

УДК 539.376

Романов А.В. к.т.н.

Институт механики им С.П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев, Украина

## К ОЦЕНКЕ ХАРАКТЕРА ДЛИТЕЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Romanov A.

Institute of Mechanics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

### TO ESTIMATE OF CHARACTER LONG-TERM FRACTURE UNDER COMPLEX STRESS STATE

Решается задача оценки характера длительного разрушения в условиях ползучести с учетом «жесткости» напряженного состояния и траектории деформирования. Разрушение в условиях длительного статического нагружения рассматривается в рамках феноменологического подхода как процесс исчерпания исходного запаса пластичности материала. Оценка характера разрушения (вязкий, хрупкий, смешанный) осуществляется из сопоставления величины накопленной деформации на момент исчерпания запаса пластичности, и запаса пластичности, необходимого для реализации вязкого разрушения. Влияние траектории деформирования при развитых деформациях учитывается показателем монотонности, представляющим собой отношение интенсивности логарифмических деформаций к параметру Одковиста. «Жесткость» напряженного состояния учитывается показателем «жесткости», представляющим собой с точностью до знака отношение вторых инвариантов шарового тензора и дивергента напряжений, и отражающего с точностью до постоянного множителя соотношение удельных потенциальных энергий изменения объема и формоизменения.

Ключевые слова: разрушение, запас пластичности, показатель жесткости, интенсивность деформаций.

**Введение.** В машиностроении и особенно в энергомашиностроении все более широкое применение находят пластичные стали и сплавы. Эти материалы обеспечивают более высокий уровень надежности конструкции по сравнению с высокопрочными, но малопластичными материалами. Использование последних в ответственных элементах конструкций вызывает необходимость во избежание внезапных катастрофических последствий их разрушения устанавливать большие коэффициенты запаса прочности, что в значительной степени нивелирует их преимущества перед первыми. Это очевидно обусловлено не в последнюю очередь малой информативностью процесса хрупкого разрушения, свойственного малопластичным материалам. В этой связи возможность определения характера длительного разрушения и соответственно возможность оптимального выбора материала на более раннем этапе представляет практический интерес.

В механике деформируемого твердого тела общепринятым является классифицировать разрушение по типу характера условно на хрупкое, вязкое и смешанное. В общем случае нагружения характер разрушения не может рассматриваться только как неотъемлемое свойство присущее материалу, на него оказывает влияние также комплекс других факторов: режим нагружения, температура испытания, вид, а точнее «жесткость» напряженного состояния. Попытка рассмотреть в рамках феноменологического подхода влияние на характер разрушения последнего фактора применительно к длительному изотермическому нагружению и является целью настоящей работы.

**Анализ влияния «жесткости» напряженного состояния на пластичность материала.** Разрушение в условиях длительного статического нагружения рассматривается в работе как процесс исчерпания исходного запаса пластичности материала [1], соответствующего данной «жесткости» напряженного состояния –  $\Delta_p(k_g)$  с учетом влияния на его величину траектории деформирования, определяемого показателем монотонности деформирования  $m_n$ . Запас пластичности  $\Delta_p = \Delta_p(k_g, m_n)$  в таком случае может быть представлен так [2].

$$\Delta_p = \frac{\Delta_p(k_g)}{m_n}, \quad (1)$$

а степень его использования  $\psi$  при постоянных параметрах, от которых зависит пластичность, – в виде

$$\psi = \frac{\Delta}{\Delta_p} \leq 1, \quad (2)$$

где  $\Delta$  – величина накопленной деформации.

Величина  $\Delta_p(k_g)$  определяется из испытаний на кратковременную прочность как величина предельной деформации на момент разрушения, полагая, что в данном случае реализуется максимальный запас пластичности материала для данной «жесткости» напряженного состояния  $k_g$ , поскольку влияние фактора времени, способствующего охрупчиванию материала и снижению его пластичности минимально. Графически зависимость  $\Delta_p(k_g)$  представляется в виде диаграмм пластичности (рис. 3) [2-4]. Показатель «жесткости» напряженного состояния  $k_g$  в силу общности описания условий разрушения при сложном напряженном состоянии должен являться функцией инвариантов тензора напряжений и так или иначе отражать влияние его гидростатической и девиаторной составляющих. В литературе встречаются и другие названия – показатель мягкости, трехосности и просто показатель напряженного состояния, которые хотя и имеют различные обозначения и отличаются структурой, связаны при этом простыми алгебраическими соотношениями и легко переопределяются [2-4].

