

УДК 621.721.052:539.4.014

Прохоренко Д.В. к.т.н., доц., Яхно Б.О. к.т.н., доц.
НТУУ «Киевский политехнический институт», г. Киев, Украина

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ ЛАЗЕРНОЙ СВАРКЕ БЕЗНАБОРНОЙ ПАНЕЛИ

Prokhorenko D., Yakhno B.
National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine

NUMERICAL RESIDUAL STRESS-STRAINE STATE LASER WELDING SIMULATION OF SANDWICH PANEL

В статье на примере узла безнаборной панели проведена оценка остаточного напряженно-деформированного состояния при лазерной сварке прорезного стыкового шва. На основе численного решения связанной задачи термо-упруго-пластичности, полученного на базе разработанной конечно-элементной твердотельной модели проверено выполнение основных предположений, которые используются в приближенных инженерных методах расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) сварных соединений (линейность напряженного состояния, гипотеза плоских сечений, симметричность НДС относительно среднего поперечного сечения сварного соединения).

Ключевые слова: лазерная сварка, метод конечных элементов, напряженно-деформированное состояние, безнаборная панель, движущийся конический источник нагрева, температурные поля.

Введение

В производстве сварных конструкций при изготовлении деталей из различных металлов все большее распространение получает лазерная сварка. Преимуществами лазерной сварки являются локальность воздействия, концентрированное тепловложение, высокая скорость сварки, и, как следствие, минимальная ширина зон термического влияния и пластических деформаций укорочения. При изготовлении крупногабаритных конструкций, состоящих из элементов с различной жесткостью или с труднодоступными швами, а также при необходимости соединения трудно свариваемых, в том числе разнородных материалов, лазерная сварка позволяет получить качественные сварные соединения.

Изготовление сварных конструкций сопровождается неравномерным нагревом металла и образованием значительных температурных градиентов, которые обуславливают развитие временных сварочных напряжений и деформаций, которые с остыванием конструкции переходят в остаточные.

Тепловой поток в изделии при сварке моделируют сосредоточенными, распределенными по поверхности или объемными источниками тепла. Эволюция математических моделей источников нагрева для расчета температурных полей при сварке началась с разработанных Н.Н. Рыкалиным и Д. Розенталем зависимостей для точечного, линейного, плоского и цилиндрического источников [1, 2], в которых не учитывалась теплота плавления, изменение механических свойств и теплофизических коэффициентов в зависимости от температуры, что привело к некорректным результатам в области высоких температур, и повлияло на величину термических напряжений, возникающих в процессе сварки. Зарубежными исследователями для моделирования теплового потока при сварке плавлением и расчёта температурных полей в сварной конструкции применяется модель объёмного источника тепла, предложенная J. Goldak [3], в которой тепловой поток, распределенный согласно закону Гаусса, действует внутри двойного эллипсоида. Однако применение этой модели требует от исследователя предварительного знания характерных размеров сварочной ванны (длины, ширины, глубины), что связано с необходимостью проведения натуральных экспериментов для выбранных режимов сварки. В исследовательских работах В. А. Судника, В.А. Ерофеева [4] в области математического моделирования процессов сварки выполнено уточнение моделей источников тепла, основанных на теории теплопроводности Н.Н. Рыкалина и представлена численная математическая модель процесса лазерной сварки на основе уравнений теплопроводности и перемещений свободной поверхности сварочной ванны с учётом конвекции. Недостатком данной модели являются существенные временные затраты для сопряженного решения уравнений сохранения энергии и деформации поверхности сварочной ванны вместе с уравнениями Навье-Стокса.

В данной работе мы рассматриваем лазерную сварку как способ соединения пластин заданной конфигурации. Поскольку для этого способа характерна высокая концентрация теплового потока, необходимо учитывать, что источник нагрева будет подобной конусу форме.

Для определения температурного поля при сварке широко используют как аналитические [5-7], так и численные методы. Однако, нелинейность протекающих при сварке процессов, часто делает невозможным получение точного аналитического решения дифференциального уравнения теплопроводности для конструкции заданной геометрии, а приближенные аналитические методы приводят к громоздким выкладкам. Численные методы в подобных случаях, в отличие от аналитических, позволяют получать необходимые решения с желаемой точностью [8-10].

Дальнейшее развитие методов расчета напряженно-деформированного состояния сварных изделий с учетом влияния температуры на термомеханические свойства материала, вида напряженного состояния и продолжительности нагрева является актуальной научно-технической проблемой, решение которой позволит получить более эффективные и обоснованные решения задач механики твердого деформируемого тела о напряженно-деформированном состоянии при сварке. Сложность термомеханических процессов, протекающих при высокой температуре в малых по размеру зонах воздействия лазерного луча на материал, затрудняет экспериментальные исследования при лазерной сварке. Поэтому в настоящей работе предлагается численное моделирование напряженно-деформированного состояния при лазерной сварке прорезного шва элемента безнаборной панели из аустенитной нержавеющей стали 08X18H10T на основе метода конечных элементов в программном комплексе «ABAQUS» [11-13].

