

УДК 621.833

Ткач П.М. к.т.н., доц.

Східноукраїнський національний університет імені Володимира Даля, м. Луганськ, Україна

ВИРОБНА ПОВЕРХНЯ ТА ВЕРСТАТНЕ ЗАЧЕПЛЕННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ПРЯМОЗУБИХ СИНУСОЇДАЛЬНИХ ПЕРЕДАЧ

Ткач Р.

Volodymyr Dahl East Ukrainian National University, Lugans'k, Ukraine (tpn@mail.ru)

PRODUCING SURFACE AND PRODUCING GEARING OF CYLINDRICAL SPUR SINE TRANSMISSIONS

У статті представлено теоретичне дослідження внутрішньої геометрії виробної поверхні та верстатного зачеплення для нарізування циліндричних прямозубих передач синусоїдального зачеплення. Виробна поверхня розглядається як інструментальна рейка з вихідним контуром, що спрофільовано синусоїдою – гладкою безперервною кривою. Дано рівняння поверхонь зубців інструментальної рейки, за допомогою яких розглянуто основні характеристики цієї виробної поверхні, а саме квадратичні форми і нормальні кривизни в заданих напрямках. Представлено рівняння верстатного зачеплення, за допомогою якого одержано рівняння поверхонь зубців, які можуть бути застосовані як для робочих поверхонь зубців, так і для їх галтелей. Для цих поверхонь також визначено квадратичні форми. Визначено межі поля зачеплення. Результати, одержані в статті, в подальшому можна використовувати для визначення якісних показників працездатності синусоїдальних передач, що дозволить проводити порівняльну оцінку синусоїдальних передач із традиційними та іншими видами передач.

Ключові слова: циліндрична прямозуба передача, синусоїдальне зачеплення, вихідний контур, виробна поверхня, інструментальна рейка, верстатне зачеплення.

Вступ

Передачі зачепленням є однією з найважливіших частин машин і механізмів. Зубчасті передачі завдяки своїм позитивним властивостям є найбільш поширеними і перспективними. Підтвердженням цього є постійне зростання світового обсягу їх виробництва [1]. Через це роботи, що спрямовані на покращення якісних показників працездатності зубчастих передач набувають великого значення для машинобудівної галузі, а завдання удосконалювання зубчастих передач є, безумовно, актуальним.

Аналіз літератури

Перспективним способом удосконалювання передач є оптимізація геометричних параметрів, що дає можливість без зміни матеріалів, габаритних розмірів та ступеня точності домогтися покращення якісних показників. Значного успіху у такому процесі було досягнуто щодо евольвентних передач [2,3], які тепер майже не мають резервів для подальшого удосконалювання. Це пов'язано у першу чергу з тим, що навантажувальну здатність евольвентних передач лімітує контактна міцність робочих поверхонь зубців. При цьому контактні напруження залежать значною мірою від діаметрів коліс. У той же час традиційні передачі зазвичай мають більший запас за згинальними напруженнями, ніж за контактними. Таке співвідношення запасів можна вважати ознакою нераціонального використання матеріалу, і цей недолік може бути подолано лише у певних межах.

Альтернативою традиційним ще у 70-ті роки минулого століття могли стати синусоїдальні передачі [4]. Автор роботи [4] довів, що вони створюють менший шум та вібрації при роботі, а також частково підтвердив припущення про більшу навантажувальну здатність за контактними напруженнями. Крім того, є підстави вважати, що синусоїдальний зуб матиме менші напруження в корені. Таке припущення здається досить імовірним, оскільки форма зуба синусоїдальної передачі є близькою до тіла рівного опору згину. Таким чином автор [4] спрогнозував можливість використання синусоїдальних передач в якості силових. Перевагою синусоїдального вихідного контуру є також і те, що його обкреслено гладкою безперервною кривою. Це зумовлює його властивість впливати і на параметри профілю, і на висоту зуба. У такий спосіб можна одночасно керувати запасами як контактної, так і згинальної міцності

Нажаль, синусоїдальні передачі не набули широкого поширення та були майже забыті. Можна припустити, що причиною забуття були технологічні складності їх виготовлення. Але у останні роки ці складності було подолано завдяки новому способу їх виготовлення [5]. Експериментальні передачі [6], що

виготовлені за способом [5] потребують подальшого дослідження. Зокрема, для них треба проаналізувати значення якісних показників працездатності [7] у межах поля зачеплення для різних параметрів вихідного контуру. Для визначення цих показників потрібна математична модель синусоїдальної передачі.

Мета статті

Метою статті є створення бази для математичної моделі синусоїдального зачеплення, зокрема дослідження внутрішньої геометрії виробної поверхні та верстатного зачеплення, що дозволить надалі визначати показники працездатності таких передач.

Постановка завдання

Основою виробної поверхні є синусоїдальний вихідний контур (рис. 1а), оскільки він утворює її нормальний переріз (рис. 1б). Слід зазначити, що синусоїдальний вихідний контур, на відміну від евольвентного та інших відомих, є суцільним. Це дає можливість у межах однієї математичної моделі розглядати і робочу частину і гальтель, які будуть описані однією функцією. Виробну поверхню будемо розглядати як інструмент рейкового типу.