В настоящей работе показатель «жесткости» напряженного состояния предложено записывать в виде

$$k_g = \frac{\sigma_0}{|\sigma_0|} \left[ -\frac{I_2(T\sigma_0)}{I_2(D\sigma)} \right], \quad (3)$$

где  $\sigma_0$  – среднее напряжение;  $I_2(T\sigma_0)$  и  $I_2(D\sigma)$  соответственно вторые инварианты шарового тензора и девиатора напряжений. Выбор такой структуры показателя «жесткости» базируется на энергетическом подходе и отражает с точностью до постоянного множителя соотношение удельной потенциальной энергии изменения объема

$$\Pi_v = \frac{1-2\mu}{6E} (3\sigma_0)^2 = \frac{1-2\mu}{2E} [-I_2(T\sigma_0)] \quad (4)$$

и удельной потенциальной энергии формоизменения

$$\Pi_f = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_i^2 = \frac{1+\mu}{E} I_2(D\sigma), \quad (5)$$

а именно

$$\frac{\Pi_v}{\Pi_f} = \frac{1-2\mu}{2(1+\mu)} \left[ -\frac{I_2(T\sigma_0)}{I_2(D\sigma)} \right] = \frac{1-2\mu}{2(1+\mu)} \cdot |k_g| \quad (6)$$

где  $\sigma_i$  – интенсивность нормальных напряжений, а  $E$  и  $\mu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно. Из (6) видно, что первый множитель через коэффициент Пуассона  $\mu$  учитывает влияние на баланс энергий физических свойств материала, в то время как влияние напряженного состояния учитывается показателем «жесткости»  $k_g$ .

Из (6) также следует, что при фиксированных значениях показателя «жесткости» за счет коэффициента  $\mu$  происходит перераспределение частей удельной потенциальной энергии таким образом, что при увеличении  $\mu$  доля энергии формоизменения увеличивается, а доля энергии, идущая на изменение объема уменьшается (рис. 1). Например, у материала, имеющего коэффициент  $\mu = 0,33$  при одном и том же показателе «жесткости»  $k_g$  (на рис. 1 показано пунктиром для  $|k_g| = 3$ ) соотношении энергий будет приблизительно в 2,5 раза больше в пользу энергии формоизменения, чем у материала, имеющего  $\mu = 0,17$ . Из чего можно сделать осторожное предположение, что материалы с большим коэффициентом Пуассона в целом более склонны к пластическому деформированию и вязкому разрушению.

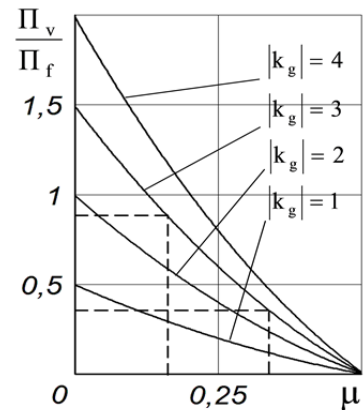


Рис. 1. Зависимость соотношения частей удельной потенциальной энергии от  $\mu$  для различных  $|k_g|$

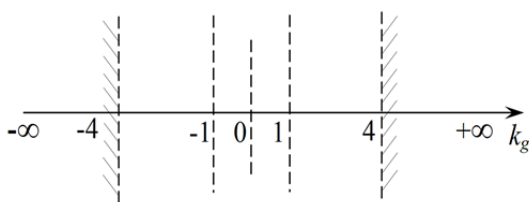


Рис. 2. Числовое отображение на координатной оси «жесткости» различных видов напряженного состояния

Показатель «жесткость», принимающий как видно из (3) все вещественные числовые значения ( $-\infty \leq k_g \leq +\infty$ ) позволяет отобразить на одной координатной оси все возможные виды напряженного состояния рис. 2, где в частности гидростатическому сжатию соответствует  $k_g = -\infty$ , а гидростатическому растяжению  $k_g = +\infty$ . Соответственно для одноосного растяжения  $k_g = +1$ , одноосного сжатия  $k_g = -1$ ,

чистого сдвига  $k_g = 0$ , а все многообразие видов плоского напряженного состояния с учетом общепринятых в механике соотношений для главных напряжений  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , укладывается в диапазон  $-4 \leq k_g \leq 4$ .