Цель и задачи работы

Целью работы является определение значений остаточных напряжений и пластических деформаций, оценка однородности остаточного напряженно-деформированного состояния узла безнаборной сварной панели с продольным прорезным стыковым швом. Задачами работы является разработка конечно-элементной модели узла безнаборной сварной панели на основе его твердотельной геометрической модели, определение исходных данных для параметров источника нагрева при лазерной сварке и материала панели, назначение граничных условий по температуре и условиям закрепления панели при сварке и последующем охлаждении, настройка и отладка программы расчета, непосредственная реализация во времени процесса решения задачи, систематизация и визуализация результатов расчета, обработка и анализ результатов расчета, формулировки итоговых выводов.

Основная часть

Внедрение лазерной сварки в судостроение и авиакосмическую промышленность дало возможность изготавливать новый тип сварных узлов и применять его в производстве безнаборных сварных панелей. Пример такой панели показан на рис. 1.

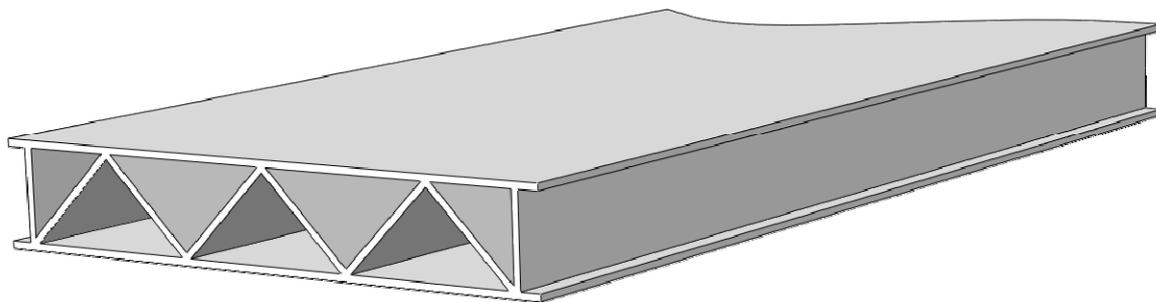


Рис. 1. Общий вид безнаборной панели

Рассмотрим процесс сварки двух пластин (узла безнаборной панели) лазерным источником энергии на режиме с такими параметрами:

- мощность излучения $P = 6,5$ кВт; скорость сварки $V = 18$ м/ч;
- фокусное расстояние $F = 300$ мм;
- заглубление фокальной плоскости $\Delta F = -2,5$ мм;
- сварочный ток $I = 80$ А;
- сварочное напряжение $U = 22$ В;

Моделируя процесс сварки двух пластин лазерным источником, принимаем, что интенсивность излучения лазера $Q(x,y,z)$ определяется нормальным распределением Гаусса

$$Q(x, y, z) = Q_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{r_0^2(z)}\right) \quad (1)$$

и зависит от переменного по координате z радиуса $r_0(z)$ луча лазера:

$$r_0(z) = r_e + \frac{r_i - r_e}{z_i - z_e} (z - z_e), \quad (2)$$

где r_e – радиус луча на поверхности изделия; r_i – радиус луча на тыльной стороне изделия; z_e – расстояние вдоль координаты z от начала системы координат до поверхности изделия; z_i – расстояние вдоль координаты z от начала системы координат до тыльной поверхности изделия; y – координата в продольном направлении сварного соединения; x – координата в поперечном направлении сварного соединения.

Значения геометрических параметров источника r_e r_i z_e z_i приведены в таблице 1.

Таблица 1

Геометрические параметры источника тепла и параметры режима сварки

Параметры режима сварки			Геометрические параметры источника тепла, мм	
Диаметр луча лазера, мм	d	1	r_e	0,5
Скорость сварки, мм/сек	v	5	r_i	0,5
Время сварки, с	t	10	z_e	5
Удельное количество энергии в объеме, Дж/мм ³	Q_0	150	z_i	0

Количество энергии, введенной в объем Q_r определяется зависимостью

$$Q_r = Q_0 \cdot \exp\left(\frac{-r^2}{r_0^2}\right), \quad (3)$$

где Q_0 – удельное количество энергии в объёме, Дж/мм³; r , r_0 – геометрические параметры модели Гаусса.

На рис.2 приведено распределение плотности мощности конического теплового источника при лазерной сварке. Лазерный луч движется вдоль координаты z с постоянной скоростью равной скорости сварки и направлен по нормали к поверхности изделия.

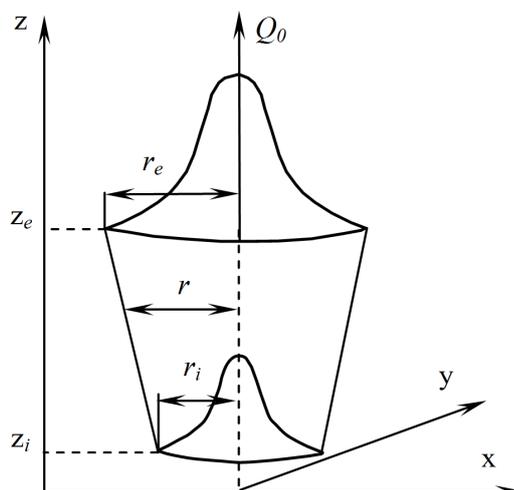


Рис. 2. Распределение удельной мощности теплового потока при лазерной сварке

На рис.3 показана геометрическая и конечно-элементная модель сварного узла безнаборной панели. Симметричный сварной узел безнаборной панели, состоящий из плоской пластины (толщина - 2,5 мм, длина - 50 мм и ширина - 40 мм), к которой прорезным стыковым продольным швом приварен изогнутый волной лист (стрингер: толщина - 2,5 мм, длина - 50 мм и ширина в развертке - 56 мм). Общая толщина листов для выполнения прорезного шва составляет 5 мм. Из-за геометрической симметрии зоны соединения волны и пластины рассматривалась только ее половина с введением по плоскости симметрии соответствующих