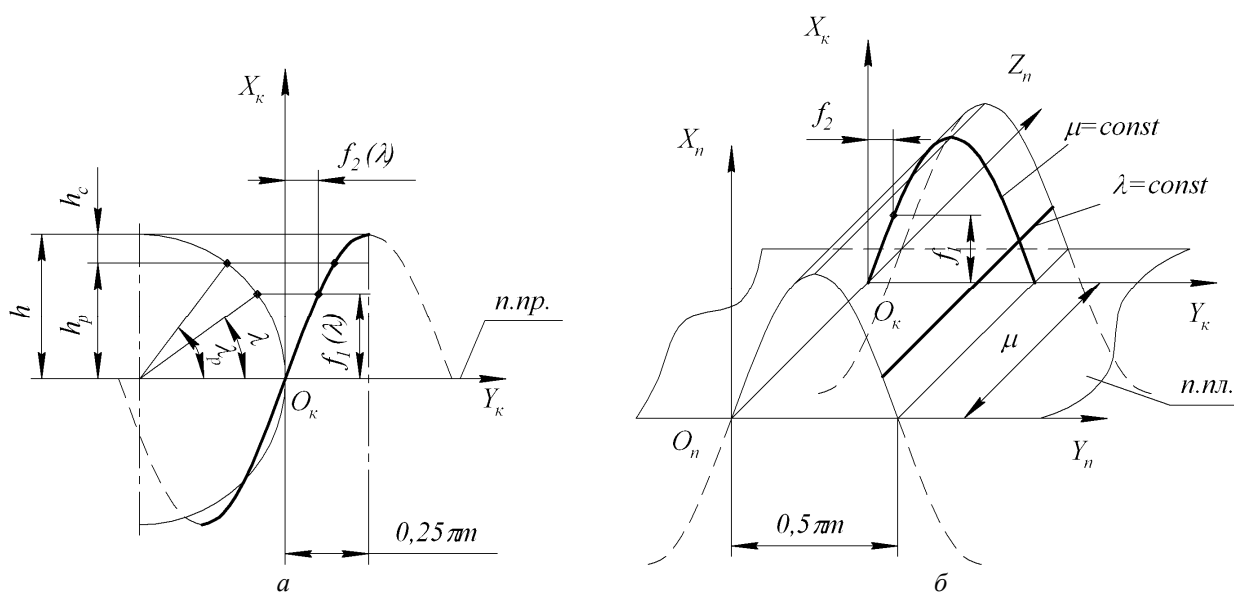


Рис. 1. Основні параметри виробної поверхні та системи координат *a* – синусоїдальний вихідний контур; *б* – виробна поверхня синусоїдальних передач

1. Синусоїдальний вихідний контур

Уведемо систему координат S_k , що пов'язана з вихідним контуром. При цьому вісь $O_k Y_k$ спрямована по початковій прямій розглянутого перерізу зуба інструментальної рейки (рис. 1а). У системі координат S_k рівняння профілю вихідного контуру можна представити у параметричному виді [8]. Такий спосіб завдання профілю є дуже зручним для гладкої періодичної кривої, такої як синусоїда. Координати дорівнюють

$$\begin{aligned} x_k &= f_1(\lambda) = h \sin \lambda; \\ y_k &= f_2(\lambda) = \lambda / 2, \end{aligned} \quad (1)$$

де $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ – функції, якими задано вихідний контур;

λ – змінна величина; у якості параметра для синусоїди прийемо кут λ (рис. 1а)

h – висота профілю, що дорівнює радіусу утворюючого кола (рис. 1а).

Тут і в подальшому прийнято значення модулю $m = 1$ мм. Для дослідження передач з іншим модулем треба в рівняннях (1) і далі значення x_k і y_k помножити на m .

Профільний кут інструмента з узагальненим вихідним контуром визначимо зі співвідношення [8]

$$\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{f_2'(\lambda)}{f_1'(\lambda)} = \frac{1}{2h \cos \lambda}, \quad (2)$$

де $f_1'(\lambda)$, $f_2'(\lambda)$ – похідні функцій $f_1(\lambda)$ і $f_2(\lambda)$ за λ .

Для синусоїдального вихідного контуру вони визначаються як

$$\begin{aligned} f_1' &= h \cos \lambda; \\ f_2' &= 0,5. \end{aligned} \quad (3)$$

Згідно [8] профільний кут можна також визначати за залежностями

$$\sin \alpha = \frac{f_2'(\lambda)}{\sqrt{[f_1'(\lambda)]^2 + [f_2'(\lambda)]^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{f_1'(\lambda)}{\sqrt{[f_1'(\lambda)]^2 + [f_2'(\lambda)]^2}}. \quad (4)$$

Знаменник у цих співвідношеннях – це модуль орта нормалі. З урахуванням (3) він дорівнюватиме

$$n = \sqrt{h^2 \cos^2 \lambda + 0,25}. \quad (4)$$

Тоді

$$\sin \alpha = \frac{1}{2n}; \quad \cos \alpha = \frac{h \cos \lambda}{n}. \quad (5)$$

Параметри синусоїдального вихідного контуру є основою приведених далі досліджень, при цьому будуть використані рівняння (1) – (5).

2. Виробна поверхня та її елементи

Якщо процес нарізування розглядати як зачеплення рейкового інструмента (виробної поверхні) з нарізаними колесами, поверхні зубців будуть огинаючими виробної поверхні. Для отримання рівняння виробної поверхні введемо систему координат, що пов'язана з нею, S_n . Тоді у системі координат S_n рівняння цієї поверхні [8]

$$x_n = h \sin \lambda; \quad y_n = 0,5\lambda; \quad z_n = \mu. \quad (6)$$

де μ – змінна величина (рис. 1б).