Анализ представленных на рис. 3 диаграмм пластичности охватывающих достаточно большой диапазон изменения показателя «жесткости»  $k_g$  показывает устойчивую тенденцию к охрупчиванию материала с повышением «жесткости» напряженного состояния во всем диапазоне его изменений, причем в области положительных значений  $k_g$  запас пластичности асимптотически приближается к нулю, что в целом хорошо согласуется с теоретическим выводом – при нагружении изотропного материала гидростатическим напряжением макропластические деформации должны отсутствовать. Из рис. 3 также видно, что в интервале  $-\infty < k_g < -1$

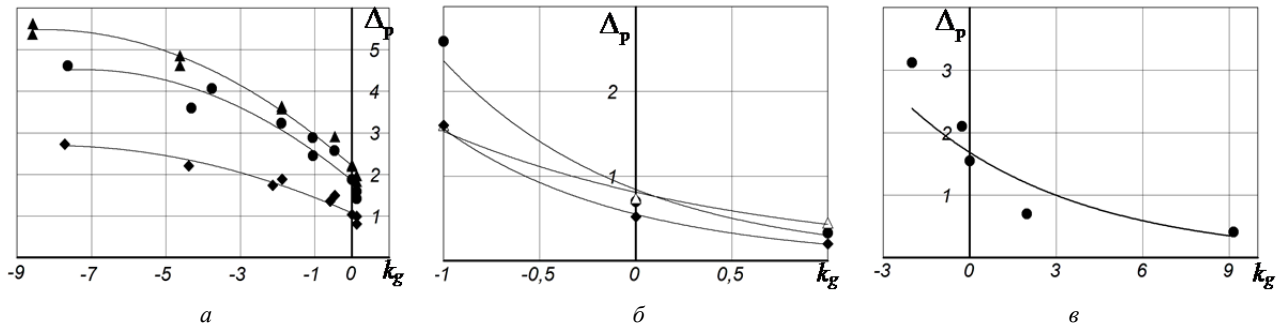


Рис. 3. Диаграммы пластичности: а [3] – сталь 10КП (▲), сталь 20 КП (●), сталь 38ХГНМ (◆); б [4] – сталь 10 (●), сталь ЭИ-961 (Δ), сталь 35 (◆); в [2] – углеродистая сталь (●)

диаграммы пластичности хорошо аппроксимируются полиномиальными зависимостями, а в диапазоне  $-1 < k_g < +\infty$  экспоненциальными.

Влияние сжимающих гидростатических напряжений на повышение пластичности материалов было замечено давно. Так в [5] описывается опыт, при котором минерал, разрушающийся типично хрупко при простом сжатии при наложении дополнительно гидростатического давления деформируется пластично. В настоящее время знание этой закономерности широко используется в различных технологических процессах металлообработки. Особенно показателен в смысле эффективности технологический процесс изготовления ответственных деталей из малопластичных сплавов для аэрокосмической отрасли путем штамповки взрывом, когда очень большое гидростатическое давление от взрыва, превышающее  $10^5$  МПа обеспечивает достижение необходимых пластических деформаций материала без образования в них трещин и разрушения.

Представляет интерес рассмотреть противоположный эффект влияния растягивающей гидростатической компоненты напряжений на пластичность материала на примере локализации деформаций, образования шейки и последующего разрушения цилиндрического образца при простом растяжении (рис. 4). Согласно классическому решению Бриджмена [6] напряженное состояние в наименьшем сечении образца  $C-O$  характеризуется в цилиндрической системе координат следующими главными напряжениями

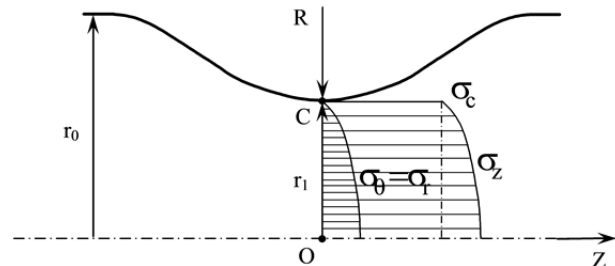


Рис. 4. Характер изменения главных напряжений по Бриджмену [6] в наименьшем сечении шейки образца

$$\begin{cases} \sigma_\theta(r) = \sigma_r(r) = \sigma_h(r) = \sigma_c \cdot \ln\left(\frac{r_1^2 + 2r_1R - r^2}{2r_1R}\right) \\ \sigma_z(r) = \sigma_c = \sigma_h(r) = \sigma_c \cdot \left[1 + \ln\left(\frac{r_1^2 + 2r_1R - r^2}{2r_1R}\right)\right], \end{cases} \quad (7)$$

