$

x_s - свободный параметр, определяющий связующую точку между линейной и полиномиальной функциями,

$$w(q) = N/h^d \cdot w_r(q), \quad \alpha = 1/(x_s^3 - 3x_s^2 + 3x_s - 1), \quad A = \alpha/2, \quad B = -\alpha(1 + x_s), \quad C = 3\alpha x_s, \quad D = -\alpha(-1 + 3x_s),$$

$$E = \alpha(2x_s - 1)/2, \quad F = Ax_s^4 + Bx_s^3 + Cx_s^2 + Dx_s + E + x_s, \quad N = \left[\int_0^{x_s} w_r(q) dq + \int_{x_s}^1 w_r(q) dq \right]^{-1}.$$

Переменный сглаживающий радиус для каждой частицы на каждом шаге интегрирования по времени можно определить из дополнительных соотношений.

Изменение сглаживающего радиуса в соответствии с изменением плотности [1]:

$$h = h_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/d}. \quad (24)$$

Изменение сглаживающего радиуса в зависимости от соотношения массы и плотности [1]:

$$h = K \left(\frac{m}{\rho} \right)^{1/d}, \quad K = 2. \quad (25)$$

Решение дифференциального уравнения для сглаживающего радиуса [1]:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{d} \frac{h}{\rho} \frac{d\rho}{dt}, \quad (26)$$

здесь d - количество пространственных измерений; h_0 - начальная длина сглаживающего радиуса; ρ_0 - начальная плотность жидкости.

Адаптивная оценка плотности (Adaptive kernel density estimation) выполняется по следующему алгоритму [8]:

1. Вычисляется плотность частиц на текущем шаге по времени по уравнению (18):
2. Вычисляется среднее геометрическое плотности на текущем шаге по времени:

$$\log \bar{g} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \hat{\rho}_i. \quad (27)$$

3. Вычисляется локальный множитель: $\lambda_i = k \left(\frac{\hat{\rho}_i}{\bar{g}} \right)^{-\varepsilon}$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, k - масштабный множитель

4. Определяется новое значение радиуса сглаживания: $h_i = \lambda_i h_0$.

Для определения частицы, которая должна быть подвергнута адаптации в процессе численного моделирования могут использоваться различные критерии в зависимости от задачи. В [9] использованы зоны адаптации, расщеплялись все частицы, которые попадали в зону. Количество соседних частиц также можно использовать, частицы с малым числом соседей можно расщеплять для обеспечения необходимой локальной ошибки аппроксимации. Критерий адаптации может быть основан на физических свойствах. Например, в работе [10] использовался критерий градиента скорости.

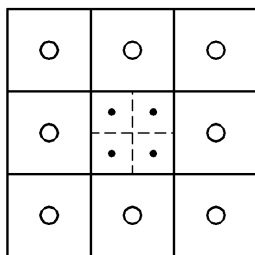


Рис. 2. Адаптация частиц. Закрашенные кружки – новые дочерние частицы

Процедура адаптации, примененная в данной работе основана на расщеплении частиц, в качестве критерия адаптации использовались зоны адаптации [11], [12]. Если частица i с уровнем адаптации l_i подвергается расщеплению, то она заменяется четырьмя частицами $k=1...4$, помещенными в квадратный шаблон с центром в частице i , как показано на рис. 2.

Введем два параметра: параметр расщепления $\eta \in (0,1)$ и отношение сглаживающих радиусов $\alpha \in (0,1)$. Первый параметр определяет размеры шаблона, дочерние частицы помещаются в квадрат со стороной $d = \eta d_r$, где d_r - расстояние, равное начальному расстоянию между частицами. Отношение сглаживающих радиусов α связывает радиус сглаживания дочерней частицы h_k и радиус сглаживания исходной частицы h_i соотношением $h_k = \alpha h_i$.