Оскільки робоча ділянка і галтель описано однією функцією, поділити ці ділянки можна лише умовно. Виробну поверхню для формування робочих профілів зубців обмежимо висотою $2h_p$ (рис. 1а). Отже робочу виробну поверхню одержимо з рівняння (6) у таких межах кута λ :

$-\lambda_p \leq \lambda \leq 0$ – для утворення головки зуба шестірні та ніжки зуба колеса,

$0 \leq \lambda \leq \lambda_p$ – для утворення ніжки зуба шестірні та головки зуба колеса.

Тоді для утворення перехідних поверхонь зубців, а також радіального зазору у зачепленні призначається решта висоти вихідного контуру – по h_c на головці і ніжці (рис. 1а). Тоді перехідну виробну поверхню одержуємо також з рівняння (6), але в інших межах кута λ :

$-\pi/2 \leq \lambda \leq \lambda_p$ – для утворення головки зуба шестірні та ніжки зуба колеса,

$\lambda_p \leq \lambda \leq \pi/2$ – для утворення ніжки зуба шестірні та головки зуба колеса.

Для визначення λ_p треба задатися співвідношенням h_p і h_c . В традиційних передачах себе дуже добре зарекомендувало таке співвідношення $h_p : h_c = 1 : 0,25$. Враховуючи, що $h_p + h_c = h$, висоти h_p і h_c співвідносяться як $h_p : h = 0,8$. Тоді, підставивши h_p у (1) замість x_n , одержуємо

$$\lambda_p = \arcsin \frac{h_p}{h} = \arcsin 0,8 = 53,13^\circ. \quad (7)$$

Якщо для збільшення або зменшення радіального зазору у зачепленні знадобиться задати інше співвідношення $h_p : h_c$, залежність (7) дасть інше значення λ_p , що дозволить поділити профіль на робочу і перехідну частини незалежно від значення h .

Для одержання показників працездатності циліндричних передач будуть потрібні такі елементи виробної поверхні як нормаль та її проекції на осі координат, коефіцієнти перших і другий квадратичних форм, нормальні кривизни в заданих напрямках.

Вектор нормалі визначається формулою [8]

$$\bar{N}_n = \bar{r}_n^\lambda \times \bar{r}_n^\mu, \quad (8)$$

де \bar{r}_n^λ й \bar{r}_n^μ – частинні похідні радіуса-вектора виробної поверхні (6) за λ й по μ відповідно:

$$\begin{aligned} x_n^\lambda &= h \cos \lambda; \quad x_n^\mu = 0; \\ y_n^\lambda &= 0,5; \quad y_n^\mu = 0; \\ z_n^\lambda &= 0; \quad z_n^\mu = 1. \end{aligned} \quad (9)$$

Підставляючи (9) в (8), одержимо проекції вектора нормалі до виробної поверхні

$$N_{xn} = 0,5; N_{yn} = -h \cos \lambda; N_{zn} = 0. \quad (10)$$

Оскільки модуль вектора (10) визначено раніше, він дорівнює (4), одержуємо одиничний вектор нормалі в параметричній формі

$$e_{xn} = \frac{1}{2n}; e_{yn} = -\frac{h \cos \lambda}{n}; e_{zn} = 0, \quad (11)$$

Коефіцієнти першої квадратичної форми в загальному випадку дорівнюють [8]:

$$\begin{aligned} E_n &= (x_n^\lambda)^2 + (y_n^\lambda)^2 + (z_n^\lambda)^2; \\ F_n &= x_n^\lambda x_n^\mu + y_n^\lambda y_n^\mu + z_n^\lambda z_n^\mu; \\ G_n &= (x_n^\phi)^2 + (y_n^\phi)^2 + (z_n^\phi)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Для поверхні (6), підставляючи (9) в (12) одержимо

$$E_n = n^2 = h^2 \cos^2 \lambda + 0,25; F_n = 0; G_n = 1. \quad (13)$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми [8]

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{\partial^2 x_n}{\partial \lambda^2} e_{xn} + \frac{\partial^2 y_n}{\partial \lambda^2} e_{yn} + \frac{\partial^2 z_n}{\partial \lambda^2} e_{zn}; \\ M_n &= \frac{\partial^2 x_n}{\partial \lambda \partial \mu} e_{xn} + \frac{\partial^2 y_n}{\partial \lambda \partial \mu} e_{yn} + \frac{\partial^2 z_n}{\partial \lambda \partial \mu} e_{zn}; \\ N_n &= \frac{\partial^2 x_n}{\partial \mu^2} e_{xn} + \frac{\partial^2 y_n}{\partial \mu^2} e_{yn} + \frac{\partial^2 z_n}{\partial \mu^2} e_{zn}. \end{aligned} \quad (14)$$

Знайдемо другі похідні радіуса-вектора виробної поверхні за λ і μ

$$\frac{\partial^2 x_n}{\partial \lambda^2} = -h \sin \lambda; \frac{\partial^2 y_n}{\partial \lambda^2} = 0; \frac{\partial^2 z_n}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 x_n}{\partial \lambda \partial \mu} = 0; \frac{\partial^2 y_n}{\partial \lambda \partial \mu} = 0; \frac{\partial^2 z_n}{\partial \lambda \partial \mu} = 0. \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 x_n}{\partial \mu^2} = 0; \frac{\partial^2 y_n}{\partial \mu^2} = 0; \frac{\partial^2 z_n}{\partial \mu^2} = 0. \quad (17)$$

Підставивши (11), (15), (16) і (17) в (14), одержуємо залежності для визначення коефіцієнтів другої квадратичної форми

$$L_n = \frac{h \sin \lambda}{2n}; M_n = 0; N_n = 0. \quad (18)$$

Співвідношення (13) і (18) залежать від параметрів, що визначають синусоїдальний вихідний контур і справедливі для прямокутих синусоїдальних рейок.