граничных условий симметрии. При построении конечно-элементной сетки использовались объемные восьмиузловые твердотельные элементы с дополнительной температурной степенью свободы в узле – C3D8T. Задача решалась с помощью решателя Abaqus Standart с использованием неявной схемы интегрирования. В расчете использовались температурно-зависимые термомеханические свойства, приведенные в таблице 2. Для материала сварного соединения принимается модель пластичности BISO (билинейное изотропное упрочнение, критерий текучести Мизеса, ассоциативный закон текучести). Конечно-элементная модель содержит 104 040 узловых переменных.

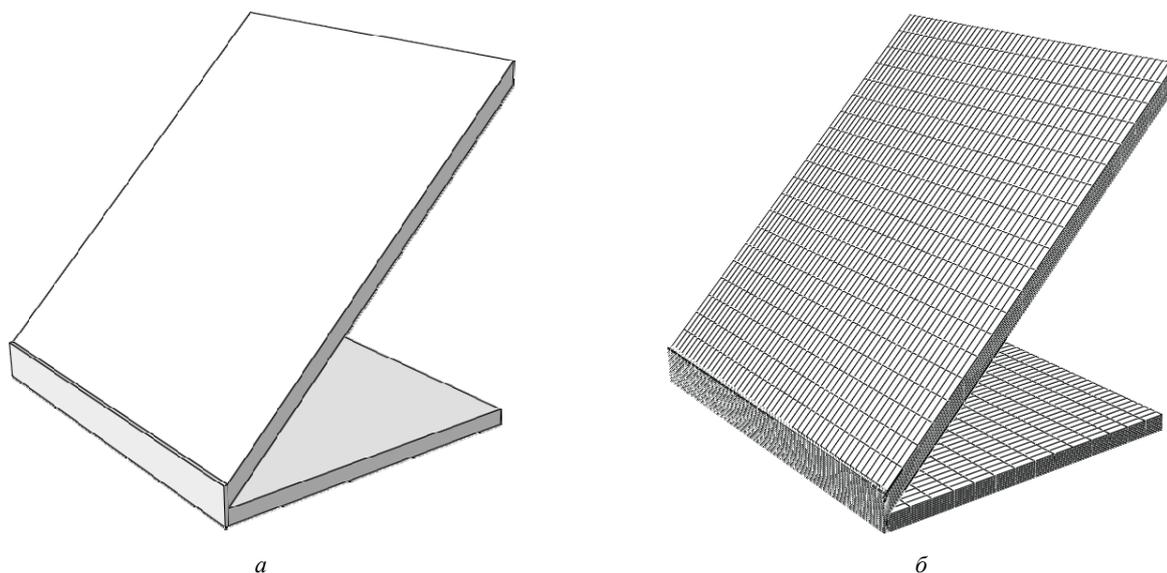


Рис. 3. Модель сварного узла безнаборной панели (половина волны):
а – геометрическая модель, б – конечно-элементная (дискретная) модель

Таблица 2

Зависимость механических и теплофизических свойств стали 08X18H10Т от температуры [14]

Т, °С	Теплопроводность, λ , Вт/м·°С	Плотность ρ , кг/м ³	Модуль Юнга Е, МПа	Коэффициент линейного расширения, α , 1/°С	Удельная теплоёмкость, с, Дж/кг·°С	Предел текучести σ_t , МПа	Предел прочности σ_b , МПа
0	14,00	7880	$1,97 \cdot 10^5$	$1,57 \cdot 10^{-5}$	450	196	491
100	17,00	7880	$1,84 \cdot 10^5$	$1,66 \cdot 10^{-5}$	526,25	189	461
200	17,90	7800	$1,77 \cdot 10^5$	$1,71 \cdot 10^{-5}$	536,25	181	417
300	19,20	7780	$1,68 \cdot 10^5$	$1,75 \cdot 10^{-5}$	552,5	172	377
400	20,60	7760	$1,6 \cdot 10^5$	$1,79 \cdot 10^{-5}$	553,75	162	328
500	21,80	7700	$1,52 \cdot 10^5$	$1,83 \cdot 10^{-5}$	562,5	152	289
600	23,10	7600	$1,43 \cdot 10^5$	$1,87 \cdot 10^{-5}$	572,5	147	250
700	24,50	7560	$1,3 \cdot 10^5$	$1,91 \cdot 10^{-5}$	597,75	40	-
800	26,00	7520	$1,08 \cdot 10^5$	$1,94 \cdot 10^{-5}$	625	30	-
900	27,30	7460	$0,82 \cdot 10^5$	$1,98 \cdot 10^{-5}$	625	27,5	-
1000	28,90	7390	$0,32 \cdot 10^5$	$2,01 \cdot 10^{-5}$	625	25	-
1100	30,00	7345	$0,07 \cdot 10^5$	$2,04 \cdot 10^{-5}$	625	22,5	-
1200	34,00	7300	$0,07 \cdot 10^5$	$1,57 \cdot 10^{-5}$	450	20	-
2000	34,00	7300	$0,07 \cdot 10^5$	$1,57 \cdot 10^{-5}$	450	10	-