Остальные свойства частиц определяются из условия выполнения законов сохранения следующим образом:

$$m_k = \frac{m_i}{4}, v_k = v_i, \rho_k = \rho_i, l_k = l_i + 1.$$

Определим ошибку адаптации. Рассмотрим выражение для градиента, примем во внимание симметрию ядра. Хотя в этой работе используется квадратный шаблон, рассмотрим вывод выражения для ошибки в общем случае, когда частица n расщепляется на M дочерних частиц [11]. При адаптации частицы градиент функции меняется следующим образом:

$$\langle \nabla f(x) \rangle^* = \langle \nabla f(x) \rangle - \frac{m_n}{\rho_n} f(x_n) \nabla W_n(x) + \sum_{k=1}^M \frac{m_k}{\rho_k} f(x_k) \nabla W_k(x). \quad (28)$$

Локальная ошибка, возникающая в x в результате адаптации частицы n может быть определена как сумма квадратов ошибки в каждом направлении градиента, т.е.

$$e_n(x) = \left(\left\langle \frac{\partial f(x)}{\partial x^\alpha} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial f(x)}{\partial x^\alpha} \right\rangle^* \right)^2 = m_n^2 \left(\frac{f(x_n)}{\rho_n} \frac{\partial W_n(x)}{\partial x^\alpha} - \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{f(x_k)}{\rho_k} \frac{\partial W_k(x)}{\partial x^\alpha} \right)^2 \quad (29)$$

где $m_k = \lambda_k m_n$ и $\sum_{k=1}^M \lambda_k = 1$ для удовлетворения условия сохранения массы, и α - индекс суммирования, который изменяется по правилу Эйнштейна.

Глобальная ошибка запишется в виде:

$$E_n = \int_{\Omega} e_n(x) dx. \quad (30)$$

Используя уравнение неразрывности в форме (18) и принимая, что скорость дочерних частиц скопированных из родительской частицы, локальная ошибка вносимая адаптацией в аппроксимацию пространственной производной определяется как:

$$e_n^\rho = \left\langle \frac{D\rho(x)}{Dt} \right\rangle - \left\langle \frac{D\rho(x)}{Dt} \right\rangle^* = m_n (v(x) - v_n) \cdot \left(\nabla W_n(x) - \sum_{k=1}^M \lambda_k \nabla W_k(x) \right), \quad (31)$$

Глобальная ошибка запишется в виде:

$$E_n = \int_{\Omega} e_n(x) dx. \quad (32)$$

Рассмотрим специальный случай. Используя уравнение неразрывности в форме (18) и принимая, что скорость дочерних частиц копируется из родительской частицы, локальная ошибка адаптации в аппроксимации производной плотности определяется как:

$$e_n^\rho = \left\langle \frac{D\rho(x)}{Dt} \right\rangle - \left\langle \frac{D\rho(x)}{Dt} \right\rangle^* = m_n (v(x) - v_n) \cdot \left(\nabla W_n(x) - \sum_{k=1}^M \lambda_k \nabla W_d(x) \right), \quad (33)$$

где глобальная ошибка может быть получена как

$$E_n^\rho = m_n^2 \int_{\Omega} \left[(v(x) - v_n) \cdot \left(\nabla W_n(x) - \sum_{k=1}^M \lambda_k \nabla W_k(x) \right) \right]^2 dx. \quad (34)$$

Определим следующую задачу: найти $(x_k; h_k; \lambda_k)$ с $k=1..M$ так чтобы E_n^ρ был минимальным.

Так как E_n^ρ зависит от v , которая изменяется в пространстве и времени, задача должна быть решена каждый раз при адаптации частицы, что интенсифицирует вычисления. Принимаем во внимание, что значение скоростей не меняется во времени t когда улучшение производится, аппроксимация решения задачи может быть получена минимизацией

$$E_n^{\nabla W} = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial W_j(x)}{\partial x^\alpha} - \sum_{k=1}^M \lambda_k \frac{\partial W_k(x)}{\partial x^\alpha} \right)^2 dx, \quad (35)$$

которую мы обозначим как ошибку градиента ядра.

Значение $E_n^{\nabla W}$ зависит от $h(x)$, которая также меняется в пространстве и времени в процессе адаптации. Однако, если мы фиксируем параметр адаптации α , где только два возможных числа для сглаживающего радиуса: h_0 , которая является начальным набором значений для неадаптированных частиц и αh_0 - для дочерних частиц. Принимая это анализ $E_n^{\nabla W}$ можно упростить. Рассмотрим два случая: 1) $h(x) = h_0, \forall x \in I_D$, где I_D - область влияния адаптируемой частицы; 2) $h(x) = \alpha h_0, \forall x \in I_D$. Решение, которое

дає найменше значення $E_n^{\nabla W}$ для цих двох випадків може бути вибрано як апроксимація рішення оптимізаційної задачі.