где  $\sigma_h(r)$  – переменная гидростатического растягивающего напряжения;  $0 \leq r \leq r_1$  – текущий радиус наименьшего сечения;  $R$  – радиус кривизны контура шейки в наименьшем сечении;  $\sigma_c$  – осевое напряжение в точке  $C$  численно равно интенсивности напряжений в наименьшем сечении  $C-O$  и определяемое по формуле

$$\sigma_i = \sigma_c = k_c \cdot \frac{P}{\pi r_1^2} = \frac{1}{[(1 + 2R/r_1) \cdot \ln(1 + r_1/2R)]} \cdot \frac{P}{\pi r_1^2}, \quad (8)$$

где  $P$  – сила, прилагаемая при растяжении образца.

Для точек  $C$  ( $r=r_1$ ) и  $O$  ( $r=0$ ) главные напряжения принимают соответственно значения

$$\begin{cases} \sigma_{\theta}(C) = \sigma_r(C) = 0; & \sigma_z(C) = \sigma_c \\ \sigma_{\theta}(O) = \sigma_r(O) = \sigma_c \cdot \ln\left(1 + \frac{r_1}{2R}\right); & \sigma_z(O) = \sigma_c \cdot \left[1 + \ln\left(1 + \frac{r_1}{2R}\right)\right]. \end{cases} \quad (9)$$

Определим значения жесткости напряженного состояния в точках  $C$  и  $O$  с учетом представленных в [7] данных геометрических параметров шейки круглого образца –  $r_1 = 2,2 \text{ мм} = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ ,  $R = 4,8 \text{ мм} = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ . Так как точка  $C$  лежит на поверхности образца, то согласно (9) там действуют только осевые напряжения и следовательно  $k_g(C) = 1$ . В точке  $O$ , принимая во внимание (9), показатель жесткости будет

$$k_g(O) = 3\sigma_0^2(O) \frac{3}{\sigma_i^2(O)} = \left[1 + 3\ln\left(1 + \frac{2,2}{2 \cdot 4,8}\right)\right]^2 \approx 2,62. \quad (10)$$

Это значит, что напряженное состояние в точке  $O$  существенно «жестче», чем в точке  $C$ , а следовательно запас пластичности в ней будет значительно ниже, что должно обуславливать в конечном итоге начало разрушения именно с неё. Рентгеновский снимок шейки образца непосредственно перед разрушением [8] подтверждает этот вывод, на нем видно, что разрушение началось в центральной точке наименьшего сечения. По сути, к такому же выводу приходят и авторы [9] исследуя закономерности разрыхления, в шейке растягиваемого образца утверждая, что скорость разрыхления в шейке максимальна в центре образца при  $r=0$ , а характер её изменения совпадает с характером изменения шарового тензора напряжений.

**2. Условие длительного разрушения и оценка его характера.** Рассматривая процесс длительного разрушения при ползучести для описания кинетики деформаций, используется множество феноменологических зависимостей, в которых в основном оперируют функции вторых инвариантов девиатора напряжений и деформаций, а влияние шарового тензора напряжений не учитывается. В настоящей работе влияние гидростатической компоненты напряжений предполагается учитывать только в части её влияния на величину предельных деформаций ползучести, ограничивая её запасом пластичности  $\Delta_p(k_g, m_n)$  (1). Эта величина определяется из аппроксимационной зависимости диаграммы пластичности для данного напряженного состояния  $\Delta_p(k_g)$  с учетом влияния на запас пластичности траектории накопления деформаций ползучести посредством использования показателя монотонности деформирования  $m_n$  в виде

$$m_n = \frac{\bar{\epsilon}_i^c}{\Phi_c^* \left( \int d\bar{\epsilon}_i^c \right)} = \frac{\bar{\epsilon}_i^c}{\Phi_c^* \left( \int \xi_i^c dt \right)} \quad (0 < m_n \leq 1), \quad (11)$$

где  $\bar{\epsilon}_i^c$  – интенсивность логарифмических деформаций;  $\Phi_c^* \left( \int d\bar{\epsilon}_i^c \right)$  – параметр Одквиста [10], численно равный длине траектории (пути) деформирования;  $d\bar{\epsilon}_i^c$  – интенсивность приращений логарифмических деформаций ползучести;  $\xi_i^c = d\bar{\epsilon}_i^c / dt$  – интенсивность скоростей деформаций ползучести. Монотонным здесь считается деформирование, когда в процессе значительного накопления деформаций остаются постоянными отношения главных скоростей  $\xi_1^c : \xi_2^c : \xi_3^c$ , а также их направления.