К сварному соединению был приложен объемный тепловой поток, моделирующий движение конического источника нагрева согласно (1-3). Форма и движение источника теплоты моделировались посредством пользовательской подпрограммы subroutine DFLUX, написанной на языке программирования Fortran. После окончания симуляции прогрева к модели была применена нулевая температура, что позволило определить НДС после охлаждения сварного соединения. Скорость охлаждения в процессе расчета не учитывалась.

По результатам решения температурной задачи видно, что тепловой поток (рис.4) обеспечивает полное проплавление при сварке и вызывает распределение температур, показанное на рис. 5.

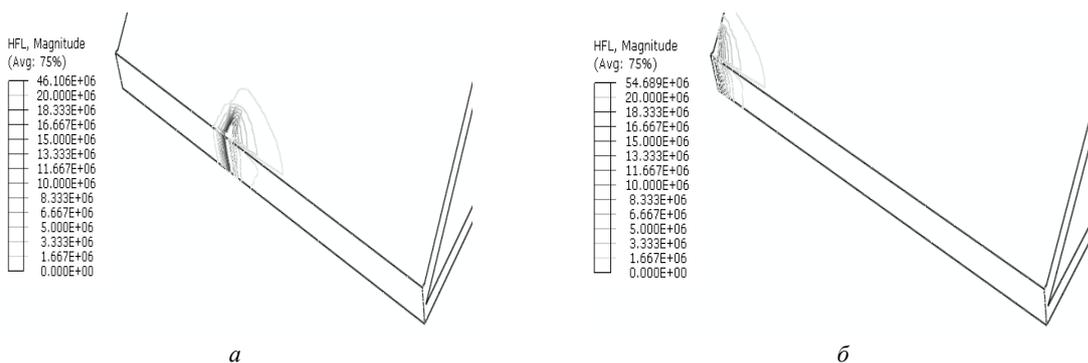


Рис. 4. Тепловой поток в процессе лазерной сварки: *a* – в момент времени 6 сек, *б* – в момент времени 10 сек

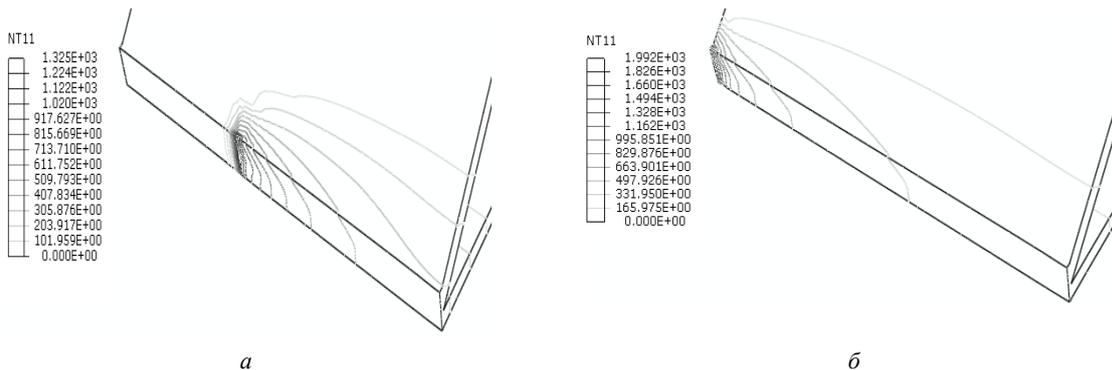


Рис. 5. Изотермы в процессе лазерной сварки: *a* – в момент времени 6 сек, *б* – в момент времени 10 сек

Решение термомеханической задачи позволяет оценить степень однородности напряженно-деформированного состояния и определить распределение продольных и поперечных остаточных напряжений и пластических деформаций в сварном узле в целом.

Основные обобщенные представления об остаточном НДС сварного узла после охлаждения можно получить из рассмотрения параметров остаточного НДС в характерных продольных и поперечных сечениях стрингера и пластины на различных поверхностях (рис.6).

Расчет НДС в программном комплексе ABAQUS позволяет определить на всем временном интервале решения задачи для каждого узла сетки следующие параметры: S11, PE11 – соответственно поперечные (поперек оси шва) напряжения и пластические деформации; S22, PE22 – соответственно продольные (вдоль шва) напряжения и пластические деформации, а также ряд других параметров НДС и теплового потока, которые в данной работе не рассматриваются.

Таким образом, из выполненных нами расчетов для разработанной и представленной выше конечно-элементной модели сварного узла выбраны и представлены на последующих рисунках для остаточного состояния после сварки и полного охлаждения расчетные данные для напряжений и пластических деформаций в среднем поперечном сечении и продольном сечении по оси шва.