На практиці зазвичай використовують значення коефіцієнтів $\alpha = 0,5$ і $\eta = 0,5$.

Для інтегрування рівнянь (12), (13) цілесообразно застосовувати метод Верле [2], який є симплектичним інтегратором і забезпечує виконання законів збереження для гамільтонових систем з сепарабельним гамільтонианом.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{1/2} &= \mathbf{x}^0 + \frac{1}{2} \delta t \cdot \mathbf{v}^0, \quad \rho^{1/2} = \rho^0 + \frac{1}{2} \delta t \cdot f_2(\mathbf{x}^0), \\ \mathbf{v}^1 &= \mathbf{v}^0 + \frac{1}{2} \delta t \cdot f_1(\mathbf{x}^{1/2}), \quad \rho^1 = \rho^{1/2} + \frac{1}{2} \delta t \cdot f_2(\mathbf{x}^1), \quad \mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^{1/2} + \frac{1}{2} \delta t \cdot \mathbf{v}^1. \end{aligned} \tag{36}$$

На рисунку 3а представлені результати розрахунку руйнування плотини з використанням ядра кубічного сплайна і схеми чехарда, на рисунку 3б – ядра Гаусса і схеми чехарда, 3в – ядра Гаусса і схеми Верле. Найбільш стійким є рішення з застосуванням ядра Гаусса і схеми Верле. Кількість частинок рідини – 3200.

Розрахунок слива з бака проводився з використанням ядра Гаусса, схеми Верле і адаптивної оцінки щільності, кількість частинок рідини – 15000. Результати розрахунку недовольствительні. Регулярність сітки частинок порушується під пластини. Для запобігання нестійкості використовувалася адаптація сітки частинок біля пластини і сливного отвору [4]. Форма вільної поверхні збігається з експериментальною. Рішення стійке. На рисунку 3а показані результати експерименту [13], на рисунках 3б і 3в результати розрахунку без адаптації і з адаптацією відповідно. Відлік часу від моменту прориву газу під пластину.

Застосування ядра LIQ призводить до руйнування сітки частинок на перших кроках інтегрування, ймовірно внаслідок малого числа частинок [7]. Відштовхувальна сила в формі (22) мала вплив на хід рішення, або призводила до руйнування сітки частинок. Вільність вибору параметра β ускладнює застосування цього методу.