Нормальна кривизна виробної поверхні в загальному виді може бути визначена залежністю [8]

$$K = \frac{L_n d\lambda^2 + 2M_n d\lambda d\mu + N_n d\mu^2}{E_n d\lambda^2 + 2F_n d\lambda d\mu + G_n d\mu^2}, \quad (19)$$

де $d\lambda$ й $d\mu$ – диференціали координатних ліній λ й μ .

Напрямок, у якому визначається кривизна, залежить від значень $d\lambda$ і $d\mu$. Так, наприклад, кривизна уздовж ліній $\lambda = const$ (рис. 16) дорівнює:

$$K_\mu = \frac{N_n}{G_n} = 0, \quad (20)$$

що є характерним для прямокутої передачі.

Кривизна уздовж ліній $\mu = const$, тобто кривизна вихідного контуру (рис. 16), дорівнює

$$K_\lambda = \frac{L_n}{E_n} = \frac{h \sin \lambda}{n^3}. \quad (21)$$

Оскільки для розглянутої виробної поверхні коефіцієнти квадратичних форм $F_n = 0$ та $M_n = 0$, координатні лінії $\lambda = const$ і $\mu = const$ є лініями кривизни, а нормальні кривизни (20) і (21) – головними кривизнами поверхні (6).

3. Верстатне зачеплення

Розглянемо нарізування циліндричних зубчастих передач загального виду інструментом рейкового типу. Для дослідження верстатного зачеплення, тобто зачеплення інструментальної рейки з колесом, що нарізується, уведемо системи координат (рис. 2):

S_1 – система координат, пов'язана із шестірнею;

S_2 – система координат, пов'язана з колесом;

S – нерухома система координат.

Початковий циліндр заготовки перекочується по початковій площині виробної поверхні. Площина $Y_n O_n Z_n$ є початковою площиною рейки, площина YOZ збігається із площиною $Y_n O_n Z_n$, при цьому вісь OZ збігається з полюсною прямою. Вісь OY збігається з віссю $O_n Y_n$. Площина YOX проходить через середній торцевий переріз передачі. Осі $O_1 Z_1$ та $O_2 Z_2$ є осями обертання коліс, що нарізають, і паралельні осі OZ . R_1 та R_2 – радіуси початкових циліндрів, а ϕ_1 та ϕ_2 – кути повороту шестірні й колеса. Надалі індексом «1» будемо позначати елементи, що відносяться до шестірні, індексом «2» – елементи, що відносяться до колеса. Тобто, приймемо $i = 1$ – для шестірні, $i = 2$ – для колеса, тоді при повороті заготовки на кут ϕ_i виробна поверхня переміститься на величину $R_i \phi_i$.

