

## НЕЛІНІЙНІ ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ ВІБРООПОР ВЕРСТАТІВ

Kabannyk S., Boronko O.  
The National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine (mmi@kpi.ua)

### NONLINEAR FORCED OSCILLATIONS OF ANTIVIBRATION MOUNTINGS MACHINES

*Розглянуті особливості вимушених нелінійних коливань віброопори верстата. За допомогою наближеного аналітичного методу гармонійного балансу була визначена амплітуда нелінійних коливань віброопори, при роботі верстата і побудована амплітудно-частотна характеристика. Зроблено висновки про вплив нелінійної кубічної характеристики відновлювальної сили віброопори з урахуванням в'язкого частотно-незалежного тертя на вимушених коливань віброопори верстата. Отримана амплітудно-частотна характеристика для віброопори ОВ-31. Визначено максимальне значення амплітуди коливань. Розглянуто конкретний приклад.*

*Ключові слова:* Віброопора, амплітуда, нелінійна характеристика, вимушені коливання, власна частота, частота вимушеної сили.

#### Вступ

У зв'язку із зростанням швидкостей різання і ускладненням конструкції ріжучих і допоміжних інструментів важливу роль грають коливання, що виникають при роботі верстата. Вони різко знижують стійкість ріжучих інструментів, негативно діють на шпиндельні опори верстата, погіршують якість обробленої поверхні. Тому боротьба з вібраціями в умовах роботи станка набуває важливого значення. Особлива велика увага в останній час приділяється питанням віброізоляції. За кордоном цілий ряд фірм ( СПАЙС АГ (РФ), АстраСтанкоПром (РФ), "STOP-СНОС"( Німеччина) ) випускає спеціальні віброізоляційні пристрої. На підприємствах та в науково-дослідних інститутах України цьому питанню приділяється мало уваги, тому розробка теоретичних методів вивчення нелінійних вимушених коливань віброопор є актуальною прикладною задачею.

#### Мета

Метою роботи є дослідження вимушених нелінійних коливань віброопор з урахуванням частотно-незалежного тертя за допомогою наближеного аналітичного методу гармонічного балансу.

#### Дослідження

Віброопора станка (рис. 1) розглядається як механічна система з жорсткою кубічною характеристикою відновлювальної сили і лінійним частотно-незалежним тертям при дії гармонічної сили. Розрахункова модель представлена на рис. 2.

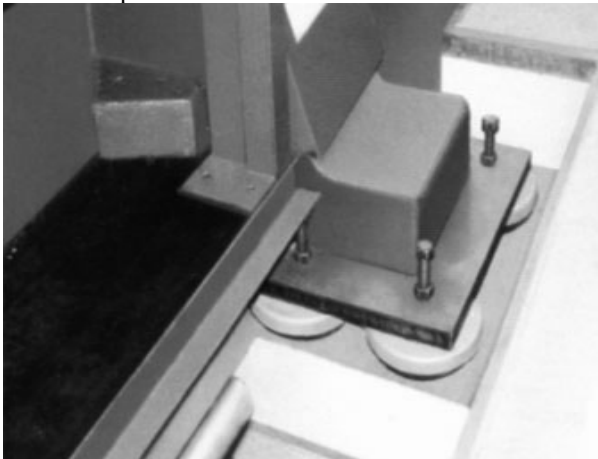


Рис. 1. Віброопора встановлена на станку

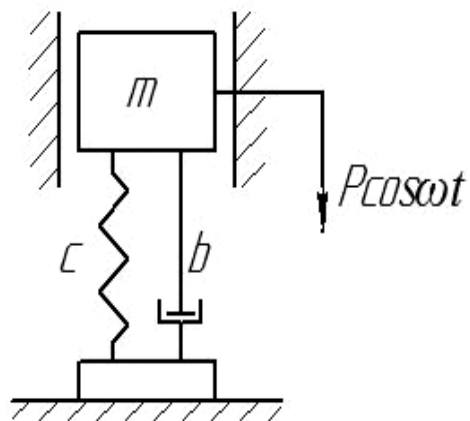


Рис. 2. Модель віброопори

Запишемо рівняння вимушених коливань для даної механічної системи. Рух об'єкта визначається рівнянням (1)

$$m\ddot{q} + \alpha I \dot{q} + c_1 q + c_3 q^3 = P \cos \omega t, \quad (1)$$

де  $m$  – маса станка,  $\alpha I$  - коефіцієнт тертя,  $c_1$  та  $c_3$  - лінійні та нелінійні коефіцієнти жорсткості відповідно,  $\omega$  - частота вимушеної сили,  $P$  - амплітуда вимушеної сили.