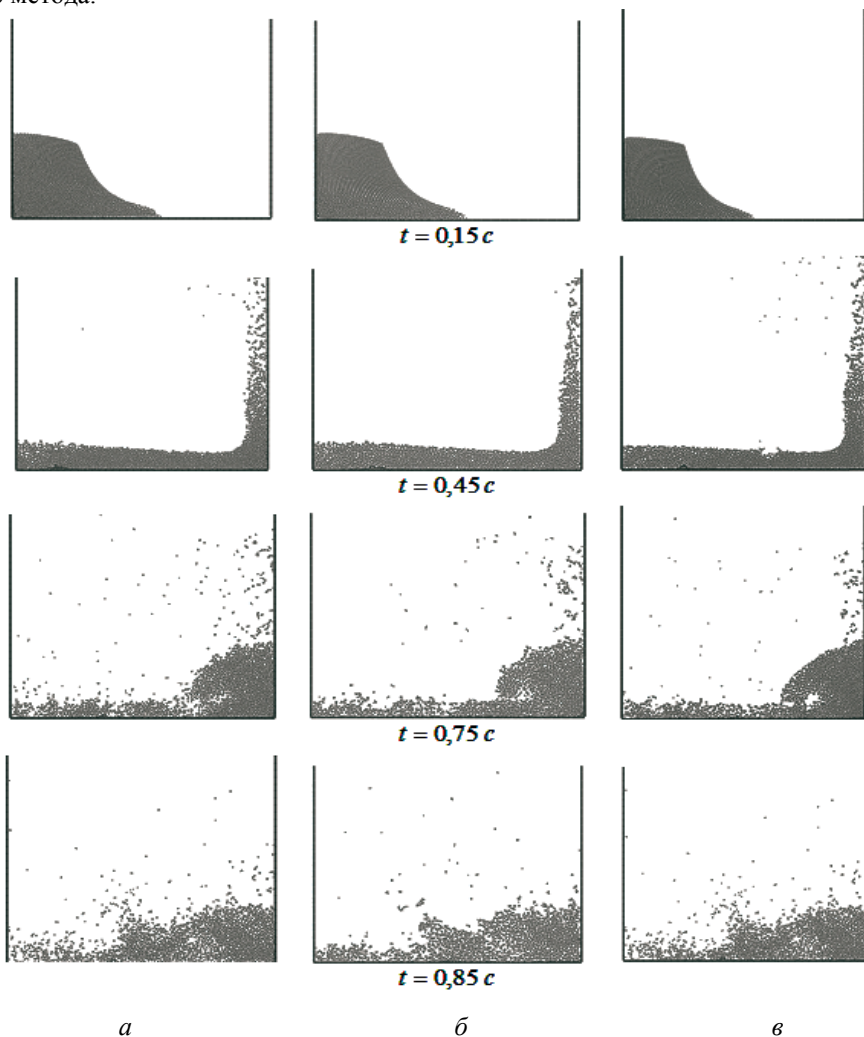


Рис. 3. Результати розрахунку руйнування плотини

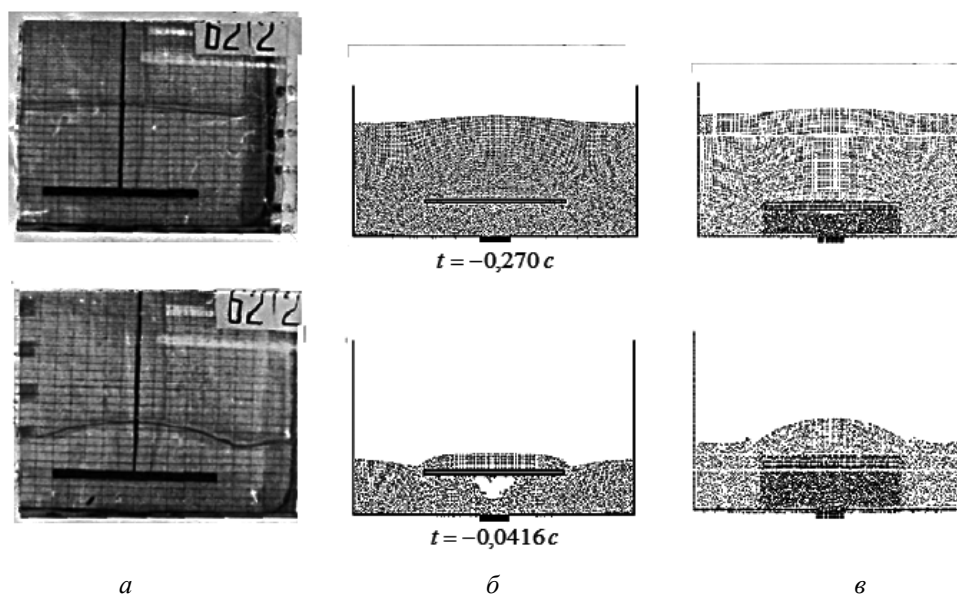


Рис. 4. Результати расчета слива из бака

Выводы

Результаты работы могут использоваться в гидродинамических расчетах гидротехнических сооружений и расчетах процессов в топливных баках летательных аппаратов. В дальнейшем целесообразна разработка методов обеспечения устойчивости решения путем перестройки сетки частиц во всей расчетной области и интерполяции параметров жидкости со старой сетки на новую.

Анотація. Для дослідження течії рідини з вільною поверхнею застосовується безітковий метод згладжених часток SPH (Smoothed Particles Hydrodynamics). Аналізуються кілька прийомів для забезпечення стійкості SPH: застосування відштовхуючих сил, що діють на частки рідини; використання ядер спеціального виду; обчислення зі змінним радіусом згладжування; адаптація, заснована на розщепленні часток; інтегрування рівнянь руху за допомогою симплектичних інтеграторів.