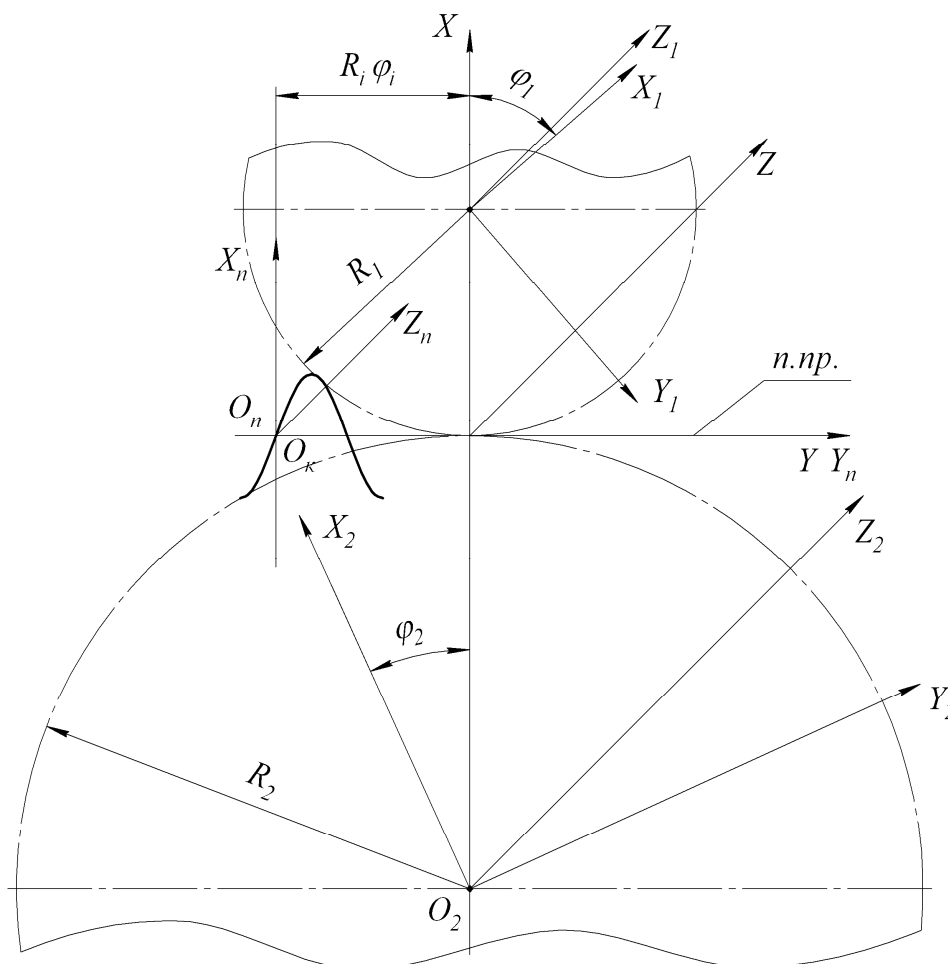


Рис. 2. Системи координат

Перехід від однієї системи координат до іншої будемо здійснювати матричним способом. Надалі нам знадобляться відомі з [9] матриці переходу. Застосовуючи матрицю переходу від S_n до S , одержуємо в нерухомій системі координат рівняння виробної поверхні

$$x = h \sin \lambda; \quad y = 0,5\lambda - R_i \phi_i; \quad z = \mu. \quad (22)$$

Рівняння верстатного зачеплення виробної поверхні з колесом, що нарізується, має вигляд [10]

$$F_i = \bar{V}^{ni} \cdot \bar{e}_n = 0, \quad (23)$$

де \bar{V}^{ni} – відносна швидкість у верстатному зачепленні виробної поверхні з колесом, що нарізується, дорівнює [11]

$$\bar{V}^{ni} = M_{ni} \frac{dM_{in}}{d\phi_i} \bar{r}_n. \quad (24)$$

де M_{ni} – матриця переходу від системи координат S_i до S_n

$$M_{ni} = \begin{vmatrix} \cos \phi_i & \pm \sin \phi_i & 0 & \mp R_i \\ \mp \sin \phi_i & \cos \phi_i & 0 & R_i \phi_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad (25)$$

$\frac{dM_{in}}{d\phi_i}$ – похідна матриці (25) за параметром ϕ

$$\frac{dM_{in}}{d\phi_i} = \begin{vmatrix} -\sin \phi_i & \mp \cos \phi_i & 0 & \pm R_i \phi_i \cos \phi_i \\ \pm \cos \phi_i & -\sin \phi_i & 0 & R_i \phi_i \sin \phi_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (26)$$

З урахуванням (24), (25) і (26) маємо

$$V^{ni} = \mp (0,5\lambda - R_i \phi_i) \bar{i} \pm (h \sin \lambda) \bar{j}. \quad (27)$$

Для одержання дійсного значення відносної швидкості необхідно праву частину (27) помножити на кутову швидкість ω_i .

Підставляючи в (23) значення (11) і (27), одержуємо рівняння верстатного зачеплення

$$F_i = \frac{1}{2n} \left[\pm (h^2 \sin 2\lambda + 0,5\lambda) \mp R_i \phi_i \right] = 0. \quad (28)$$

Рівняння (28) визначає зв'язок між параметрами λ і ϕ . Розв'язавши можна визначити ϕ_i , що відповідає певному положенню лінії контакту на виробній поверхні. Оскільки випадок $1/2n = 0$ є нереальним для синусоїдального профілю

$$\phi_i = \frac{h^2 \sin 2\lambda + 0,5\lambda}{R_i}. \quad (29)$$

При розв'язанні зворотної задачі маємо трансцендентне рівняння. Якщо розкласти функцію $\sin 2\lambda$ у ряд Тейлора, обмежуючись трьома членами ряду, це забезпечить відхилення значення від $\sin 2\lambda$ не більше 0,45% у діапазоні $0 \leq \lambda \leq \pi/2$. Тоді, прийнявши

$$\sin 2\lambda = 2\lambda - \frac{(2\lambda)^3}{6} + \frac{(2\lambda)^5}{120},$$

після перетворень одержуємо рівняння

$$\lambda^5 - 5\lambda^3 + \left(\frac{15}{8h^2} + 7,5 \right) \lambda - \frac{15R_i \phi_i}{h^2} = 0, \quad (30)$$

ліва частина якого має вид поліному $y^5 + ty^3 + ry + s$.

Рівняння (30) може бути розв'язано методом ітерацій [12]. Один з дійсних коренів рівняння буде визначати точку на профілі вихідного контуру, що відповідає $\phi_i = const$.

Рівняння (28) разом з (22) визначають поверхню верстатного зачеплення, тобто геометричного місця точок, у яких відбувається контакт виробної поверхні та поверхні, що нарізується. Виключивши із цих рівнянь один з параметрів, наприклад ϕ , одержимо рівняння поверхні верстатного зачеплення в параметричному виді:

$$x = h \sin \lambda; \quad y = -h^2 \sin 2\lambda; \quad z = \mu. \quad (31)$$

При використанні для нарізування зубців шестірні й колеса однієї й тієї ж виробної поверхні будемо мати випадок лінійчатого контакту в робочому зачепленні. Для зубчастих передач, що нарізано без зміщення інструмента, а також для рівнозміщених передач поверхня верстатного зачеплення збігається з поверхнею робочого зачеплення коліс. При $z = const$ рівняння (31) визначають лінію верстатного зачеплення в торцевій площині. Для передач із лінійчатим контактом ця лінія верстатного зачеплення буде лінією робочого зачеплення коліс у торцевій площині.

При $\phi_i = const$ рівняння (22) і (28) визначають лінію миттєвого контакту (характеристику) виробної поверхні та поверхонь зубців коліс, що нарізають. Ця лінія для передач, що нарізано без зміщення інструмента та рівнозміщених передач, збігається з лінією миттєвого контакту зубців коліс, що зачеплюються.