В работе полагается справедливым утверждение о максимальном разрыхляющем эффекте монотонного деформирования при ползучести также как и при монотонном активном пластическом деформировании [2]. В случае немонотонного деформирования интенсивность разрыхления уменьшается ( $m_n < 1$ ), а запас пластичности соответственно (1) увеличивается. В общем случае длительного нагружения накопление деформаций ползучести может проходить при изменяющемся показателе монотонности  $m_n = m_n(t)$  и меняющемся напряженном состоянии, а следовательно при переменном  $k_g = k_g(t)$  и соответственно переменном  $\Delta_p[k_g(t)]$  в связи с чем возникает необходимость говорить о дифференциальной зависимости степени использования запаса пластичности

$$d\Psi = \frac{d\Phi_c^*}{\Delta_p[k_g(t), m_n(t)]}, \quad (12)$$

проинтегрировав которую получаем в итоге условие разрушения

$$\Psi(t_R) = \int_0^{t_R} m_n(t) \cdot \frac{\xi_i^c(t) \cdot dt}{\Delta_p[k_g(t)]} = 1, \quad (13)$$

отражающее, в рамках принятого подхода к процессу длительного разрушения, результат исчерпания запаса пластичности материала при плавном или дискретно изменяющемся напряженном состоянии.

Зависимости, описывающие кинетику деформации при ползучести могут иметь в принципе различный вид, не связанный с какой то конкретной феноменологической теорией или моделью, так в (13) закон ползучести представлен в неконкретизированном виде интенсивностью скоростей деформаций ползучести  $\xi_i^c(t)$ . Получить решение задачи оценки времени разрушения и величины деформации на этот момент в аналитическом виде, как видно из (13), можно только для частных случаев, когда  $k_g(t) = const$  и  $m_n(t) = const$ . В общем случае она решается численно, пошагово, определяя на каждом этапе (шаге) процесса накопления деформаций последовательные величины  $k_g(t)$ ,  $m_n(t)$ ,  $\Delta_p[k_g(t), m_n(t)]$ ,  $\Psi(t)$  до тех пор, пока не выполнится условие (13).

С учетом вышеизложенного оценка характера разрушения (вязкий, хрупкий, смешанный) в общем случае длительного нагружения при сложном напряженном состоянии осуществляется из сопоставления величины накопленной деформации на момент исчерпания запаса пластичности  $\Phi_c^*(t_R)$  и запаса пластичности  $\Delta_v^c$ , необходимого для реализации вязкого разрушения, базирующегося на концепции вязкого течения Хоффа [11]. Его величина определяется из кривой деформирования, построенной в координатах  $\bar{\epsilon}_i^c - t(t/t_R)$  для монотонного деформирования и  $\Phi_c^* - t(t/t_R)$  для немонотонного, как ордината точки «условной» потери устойчивости деформирования. Точка «условной» потери устойчивого деформирования является точкой с максимальной кривизной траектории деформирования и соответственно с минимальным радиусом кривизны  $R_{min}$ , и разделяет её на две ветви (рис. 5) с относительно медленным нарастанием скорости деформирования

$$(t = 0, \bar{\epsilon}_i^c(\Phi_c^*) = 0 \div t = t_*, \bar{\epsilon}_i^c(\Phi_c^*) = \bar{\epsilon}_{i*}^c(\Phi_{c*}^*) = \Delta_v^c)$$

и её лавинообразным ростом

$$(t = t_*, \bar{\epsilon}_i^c(\Phi_c^*) = \bar{\epsilon}_{i*}^c(\Phi_{c*}^*) = \Delta_v^c \div t = t_R, \bar{\epsilon}_i^c(\Phi_c^*) = \infty).$$