Обчислювальні експерименти показали, що для задач із простою геометрією (руйнування греблі) для забезпечення стійкості достатньо застосувати ядро Гаусса й симплектичний інтегратор Верле. Для задач зі складною геометрією й тілами, що погано обтікаються необхідно додатково використовувати адаптацію часток і змінний радіус згладжування. Результати роботи можуть використовуватися в гідродинамічних розрахунках гідротехнічних споруджень, а також при дослідженні процесів у паливних баках літальних апаратів.

Ключові слова: безітковий метод згладжених часток, адаптація часток, стійкість, Smoothed Particles Hydrodynamics, tensile instability

Abstract.

Purpose. Study of the procedures for solution stability provision in SPH.

Design/methodology/approach. The following procedures are discussed: application of repulsive forces affected the fluid particles; application of specific-type kernels; calculations with a variable smoothing length; refinement based on fission of particle; integration of motion equations using symplectic integrators.

Findings. It is enough to apply the Gaussian kernel and Verlet symplectic integrator to solve problems with a simple geometry (dam failure) to ensure stability. To solve problems with a complex geometry and high-drag bodies, it is required to apply additionally the particles refinement and a variable smoothing length. Application of repulsive forces depending on selection of problem-dependent parameters can result in instability for a small amount of particles (up to 15,000 particles).

Originality/value. The study results can be used in hydrodynamic calculations for hydraulic architecture and in calculations of processes in aircraft fuel tanks.

Keywords: Smoothed Particles Hydrodynamics, tensile instability, particles refinement

Библиографический список использованной литературы

1. Liu G.R., Liu M.B. Smoothed particles hydrodynamics a meshfree particles method /G. R. Liu, M. B. Liu. – Singapore: «World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.», 2003. – 472 с. – ISBN 981-238-4456-1.
2. Monaghan J.J. Smoothed particles hydrodynamics [Электронный ресурс] / J.J. Monaghan // Reports on Progress in Physics, Vol.68 (2005), pp.1703-1759. – Режим доступа: <http://iopscience.iop.org/0034-4885/68/8/R01/>
3. Crespo A.J. Application of the Smoothed Particle Hydrodynamics model SPHysics to free surface hydrodynamics: PhD Thesis 01.06.2008 [Электронный ресурс] / A. J. Crespo. – Universidade de Vigo, 2008. – Режим доступа: http://cfd.mace.manchester.ac.uk/sph/SPH_PhDs/2008/crespo_thesis.pdf

4. *Весков Е.В.* Численное моделирование слива жидкости из топливного бака ракеты-носителя /Е. В. Весков – Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Ракетно-космічна техніка», 2012, № 5. Вип. 16, том 2 – 316 с. – ISSN 9125 912
5. *Monaghan J.J.* SPH without tensile instability. / J.J. Monaghan, –Journal of Computational Physics, 2000. #159, pp.290-311.
6. *Shadloo M., Zainali A., Sadek S., Yildiz M.* Improved Incompressible Smoothed Particles Hydrodynamics method for simulating flow around bluff bodies/ M. Shadloo – Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2011, Vol. 200, Issues 9-12, pp. 1008-1020.
7. *Valcke S., Rijcke S., Rodiger E., Dejonghe H.* Kelvin -Helmholtz instabilities in Smoothed Particle Hydrodynamics / S. Valcke – Mon. Not. R. Astron. Soc., 2009, Vol. 000, pp. 1-16.
8. *Sigalotti L., Daza J., Donoso A* Modeling free surface flows with smoothed particle hydrodynamics/L. Sigalotti, – Condensed Matter Physics, 2006, Vol.9, No 2(46), pp. 359-366.
9. *Feldman J., Bonet J.* Dynamic refinement and boundary contact forces in SPH with applications in fluid flow problems/J. Feldman, –Int. J. Numer. Meth. Engng, 2000; 00:1-6.
10. *Lastiwka M., Quinlan N., Basa M.* Adaptive particle distribution for smoothed particles hydrodynamics/M. Lastiwka, –Int. J. Numer. Meth. Fluids 2005; 47:1403-1409.
11. *Lopez Y.R., Roose D.* Dynamic refinement for fluid flow simulation with SPH [Электронный ресурс] / II International Conference on Particle-based Method - Fundamentals and applications particles, 2011. – Режим доступа: <https://lirias.kuleuven.be/bitstream/123456789/337083/1/Rey2011PartDynRef.pdf>
12. *Lopez Y.R., Roose D.* Particle refinement for fluid flow simulation with SPH [Электронный ресурс] / 19th International Conference on Computer Methods in Mechanics, 9-12 May 2011, Warsaw, Poland. – Режим доступа: http://www.cmm.il.pw.edu.pl/cd/pdf/079_f.pdf
13. *Шевченко Б.А.* Расчетный и экспериментальный метод разработки средств забора компонентов из баков летательных аппаратов с жидкостным ракетным двигателем: дис. ... канд. техн. Наук : 1990 / Шевченко Б. А. – Днепропетровск, 1990. – 209 с. – Библиогр. : с.189 – 209