Перепишемо рівняння (1) наступним чином

$$\ddot{q} + 2h\dot{q} + \omega_0^2 q + \gamma q^3 = P_0 \cos \omega t, \quad (2)$$

де

$$2h = \frac{\alpha I}{m}, \omega_0^2 = \frac{c_1}{m}, \lambda = \frac{c_3}{m}, P_0 = \frac{P}{m}.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$q = A \cos \psi = A \cos(\omega t - \varphi). \quad (3)$$

Амплітуду визначаємо за методом гармонічного балансу, для цього підставимо розв'язок (3) в рівняння (2) та зберемо члени при  $\cos \psi$  та  $\sin \psi$ .

$$-A\omega^2 \cos \psi - 2hA\omega \sin \psi + \omega_0^2 A \cos \psi + \gamma(A \cos \psi)^3 = P_0 \cos \omega t. \quad (4)$$

З урахуванням, що:

$$\begin{aligned} \cos^3 \psi &= \frac{3}{4} \cos \psi + \frac{1}{4} \cos 3\psi, \\ \cos \omega t &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi. \end{aligned}$$

рівняння (4) запишеться

$$-A\omega^2 \cos \psi - 2hA\omega \sin \psi + \omega_0^2 A \cos \psi + \gamma A^3 \left( \frac{3}{4} \cos \psi + \frac{1}{4} \cos 3\psi \right) = P_0 (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi). \quad (5)$$

Зібравши згідно методу гармонічного балансу члени при  $\cos \psi$  та  $\sin \psi$  отримаємо відповідно баланс реактивних та активних сил.

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) + \frac{3}{4} \gamma A^3 = P_0 \cos \varphi, \quad (6)$$

$$2hA \omega = P_0 \sin \varphi. \quad (7)$$

Розділимо рівняння (6) та (7) на  $A\omega_0^2$ :

$$-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1 + \frac{3}{4} \gamma \frac{A^2}{\omega_0^2} = \frac{P_0}{\omega^2 A} \cos \varphi, \quad (8)$$

$$2h \frac{\omega}{\omega_0^2} = \frac{P_0}{\omega_0^2 A} \sin \varphi. \quad (9)$$

Возведемо рівняння (8) та (9) до квадрату та просумувавши результат, отримаємо:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 + \frac{3}{4} \gamma \frac{A^2}{\omega_0^2} - 2\left(\frac{h}{\omega_0}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{P_0}{A}\right)^2 \frac{1}{\omega_0^4} - 4\left(\frac{h}{\omega_0}\right)^2 \left(1 + \frac{3}{4} \gamma \frac{A^2}{\omega_0^2}\right) + 4\left(\frac{h}{\omega_0}\right)^4}. \quad (10)$$

Беручи корінь квадратний з правої та лівої частини, та враховуючи, що всі складові в правій частині менші в порівнянні з одиницею (першим членом) і обмежуючись в розклад радикала тільки першими степенями малих величин, отримаємо:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 + \frac{3}{8} \gamma \frac{A^2}{\omega_0^2} - \left(\frac{h}{\omega_0}\right)^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{P_0}{A}\right)^2 \frac{1}{\omega_0^4} - 4\left(\frac{h}{\omega_0}\right)^2 \left(1 + \frac{3}{4} \gamma \frac{A^2}{\omega_0^2}\right) + 4\left(\frac{h}{\omega_0}\right)^4}, \quad (11)$$

де складова  $\left(1 + \frac{3}{8} \gamma \frac{A^2}{\omega_0^2}\right)$  дає скелетну лінію,  $\left(\frac{h}{\omega_0}\right)^2$  – відповідає постійному зсуву скелетної лінії за рахунок в'язкого тертя. Разом ці складові дають реальне розташування скелетної лінії.

Остання складова  $\frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{P_0}{A}\right)^2 \frac{1}{\omega_0^4} - 4\left(\frac{h}{\omega_0}\right)^2 \left(1 + \frac{3}{4} \gamma \frac{A^2}{\omega_0^2}\right) + 4\left(\frac{h}{\omega_0}\right)^4}$  – дає залежне від рівня амплітуди відстань по горизонталі від скелетної лінії до лівої та правої вітки амплітудо-частотної характеристики кривої.