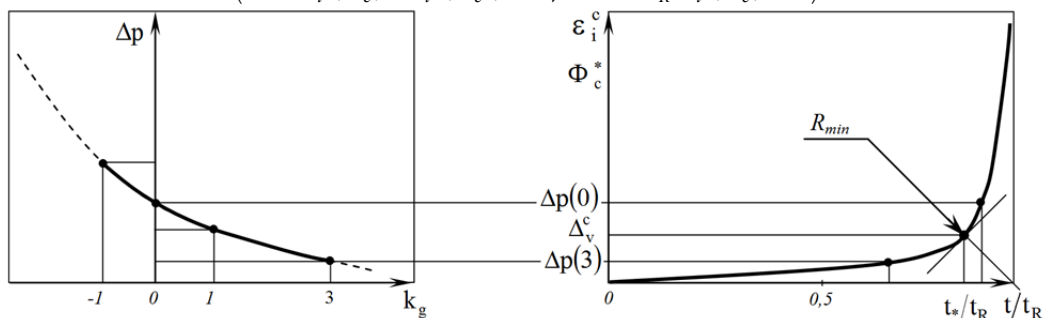


Рис. 5. Схематичное представление оценки характера длительного разрушения

На рис. 5 схематично представлен вариант, когда запаса пластичности  $\Delta_p(k_g = 0)$  при чистом сдвиге достаточно для реализации вязкого разрушения  $\Delta_p(k_g = 0) > \Delta_v^c(k_g = 0)$ , а в случае нагружения тонкостенной трубы давлением  $\Delta_p(k_g = 3) < \Delta_v^c(k_g = 3)$  недостаточно, и следовательно здесь будет иметь место хрупкий или смешанный тип разрушения.

#### Выводы

1. «Жесткость» напряженного состояния, отражающей соотношение удельных потенциальных энергий изменения объема и формоизменения является одним из существенных, а иногда определяющих факторов, влияющих на пластические свойства материала, и в конечном итоге на характер длительного разрушения.

2. Характер длительного разрушения зависит от соотношения запаса пластичности, необходимого для реализации вязкого разрушения и величины накопленной деформации на момент исчерпания запаса пластичности.

**Анотація.** Вирішується задача оцінки характеру тривалого руйнування в умовах повзучості з урахуванням «жорсткості» напруженого стану та траєкторії деформування. Руйнування в умовах тривалого статичного навантаження розглядається в рамках феноменологічного підходу як процес вичерпання вихідного запаса пластичності матеріалу. Оцінка характеру руйнування (в'язкий, крихкий, змішаний) здійснюється із зіставлення величини накопленої деформації на момент вичерпання запаса пластичності, і запаса пластичності, необхідної для реалізації в'язкого руйнування. Вплив траєкторії деформування при розвинених деформаціях урахується показником монотонності, що представляє собою відношення інтенсивності логарифмічних деформацій до параметра Одквіста. Жорсткість напруженого стану враховується показником жорсткості, що представляє собою з точністю до знака відношення других інваріантів кульового тензора й девіатора напружень, і відбиває з точністю до постійного множника співвідношення питомих потенційних енергій зміни обсягу та форми.

*Ключові слова:* руйнування, запас пластичності, показник жорсткості, інтенсивність деформації.

**Abstract.** The destruction in conditions of long-term static loading is examined in the limits of phenomenological approach as process of exhaustion original resource of the material plasticity, taking into account influence on its amount the nature of deformation and kinetics of "rigidity" intensive condition. The nature of deformation in the presence of developed deformation is taken into account with monotony exponent, which is accurate to a sign proportion second invariants of globular tensors and tension deviator, a relation of intensity of logarithmic deformations to the Odkvist parameter. An energetic approach is a baseline of structure of "rigidity" exponent, which reflects with accuracy to constant multiplier the proportion of specific potential energies of volume and form reduction. The estimation of nature of destruction (adherent, brittle, mixed) realizes from the comparison of amount of accumulate deformation at the moment of exhaustion the plasticity resource and plasticity resource, which is necessary for adherent deformation realization.