References

1. *Liu G.R., Liu M.B.* Smoothed particles hydrodynamics a meshfree particles method. Singapore: «World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.», 2003. 472 с. ISBN 981-238-4456-1.
2. *Monaghan J. J.* Smoothed particles hydrodynamics [Jelektronnyj resurs]. Reports on Progress in Physics, Vol.68 (2005), pp.1703-1759. Режим доступа: <http://iopscience.iop.org/0034-4885/68/8/R01/>
3. *Crespo A.J.* Application of the Smoothed Particle Hydrodynamics model SPHysics to free surface hydrodynamics: PhD Thesis 01.06.2008. Universidade de Vigo, 2008. http://cfd.mace.manchester.ac.uk/sph/SPH_PhDs/2008/crespo_thesis.pdf
4. *Veskov E.V.* Численное моделирование слива жидкости из топливного бака ракеты-носителя. Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Ракетно-космічна техніка», 2012, №.5. Вип. 16, Т.2 316 p. ISSN 9125 912
5. *Monaghan J.J.* SPH without tensile instability. Journal of Computational Physics, 2000. #159, pp.290-311.
6. *Shadloo M., Zainali A., Sadek S., Yildiz M.* Improved Incompressible Smoothed Particles Hydrodynamics method for simulating flow around bluff bodies. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2011, Vol. 200, Issues 9-12, pp. 1008-1020.
7. *Valke S., Rijcke S., Rodiger E., Dejonghe H.* Kelvin -Helmholtz instabilities in Smoothed Particle Hydrodynamics. Mon. Not. R. Astron. Soc., 2009, Vol. 000, pp. 1-16.
8. *Sigalotti L., Daza J., Donoso A* Modeling free surface flows with smoothed particle hydrodynamics, Condensed Matter Physics, 2006, Vol.9, No 2(46), pp. 359-366.
9. *Feldman J., Bonet J.* Dynamic refinement and boundary contact forces in SPH with applications in fluid flow problems, Int. J. Numer. Meth. Engng, 2000; 00:1-6.
10. *Lastiwka M., Quinlan N., Basa M.* Adaptive particle distribution for smoothed particles hydrodynamics, Int. J. Numer. Meth. Fluids 2005; 47:1403-1409.
11. *Lopez Y.R., Roose D.* Dynamic refinement for fluid flow simulation with SPH [Jelektronnyj resurs] / II International Conference on Particle-based Method - Fundamentals and applications particles, 2011. Режим доступа: <https://lirias.kuleuven.be/bitstream/123456789/337083/1/Rey2011PartDynRef.pdf>
12. *Lopez Y.R., Roose D.* Particle refinement for fluid flow simulation with SPH [Jelektronnyj resurs]. 19th International Conference on Computer Methods in Mechanics, 9-12 May 2011, Warsaw, Poland. Режим доступа: http://www.cmm.il.pw.edu.pl/cd/pdf/079_f.pdf
13. *Shevchenko B.A.* Raschetnyj i jeksperimental'nyj metod razrabotki sredstv zabora komponentov iz bakov letatel'nyh apparatov s zhidkostnym raketnym dvigatelem: dis. ... kand. tehn. Nauk: 1990. Dnepropetrovsk, 1990. 209 с. Bibliogr. pp.189 – 209

Подана до редакції 08.11.2013