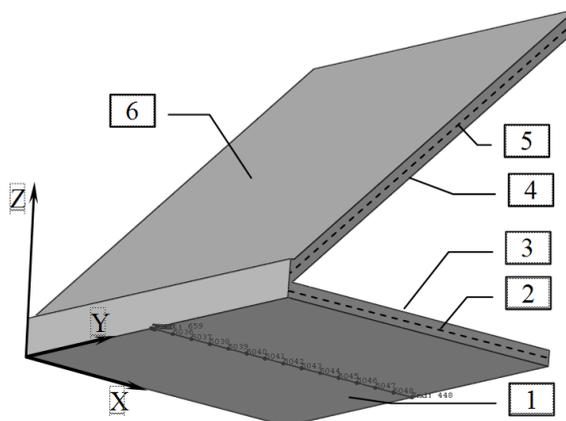


Рис. 6. Поверхности сварного узла, для которых выполнялись построения распределения параметров НДС: 1, 4 - тыльная (bottom); 2, 5 - срединная (middle); 3, 6 – верхняя (top) в пластине и стрингере соответственно

Распределение остаточных продольных напряжений и пластических деформаций в среднем поперечном сечении пластины и стрингера представлено на рис. 7-10.

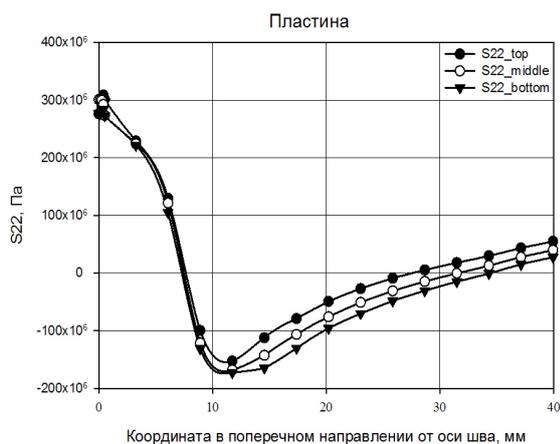


Рис. 7. Остаточные продольные напряжения S_{22_top} , S_{22_middle} , S_{22_bottom} в среднем поперечном сечении пластины на поверхностях 3, 2, 1 соответственно

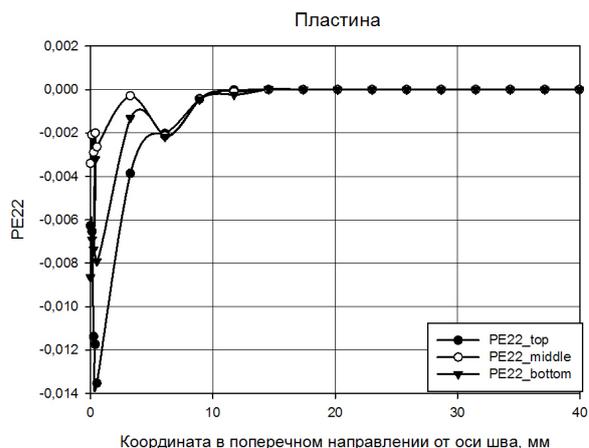


Рис. 8. Остаточные продольные пластические деформации PE_{22_top} , PE_{22_middle} , PE_{22_bottom} в среднем поперечном сечении пластины на поверхностях 3, 2, 1 соответственно

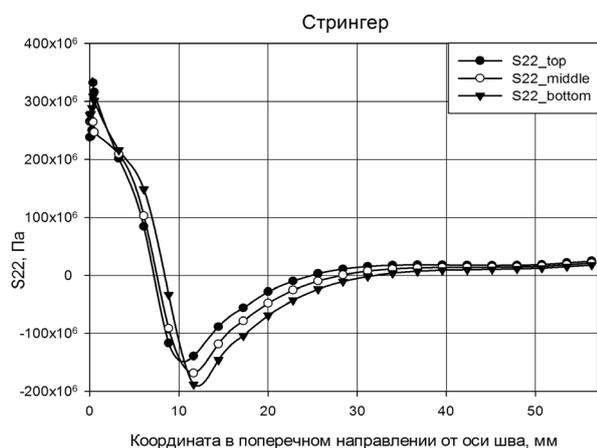


Рис. 9. Остаточные продольные напряжения S_{22_top} , S_{22_middle} , S_{22_bottom} в среднем поперечном сечении стрингера на поверхностях 6, 5, 4 соответственно

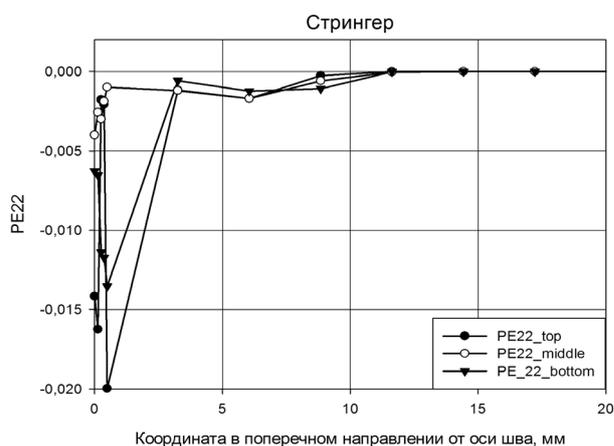


Рис. 10. Остаточные продольные пластические деформации PE_{22_top} , PE_{22_middle} , PE_{22_bottom} в среднем поперечном сечении стрингера на поверхностях 6, 5, 4 соответственно