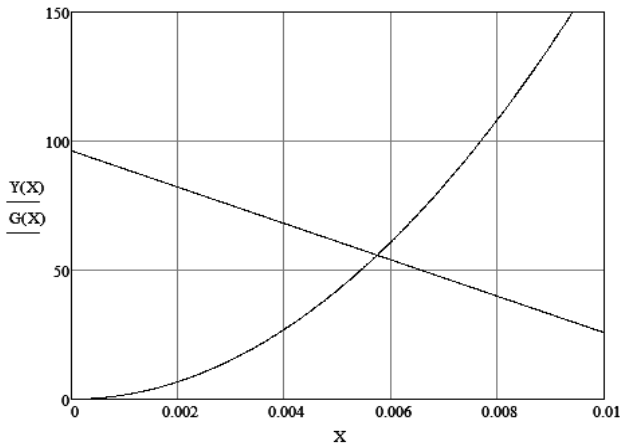


Рис. 3. Графічне рішення рівняння (12)

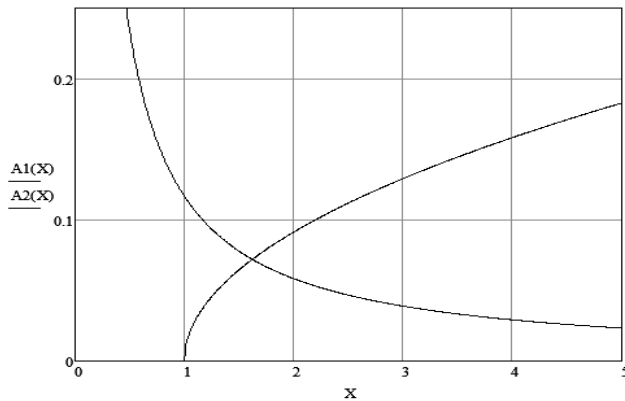


Рис. 4. Графічне рішення рівняння (13) та (14)

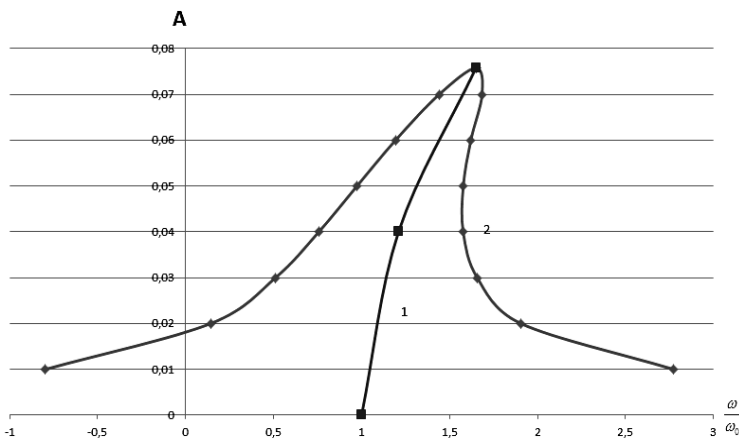


Рис. 5. Амплітудно-частотна характеристика 1-скелетна крива, 2 – АЧХ

Прирівнюючи останню складову до нуля, отримаємо рівняння для максимально можливих амплітуд коливань:

$$\left(\frac{P_0}{A}\right)^2 \frac{1}{\omega_0^4} - 4\left(\frac{h}{\omega_0}\right)^2 \left(1 + \frac{3}{4}\gamma \frac{A^2}{\omega_0^2}\right) + 4\left(\frac{h}{\omega_0}\right)^4 = 0. \quad (12)$$

В якості прикладу розглянемо задачу вимушених нелінійних коливань віброопори з наступними параметрами:

$$m = 2605 \text{ кг}, \quad c_1 = 714 \frac{\text{кН}}{\text{м}},$$

$$c_3 = 228 \frac{\text{МН}}{\text{м}}, \quad P = \frac{1}{4} mg = 2605 \text{ кг},$$

$$\omega_0^2 = 274 \text{ с}^{-2}, \quad \gamma = 87524 \text{ с}^{-2} \text{ м}^{-2},$$

$$P_0 = \frac{P}{m} = \frac{25,6 \cdot 10^3}{2605} = 9,81 \text{ м/с}^2, \quad h = 2,54 \text{ с}^{-1}.$$

$$Y(x) = (1301,5412x)^2;$$

$$G(x) = -5,413 \cdot (1301,5412x) + 9,81^2.$$

Підставляючи дані в (12) отримаємо:

$$A^2 = 0,005739 \text{ м}^2, \quad \text{або } A = 0,07575 \text{ м}.$$

Використовуючи пакет програм Mathcad отримаємо графічне рішення рівнянь.

Прийнявши  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  в рівняннях (8) та (9), отримаємо наближене рівняння скелетної та енергетичної лінії:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 + \frac{3}{4}\gamma \frac{A^2}{\omega_0^2}, \quad (13)$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} A = \frac{P_0}{2h}. \quad (14)$$

$$A_1(x) = \sqrt{\frac{x-1}{119,78}}; \quad A_2(x) = \frac{0,116662}{x}.$$

Де рівняння (13) – скелетна крива, а рівняння (14) – енергетична крива.