Відносна швидкість у верстатному зачепленні з урахуванням (27) і (28) визначається для $\omega_i = 1$ за формулою

$$\bar{v}^{ni} = \pm h^2 \sin 2\lambda \bar{i} \pm h \sin \lambda \bar{j}. \quad (32)$$

У рівняннях (25)-(28) і (32) верхній знак і $i = 1$ приймається для зубців шестірні, нижній та $i = 2$ – для зубців колеса.

4. Параметри поверхонь зубців коліс, що нарізають

Для визначення рівнянь поверхонь зубців коліс, що нарізають, необхідно представити рівняння поверхні верстатного зачеплення в системах координат S_1 або S_2 . Для цього скористаємося матрицею переходу

$$M_{i0} = \begin{vmatrix} \cos \phi_i & \mp \sin \phi_i & 0 & \pm R_i \cos \phi_i \\ \pm \sin \phi_i & \cos \phi_i & 0 & R_i \sin \phi_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Рівняння поверхонь контактуючих зубців шестірні ($i = 1$) і колеса ($i = 2$) у системі координат S_i мають вигляд

$$\begin{aligned} x_i &= (h \sin \lambda \pm R_i) \cos \phi_i \pm h^2 \sin 2\lambda \sin \phi_i; \\ y_i &= \pm (h \sin \lambda \pm R_i) \sin \phi_i - h^2 \sin 2\lambda \cos \phi_i; \\ z_i &= \mu. \end{aligned} \quad (33)$$

Рівняння (33) дозволяють визначити товщину зубців при розрахунках на згин, а також контрольні розміри зубчастих коліс, що нарізають.

При $\phi_i = const$ рівняння (33) є рівняннями миттєвих ліній контакту коліс, що зачеплюються. При $z = const$ ці рівняння описують профілі зубців шестірні й колеса в торцевому перерізі.

При $\lambda = const$ рівняння (33) являють собою рівняння прямих, які є твірними циліндрів. Радіуси цих циліндрів можна визначити за формулою

$$R_{bi} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2},$$

або з урахуванням (33)

$$R_{bi} = \sqrt{(h \sin \lambda \pm R_i)^2 + h^4 \sin^2 2\lambda}. \quad (34)$$

Рівняння (34) можна використати для визначення λ , що відповідає граничним точкам поля зачеплення передачі. Для цього в ліву частину співвідношення (34) необхідно підставити значення R_{a1} та R_{a2} – радіусів кіл вершин зубців, відповідно, шестірні та колеса, і розв'язати їх відносно λ . Отримані значення λ слід застосовувати при визначенні показників працездатності передач, що нарізають.

Для визначення товщини зубців у торцевому перерізі необхідно при заданих R_{b1} і R_{b2} з рівняння (34) визначити λ_i^* , а з рівняння зачеплення (28) кут ϕ_i^* . Підставивши отримані λ_i^* і ϕ_i^* у рівняння (33) знаходимо координати профілю зуба в торцевому перерізі для заданих R_{b1} та R_{b2} . Для симетричного вихідного контуру товщина зуба нарізуваного колеса в торцевому перерізі дорівнює

$$S = \frac{\pi}{2} - 2|y_i| = \frac{\pi}{2} - 2 \left| \pm (h \sin \lambda_i^* \pm R_i) \sin \phi_i^* - h^2 \sin 2\lambda_i^* \cos \phi_i^* \right|. \quad (35)$$

Відстань від вершини зуба до вимірювальної хорди (вимірювальна висота) дорівнює

$$h^* = R_{ai} - x_i, \quad (36)$$

Координати x_i у (36) визначаються з рівнянь (33) при λ_i^* і ϕ_i^* .

Для запобігання загостренню зубців при проектуванні передач визначається товщина вершин зубців. Для цього можна скористатись співвідношенням (35), але при визначенні λ_i^* і ϕ_i^* замість R_{bi} необхідно прийняти R_{ai} .

5. Коефіцієнти квадратичних форм поверхонь зубців

Геометричною характеристикою поверхонь зубців є перша та друга квадратичні форми, коефіцієнти яких визначимо за залежностями [8]

$$E_i = (x_i^\lambda)^2 + (y_i^\lambda)^2 + (z_i^\lambda)^2; F_i = x_i^\lambda x_i^\phi + y_i^\lambda y_i^\phi + z_i^\lambda z_i^\phi; G_i = (x_i^\phi)^2 + (y_i^\phi)^2 + (z_i^\phi)^2; \quad (37)$$

$$L_i = -x_i^\lambda e_{xi}^\lambda - y_i^\lambda e_{yi}^\lambda - z_i^\lambda e_{zi}^\lambda; M_i = -x_i^\phi e_{xi}^\lambda - y_i^\phi e_{yi}^\lambda - z_i^\phi e_{zi}^\lambda; N_i = -x_i^\phi e_{xi}^\phi - y_i^\phi e_{yi}^\phi - z_i^\phi e_{zi}^\phi, \quad (38)$$

де $x_i^\lambda, y_i^\lambda, z_i^\lambda, x_i^\phi, y_i^\phi, z_i^\phi$ – похідні радіуса-вектора (33) за λ і ϕ відповідно;

$e_{xi}^\lambda, e_{yi}^\lambda, e_{zi}^\lambda, e_{xi}^\phi, e_{yi}^\phi, e_{zi}^\phi$ – похідні проекцій одиничного вектора нормалі поверхонь зубців за λ і ϕ відповідно.