Приведенные выше результаты позволяют сделать следующие заключения:

- величина максимальных продольных напряжений на оси шва в пластине (рис. 7) и стрингере (рис.9) практически одинакова, но больше предела текучести (196 МПа) в пределах 30..35%, что отличается от величин, полученных с помощью инженерных методов [5-7] расчёта остаточных напряжений и связано с использованием модели материала с изотропным упрочнением;

- результаты распределения продольных напряжений в пластине (рис. 7) и стрингере (рис.9) на различных поверхностях сварного узла (top, middle, bottom) позволяют сделать вывод об однородности напряжённого состояния по толщине;

- характер распределения остаточных продольных пластических деформаций укорочения по ширине пластины (рис.8) и стрингера (рис. 10) совпадает с результатами расчетов приближенными инженерными методами, хотя количественно максимальные деформации на оси шва и ширина зоны их распределения отличаются, что объясняется принятием различных моделей источника нагрева и не учетом зависимости теплофизических и механических свойств от температуры в процессе сварки;

- величина остаточных продольных пластических деформаций укорочения максимальная в месте контакта двух свариваемых толщин (PE_{22_top}): в стрингере (рис. 10) и в пластине (рис.8) в сравнении с пластиной на ~30 % больше для данного режима сварки и практически не зависит от длины сварного соединения;

Далее на рис. 11-14 представлены результаты распределения остаточных продольных и поперечных напряжений и пластических деформаций в срединных плоскостях (middle) пластины и стрингера для продольного по оси шва сечения:

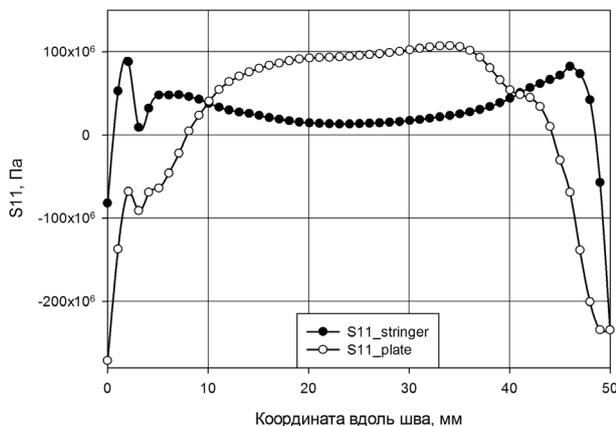


Рис. 11. Остаточные поперечные напряжения в продольном сечении по оси шва: S11_stringer – в стрингере, S11_plate – в пластине в плоскостях 5 и 2 соответственно

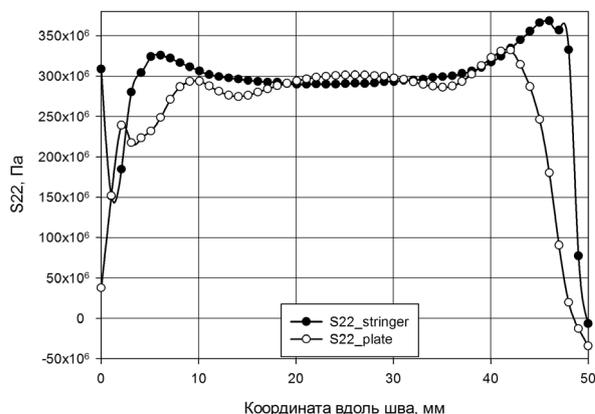


Рис. 12. Остаточные продольные напряжения в продольном сечении по оси шва: S22_stringer – в стрингере, S22_plate – в пластине в плоскостях 5 и 2 соответственно

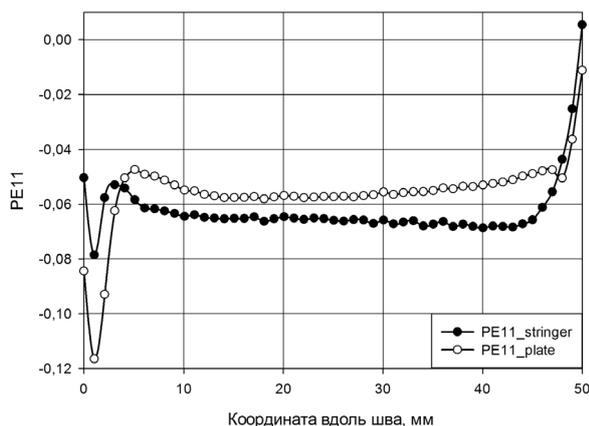


Рис. 13. Остаточные поперечные пластические деформации в продольном сечении по оси шва: PE11_stringer – в стрингере, PE11_plate – в пластине в плоскостях 5 и 2 соответственно