Підставимо дані в рівняння (10) та побудуємо АЧХ.

$$\frac{P}{\omega} = \left\{1 + 119,78 \cdot A^2\right\} - \{0,023549\} \pm \frac{1}{2} \sqrt{0,0012818 \frac{1}{A^2} - 0,094184 \cdot (1 + 239,573 A^2) + 0,0022176}.$$

Розбиваємо інтервал зміни амплітуди на декілька ділянок, складаємо таблицю.

Значення  $\omega / \omega_0$  для лівої та правої гілки в залежності від значення  $A$ 

№ точки	A	1	2	3	$\omega / \omega_0$ ліва	$\omega / \omega_0$ права
1	0,01	1,012	0,988	$\pm 1,784$	-0,796	2,772
2	0,02	1,048	1,024	$\pm 0,881$	0,143	1,905
3	0,03	1,108	1,084	$\pm 0,573$	0,511	1,657
4	0,04	1,191	1,167	$\pm 0,41$	0,757	1,577
5	0,05	1,30	1,276	$\pm 0,302$	0,974	1,578
6	0,06	1,431	1,407	$\pm 0,214$	1,193	1,621
7	0,07	1,587	1,563	$\pm 0,122$	1,441	1,685
8	0,07575	1,687	1,650	0	1,650	

**Висновки**

З аналізу отриманих рівнянь витікає:

1. Амплітуди коливань в нелінійній системі завжди обмежені.

2. При «точному» резонансі ( $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ ), амплітуда не є найбільшою величиною, як в випадку лінійних

вимушених коливань.

3. Розсіяння енергії визначає максимально можливу амплітуду коливань.

4. В нелінійній системі основну роль в обмеженні амплітуди коливань відіграє нелінійність характеристики відновлювальної сили.

**Анотація.** В статті розглядаються збуджені нелінійні коливання віброопори станка. С допомогою приближеного аналітичного методу гармонічного балансу була определена амплітуда нелінійних коливань віброопори, при роботі станка и построена амплітудно-частотная характеристика. Сделаны выводы о влиянии нелінійной кубической характеристики восстанавливающей силы віброопори с учётом вязкого частотно-независимого трения на збуджені коливання віброопор станка. Полученная амплітудно-частотная характеристика для віброопори ОВ-31. Определено максимальное значение амплітуды колебаний. Рассмотрен конкретный пример.

**Ключевые слова:** віброопора, амплітуда, нелінійная характеристика, збуджені коливання, собствнная частота, частота збудженої сили.

**Abstract.** The subject of study in this paper is forced nonlinear vibrations of antivibration mountings of the machine, taking into account the frequency-dependent viscous friction.

**Purpose.** The aim is to use an approximate analytical method of harmonic balance to investigate the influence of the cubic nonlinear characteristics on the amplitude of the restoring force on the forced vibrations of the machine antivibration mountings.

**Design/methodology/approach.** Разработать метод построения амплітудно-частотной характеристики віброопор при её збуджені нелінійних коливань.

**Findings.** Develop a method for constructing the amplitude-frequency characteristics of antivibration mountings when it forced nonlinear oscillations.

**Originality/value.** The results obtained in the work can be used in the design of new types of antivibration mountings stankov. Разработат метод для построения амплітудно-частотной характеристики antivibration mountings when it forced nonlinear oscillations.

**Keywords:** antivibration mountings, amplitude, nonlinear characteristics, forced vibration, natural frequency, the frequency of induced forces.

1. Василенко М. В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкість руху: Підручник.-К.: Вища шк., 2004. – 525 с.
2. Кудинов В. А. Динамика станков. -М.: Машиностроение, 1967. – 359 с.
3. Тимошенко С. П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. -М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
4. Левитский Н.И. Колебания в механизмах. -М.: Наука, 1988.-336 с.

**REFERENCES**

1. Vasilenko M.V., Alekseichuk O.M. Teoriya kolivan i stiykist Ruhu (Theory of vibrations and firmness of motion) Kyiv:Vishcha school, 2004, 525 p.
2. Kudinov V.A. Dynamica stankov (Dynamics of machine-tools) Moscow:Mashinostroenie, 1967, 359 p.
3. Timoshenko S.P., Yang D.H., Uiver U. Kolebaniya v inzhenernom dele (Vibrations are on engineering business) Moscow:Mashinostroenie, 1985, 472 p.
4. Levitskij N.I. Kolebaniya v mehanizmah (Vibrations are in mechanisms) Moscow:Nauka, 1988, 336 p.