Похідні радіуса-вектора (33) дорівнюють

$$\begin{aligned} x_i^\lambda &= h \cos \lambda \cos \phi_i \pm 2h^2 \cos 2\lambda \sin \phi_i; \\ y_i^\lambda &= \pm h \cos \lambda \sin \phi_i - 2h^2 \cos 2\lambda \cos \phi_i; \end{aligned} \quad (39)$$

$$z_i^\lambda = 0,$$

$$\begin{aligned} x_i^\phi &= -(h \sin \lambda \pm R_i) \sin \phi_i \pm h^2 \sin 2\lambda \cos \phi_i; \\ y_i^\phi &= \pm (h \sin \lambda \pm R_i) \cos \phi_i + h^2 \sin 2\lambda \sin \phi_i; \end{aligned} \quad (40)$$

$$z_i^\phi = 0,$$

Похідні проекцій одиничного вектора нормалі поверхонь зубців можна визначити через похідні орта нормалі (11) виробної поверхні (6), що дорівнюють

$$e_{xn}^\lambda = \frac{h^2 \sin 2\lambda}{n^3}; e_{yn}^\lambda = -\frac{0,25h \sin \lambda}{n^3}; e_{zn}^\lambda = 0, \quad (41)$$

$$e_{xn}^\phi = 0; e_{yn}^\phi = 0; e_{zn}^\phi = 0, \quad (42)$$

Орти нормалі виробної поверхні (6) та орти нормалей поверхонь (33) зубців шестірні і колеса пов'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned} e_{xi}^\lambda &= e_{xn}^\lambda \cos \phi_i \mp e_{yn}^\lambda \sin \phi_i; \\ e_{yi}^\lambda &= \pm e_{xn}^\lambda \sin \phi_i + e_{yn}^\lambda \cos \phi_i; \end{aligned} \quad (43)$$

$$e_{zi}^\lambda = e_{zn}^\lambda.$$

$$\begin{aligned} e_{xi}^\phi &= e_{xn}^\phi \cos \phi_i - e_{yn}^\phi \sin \phi_i \mp e_{zn}^\phi \sin \phi_i; \\ e_{yi}^\phi &= \pm (e_{xn}^\phi \sin \phi_i + e_{yn}^\phi \cos \phi_i) + e_{zn}^\phi \cos \phi_i; \end{aligned} \quad (44)$$

$$e_{zi}^\phi = e_{zn}^\phi.$$

Підставляючи (41) і (42) відповідно у (43) і (44), одержуємо необхідні похідні ортів

$$\begin{aligned} e_{xi}^\lambda &= \frac{h^2 \sin 2\lambda}{n^3} \cos \phi_i \pm \frac{0,25h \sin \lambda}{n^3} \sin \phi_i; \\ e_{yi}^\lambda &= \pm \frac{h^2 \sin 2\lambda}{n^3} \sin \phi_i - \frac{0,25h \sin \lambda}{n^3} \cos \phi_i; \end{aligned} \quad (45)$$

$$e_{zi}^\lambda = 0.$$

$$e_{xi}^\phi = -\frac{1}{2n} \sin \phi_i \pm \frac{h \cos \lambda}{n} \cos \phi_i;$$

$$e_{yi}^{\phi} = \pm \frac{1}{2n} \cos \phi_i + \frac{h \cos \lambda}{n} \sin \phi_i; \quad (46)$$

$$e_{zi}^{\phi} = 0.$$

Після відповідної підстановки (39), (40) і (45), (46) у (37) і (38) одержуємо для поверхонь зубців шестірні і колеса:

– коефіцієнти перших квадратичних форм

$$E_i = h^2 \cos^2 \lambda + 4h^4 \cos^2 2\lambda;$$

$$F_i = \pm 2h^3 \sin^3 \lambda \mp 2h^2 R_i \cos 2\lambda;$$

$$G_i = (h \sin \lambda \pm R_i)^2 + h^4 \sin^2 2\lambda. \quad (47)$$

– коефіцієнти других квадратичних форм

$$L_i = \frac{h^3 (\sin 2\lambda \cos \lambda + 0,5 \cos 2\lambda \sin \lambda)}{n^3};$$

$$M_i = \frac{\pm 0,25 (h \sin \lambda \pm R_i) h \sin \lambda \mp h^4 \sin^2 2\lambda}{n^3}; \quad (48)$$

$$N_i = -\frac{0,5 (h \sin \lambda \pm R_i) + h^3 \sin 2\lambda \cos \lambda}{n};$$

Висновки

1. Розроблено основу математичної моделі синусоїдальної прямозубої циліндричної передачі. Для такої передачі математично описано виробну поверхню з визначенням її основних геометричних характеристик, досліджено зачеплення цієї поверхні з нарізаними зубцями, одержано рівняння поверхонь цих зубців, а також основні геометричні характеристики цих поверхонь. Одержані рівняння дозволяють також визначати межі поля зачеплення, визначати контрольні розміри зубців та встановлювати обмеження при проектуванні синусоїдальних передач.
2. Використовуючи результати, одержані в статті, в подальшому можна визначити всі геометричні характеристики поверхонь зубців шестірні і колеса (наприклад, кривизни поверхонь зубців у будь-якому заданому напрямку, довжину миттєвих контактних ліній, кут між заданими на поверхні напрямками тощо). Ці характеристики є основою для визначення показників працездатності синусоїдальних передач. З використанням цих показників можна проводити порівняльний аналіз синусоїдальних передач не лише з традиційними, але і з іншими видами передач.