**Keywords:** deformation, plasticity resource, "rigidity" exponent, deformation intensity, intensive condition.

#### Библиографический список использованной литературы

1. Голуб В.П. Нелинейная ползучесть и длительное вязкое разрушение идеально-упругопластических стержней при растяжении / В.П.Голуб, А.В.Романов, Н.В.Романова // Прикл. механика, 2008.- Том 44, № 4.- С. 120-133.
2. Пластичность и разрушение / Под ред. В.Л.Колмогорова.- М.: Металлургия, 1977.- 336 с.
3. Грешков В.М. Прогнозирование разрушения металла в процесса холодной пластической деформации / В.М.Грешков, Ю.А.Лавриненко, А.В.Напалков / Сообщение 1. Приближенная модель пластической деформации и разрушения металлов // Пробл. прочности, 1999.- №1.- С. 76-85.
4. Добрянюк Ю.В. Моделювання напружено-деформованого та граничного станів поверхні циліндричних зразків при торцевому стисненні. Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня канд. техн. наук. Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАНУ.- Київ, 2012.
5. Беляев Н.М. Сопротивление материалов // Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука».- 1976.- 608 с.
6. Бриджмен П. Исследования больших пластических деформаций и разрыва.- М. Изд-во иностр. литературы, 1955.- 444 с.
7. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести.- М.: Машиностроение, 1975.- 400 с.
8. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел // Пер. с англ. под ред. Г.С.Шапира.- М.: Изд-во Иностранной литературы, 1954.- Том 1.- 648 с.
9. Корнилова Т.Н. Применение условия пластичности пористых тел к решению некоторых задач механики разрушения / Т.Н.Корнилова, В.Д.Дудунов // Пробл. прочности, 1996.- №6.- С. 17-26.
10. Оdkvist Ф. Упрочнение стали и подобных ей материалов // Теория пластичности.- М., 1948.- С. 283-290..
11. Hoff N.J. The necking and the rupture of rods subjected to constant tensile loads // Journal of Applied Mechanics.- 1953.- Vol. 20, N1, pp. 105-108.

#### References

1. Golub V.P., Romanov A.V., Romanova N.V., Nelineinaya polzuchest i dlitelnoe vyazkoe razrushenie idealno-uprugoplasticheskikh [Nonlinear creep and long viscous destruction ideal elastic and plastic cores at stretching]. Prikl. mehanika, 2008. Vol. 44, no 4, pp. 120-133.
2. Plastichnost i razrushenie [Plasticity and destruction]: Pod red. V.L.Kolmogorova. Moscow : Metallurgia, 1977. 336 p.
3. Greshkov V.M., Lavrinenko J.A., Napalkov A.V., Prognozirovanie razrushenia metalla v processe holodnoi plasticheskoi deformacii [Forecasting of destruction of metal in process of cold plastic deformation]: Soobshchenie 1. Probl. Prochnosti, 1999, no 1, pp. 76-85.
4. Dobranyuk J. V. Modelyuvannya naprujeno-deformovanoho ta granychnoho staniv poverhni cylindrychnyh zrazkiv pry torcevomu stysnenni [Modeling intense the deformed and limit condition of a surface of cylindrical samples at face compression]: Avtoreferat dysertacii na zdobuttya naukovoho stupenya kand. tehn. nauk. Instytut problem micnosti im. G.S.Pysarenka NANU. Kyiv, 2012.
5. Belyaev N.M. Soprotivlnie materialov [Resistance of materials]: Glavnaya redakcia fiziko-matematicheskoi literary izd-va "Nauka", 1976, 608 p.
6. Bridgeman P. Issledovaniya bolshyh plasticheskikh deformaciy i razryva (Researches of big plastic deformations and gap) Moscow: Izd-vo inostr. literatury, 1955, 444 p.
7. Malinin N. N. Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti (Applied theory of plasticity and creep) Moscow: Mashinostroenie, 1975, 400 p.
8. Nadai A. Plastichnost' i razrushenie tverdyyh tel [Plasticity and destruction of firm bodies]: Per. s angl. pod red. G.S.Shapiro. Moscow: Izd-vo Inostrannoy literatury, 1954, Vol. 1, 648 p.
9. Kornilova T. N., Dudunov V.D., Primenenie usloviya plastichnosti poristykh tel k resheniyu nekotoryh zadach mehaniki razrusheniya [Application of a condition of plasticity of porous bodies to the solution of some problems of mechanics of destruction]: Probl. prochnosti, 1996, no 6, pp. 17-26.
10. Odkvist F. Uprochnenie stali i podobnyh ey materialov [Hardening of steel and materials similar to it]: Teoriya plastichnosti. Moscow, 1948, pp. 283-290.
11. Hoff N. J. The necking and the rupture of rods subjected to constant tensile loads // Journal of Applied Mechanics. 1953. Vol. 20, no 1, pp. 105-108.