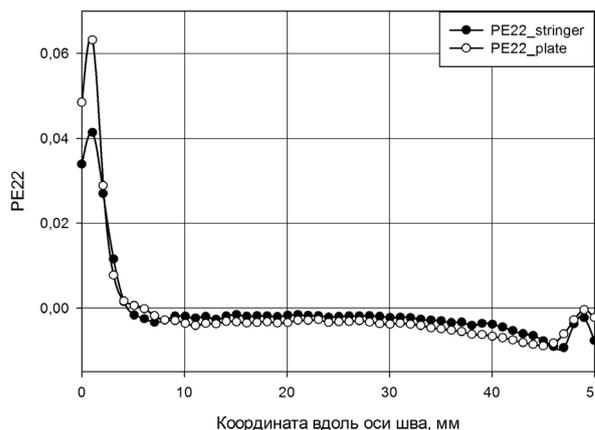


Рис. 14. Остаточные продольные пластические деформации в продольном сечении по оси шва: PE22_stringer – в стрингере, PE11_plate – в пластине в плоскостях 5 и 2 соответственно

- поперечные растягивающие напряжения на оси шва S11 (рис. 11) в средней его части в пластине достигают 100 МПа, а в стрингере - не превышают 25 МПа, что можно объяснить большей по величине остаточной поперечной пластической деформацией укорочения (рис. 13) в пластине, чем в стрингере из-за непосредственного воздействия на неё теплового потока. В концевых участках соединений имеют место высокие поперечные напряжения сжатия. В приближенных инженерных методах принимается допущение о линейности напряжённого состояния, а значит пренебрежение поперечными напряжениями;

- распределение остаточных продольных напряжений вдоль оси шва (рис.12) подтверждает наличие в средней части соединения, за исключением концевых участков, зоны установившегося НДС, одинакового во всех поперечных сечениях этой части соединения. В приближенных инженерных методах распределение напряжений в средних поперечных сечениях принимается таким же и для всех остальных поперечных сечений, включая и концевые участки [5-7];

- поперечная остаточная пластическая деформация укорочения PE22 в точках на оси шва (рис.13) имеет большую величину, нежели продольная (рис.14), распределена вдоль шва в средней его части относительно равномерно и не зависит от длины соединения для данного режима сварки. В приближенных инженерных методах [5-7] она не рассматривается, поскольку принята гипотеза об одноосности напряжённо-деформированного состояния.

Выводы

1. Анализ остаточных пластических деформаций укорочения по длине свариваемых деталей в продольных по оси шва сечениях показал, что величина поперечных деформаций по длине шва в пластине и стрингере на порядок превышает величину продольных деформаций по длине шва и является больше предела текучести, что делает допущение приближенных инженерных методов расчета о линейности напряженно-деформированного состояния сварного соединения обоснованным только при сварке относительно узких (длина больше ширины не менее, чем в два раза) сварных соединений.

2. Выполнимость гипотезы плоских сечений, принимаемой в приближенных методах, подтверждается для остаточного НДС в средней части по длине для относительно узких сварных соединений.

3. Допущение приближенных методов о симметричности остаточного НДС в сварном соединении можно принять для средней части по длине соединения

Анотація. У статті на прикладі вузла безнаборної панелі проведена оцінка залишкового напружено-деформованого стану при лазерному зварюванні прорізного стикового шва. На основі розробленої кінцево-елементної моделі перевірено виконання основних припущень, які використовуються в наближених інженерних методах розрахунку напружено - деформованого стану (НДС) зварних з'єднань (лінійність напруженого стану, гіпотеза плоских перерізів, симетричність НДС щодо середнього поперечного перерізу зварного з'єднання).

Ключові слова: лазерне зварювання, метод кінцевих елементів, напружено-деформований стан, безнаборна панель, рухоме конічне джерело нагрівання, температурні поля

Abstract.

Purpose.

The aim of the work is to determine the values of the residual stresses and plastic deformations, assessment of uniformity of residual stress-strain state assembly sandwich welded panels with longitudinal slotted butt seam.

Design/methodology/approach

Numerical simulation of the stress-strain state in laser welding of longitudinal slotted butt seam element of sandwich welded panels panel of austenitic stainless steel 08X18H10T based finite element method in the software package «ABAQUS».

Findings

Development of finite element model node beznabornoy welded panels based on its solid geometric model, taking into account the parameters of a heating source for laser welding and panel material.

Originality/value.

In this paper for thr element of sandwich welded panels evaluated the residual stress-strain state in laser welding of longitudinal slotted butt seam. The developed finite element model verified implementation of the basic assumptions that are used in engineering approximate methods of calculation of the stress-strain state of welded joints (linearity of the stress state, the hypothesis of plane sections, symmetry relative of the stress-strain state to the average cross-section of the welded joint).

Keywords: laser welding, finite element method, the stress-strain state, sandwich panel, moving conical heat source, temperature field

Библиографический список использованной литературы

1. Рыкалин Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке. М:Машгиз, 1951.
2. Rosenthal D. The mathematical theory of welding and cutting //Welding J., 1941. Vol. 20. P. 220 - 234.
3. John A. Goldak, Mehdi Akhlaghi. Computational welding mechanics. – USA: – Springer, 2005. – 325.
4. Sudnik W., Radaj D., Breitschwerdt S., Erofeew W. Numerical simulation of weld pool geometry in laser beam welding // J. Phys. D: Appl.Phys. 2000. Vol. 33. P. 662 – 671.
5. Винокуров В. А. Теория сварочных деформаций и напряжений [Текст]/В.А. Винокуров, А.Г. Григорьянц. – М. Машиностроение, 1984. – 280 с.
6. Гатовский, К. М. Теория сварочных деформаций и напряжений [Текст]: учеб.пособие / К.М. Гатовский, В.А. Кархин. – Л. : Ленингр. кораблестроит. ин-т, 1980. – 331 с.
7. Прохоренко В.М. Напряження та деформації у зварних з'єднаннях і конструкціях [Текст]: навч. посіб./ В.М. Прохоренко О.В. Прохоренко. – К.: НТУУ «КПІ», 2009. – 268 с. – Бібліогр.: с.267. – 400 пр.ISBN 978-966-622-331-2.
8. Liu G. R. The Finite Element Method: A Practical Course / G. R. Liu, S. S. Quek. – Butterword Heinemann., 2003. – 348 p. Бібліогр.: с. 342–343. – ISBN 0-7506-5866-5.
9. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы [пер. с англ.] / Ричард Х. Галлагер. – М.: Мир, 1986. – 428 с.
10. Rusinski E. Zaawansowana metoda elementow skonczonej w konstrukcjach nosnych / Eugeniusz Rusinski, Jerzy Szmochowski, Tadeusz Smolnicki. – Poland. Wroclaw: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wroclawskiej, 2000. – 444 с. – Бібліогр.: с. 433–444. – ISBN 83-7085-458-3.
11. Яхно Б.О. Abaqus у задачах механіки/ Яхно Богдан Олегович; Нац. техн. ун-т України «Київ. політехн. ін-т». – К.: НТУУ «КПІ», 2011 – 128с. Бібліогр.: с.127 ISBN 978-966-622-401-2
12. Hibbit Abaqus/CAE User's Manual. – USA, Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., 2000. – 1306 p.
13. Hibbit Abaqus Theory Manual. – USA, Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., 2000. – 841 p. – Бібліогр.: с. 821–841.
14. ПНАЭ Г 7-002-86 Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок/ Госатомэнергонадзор СССР. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 525 с.

References

1. *Rykalin N.N.* Raschety teplovyh processov pri svarke. Moscow: Mashgiz, 1951.
2. *Rosenthal D.* The mathematical theory of welding and cutting. *Welding J.*, 1941. Vol. 20. P. 220–234.
3. *John A. Goldak, Mehdi Akhlaghi.* Computational welding mechanics. USA: Springer, 2005. 325.
4. *Sudnik W., Radaj D., Breitschwerdt S., Erofeev W.* Numerical simulation of weld pool geometry in laser beam welding. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2000. Vol. 33. P. 662–671.
5. *Vinokurov V. A., Grigor'janc A.G.* Teorija svarochnyh deformacij i naprjazhenij [Tekst] Moscow: Mashinostroenie, 1984. 280 p.
6. *Gatovskij, K. M. Karhin V.A.* Teorija svarochnyh deformacij i naprjazhenij [Tekst]: ucheb. posobie. Leningr: Leningr. korablestroit. in-t, 1980. 331 p.
7. *Prohorenko V.M. Prohorenko O.V.* Napruzhenja ta deformacii u zvarnih z'ednannjah i konstrukcijah [Tekst]: navch. posib. Kyiv: NTUU «KPI», 2009. 268 p. Bibliogr.: p.267. 400 pr. ISBN 978-966-622-331-2.
8. *Liu G. R.* The Finite Element Method: A Practical Course / G. R. Liu, S. S. Quek. Butterword Heinemann., 2003. 348 p. Bibliogr.: pp. 342–343. ISBN 0-7506-5866-5.
9. *Gallager R.* Metod konechnyh jelementov. Osnovy [per. c angl.]. Moscow: Mir, 1986. 428 p.
10. Eugeniusz Rusinski, Jerzy Szmochowks, Tadeusz Smolnicki. Zaawansowana metoda elementow skonczonech w konstrukcjach nosnych. Poland. Wroclaw: Oficyna Wydawnicza Politechniki Wroclawskiej, 2000. 444 p. Bibliogr.: pp. 433–444. ISBN 83-7085-458-3.
11. *Yakhno B.O.* Abaqus u zadachah mehaniki. Nac. tehn. un-t Ukraini «Kiiv. politehn. in-t». Kyiv: NTUU «KPI», 2011 128p. Bibliogr.: p.127 ISBN 978-966-622-401-2
12. *Hibbit Abaqus/CAE User's Manual.* USA, Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., 2000. 1306 p.
13. *Hibbit Abaqus Theory Manual.* USA, Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc., 2000. 841 p. Bibliogr.: pp. 821–841.
14. *PNAJE G 7-002-86 Normy rascheta na prochnost' oborudovanija i truboprovodov atomnyh jenergeticheskikh ustanovok.* Gosatomenergonadzor SSSR. Moscow: Energoatomizdat, 1989. 525 p.

Подана до редакції 25.12.2013