Анотація. В статті представлено теоретичне дослідження внутрішньої геометрії виробляючої поверхності і станочного зачеплення для нарезання циліндричних прямозубих передач синусоїдального зачеплення. Производящая поверхность рассматривается как инструментальная рейка с исходным контуром, который спрофилирован синусоидой – гладкой непрерывной кривой. Представлены уравнения поверхностей зубьев инструментальной рейки, с помощью которых рассмотрены основные характеристики этой производящей поверхности, а именно квадратичные формы и нормальные кривизны в заданных направлениях. Получены уравнения станочного зацепления, с помощью которых выведены уравнения поверхностей зубьев, которые могут быть применены как для рабочих поверхностей зубьев, так и для их галтелей. Для этих поверхностей также определены квадратичные формы. Определены границы поля зацепления. Результаты, полученные в статье, в дальнейшем можно использовать для определения качественных показателей работоспособности синусоидальных передач, что позволит проводить сравнительную оценку синусоидальных передач с традиционными и другими видами передач.

Ключевые слова: циліндрична прямозуба передача, синусоїдальне зачеплення, вихідний контур, виробляюча поверхність, інструментальна рейка, станочне зачеплення.

Abstract.

Purpose. Creation a fundamentals of mathematical model which consists in definition of geometry of a manufacturing surface and cutting meshing for cylindrical spur sine transmission.

Design/methodology/approach. The manufacturing surface is considered as rack-cutter with teeth, which profiled by sine wave - a smooth continuous curve. The equations of teeth surfaces which help the basic performances of this manufacturing surface surveyed, namely quadratic forms and normal curvatures in the given directions presented. The equations of cutting gearings which help to obtain the equations of surfaces of teeth which can be applied both for working surfaces of teeth are inferred, and for their fillets are obtained. For these surfaces quadratic forms also are defined. Boundaries of a field of a meshing are defined.

Findings. The results obtained in a paper possible to use for definition of quality indicators of serviceability of sine transmissions which will allow carrying out a comparative estimation of sine transmissions with traditional and other types of transmissions.

Originality/value. Theoretical research of internal geometry of a manufacturing surface and cutting meshing for manufacturing of cylindrical spur sine transmissions.

Keywords: cylindrical spur transmission, sine meshing, basic shape, manufacturing surface, rack-cutter, cutting meshing

Бібліографічний список використаної літератури

1. Гольдфарб В.И. Некоторые аспекты современного состояния теории и практики зубчатых передач / В.И. Гольдфарб // Сборник докладов научно-технической конференции «Теория и практика зубчатых передач и редукторосроения». – Ижевск, 2008. – С. 8-15.
2. Вулгаков Э.Б. Общий случай синтеза эвольвентного зацепления / Э.Б. Вулгаков // Труды Рижского института инженеров гражданской авиации. Сб: «Исследование механических передач приводов агрегатов, 1970. – Вып. 148. – с. 55-68.
3. Вулгаков Э.Б. Зубчатые передачи с улучшенными свойствами / Э.Б. Вулгаков. – М.: Машиностроение, 1974. – 264 с.
4. Аникин Ю.В. Синусоидальное зацепление: основы геометро-кинематической теории / Ю.В. Аникин. – Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1975. – 63 с.
5. Грицай І.Є. Синусоїдальні зубчасті передачі як альтернатива традиційним передачам та новий метод їх виготовлення / І.Є. Грицай, Я.М. Литвиняк // Вісник Нац. Техн. ун-ту «ХПІ». Зб. наук. праць. Тематичний випуск «Проблеми механічного приводу». – Харків: НТУ «ХПІ», 2009. – №19. – 168 с. – С. 43-52.
6. Грицай І.Є. Удосконалення технології виготовлення зубчастих коліс на основі нового методу зубонарізання / І.Є. Грицай, В.І. Вільшанецький // Вісник Нац. Техн. ун-ту «ХПІ». Зб. наук. праць. Тематичний випуск «Проблеми механічного приводу». – Харків: НТУ «ХПІ», 2011. – №28. – 190 с. – С. 44-52.
7. Теория, математическое обеспечение и реализация синтеза высоконагруженных передач зацеплением для промышленного транспорта: Дис. ... докт. техн. наук. 05.05.02 / В.П. Шишов. – Луганск, 1994. – 525 с.
8. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия / А.В. Погорелов. – М.: Наука, 1974. – 176 с.
9. Погорелов А.В. Аналитическая геометрия: Учебник для вузов / А. В. Погорелов. – 4-е изд., перераб. – М.: Наука, 1978. – 208 с.
10. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений / Ф.Л. Литвин. – М.: Наука, 1968. – 584 с.
11. Дусев И.И. Связь между геометрическими и кинематическими параметрами высшей кинематической пары / И.И. Дусев // Изв. Северо-Кавказского научного центра высшей школы. – 1973. – № 3. – С.28-32.
12. Бронштейн И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – 13-е изд. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. – 544с.

References

1. Goljdfarb V.I. Nekotoriye aspektih sovremennogo sostoyaniya teorii i praktiki zubchatihkh peredach. Sbornik dokladov nauchno-tekhnicheskoy konferencii «Teoriya i praktika zubchatihkh peredach i reduktorosroeniya». Izhevsk. 2008. P. 8-15.
2. Vulgakov Eh.B. Obshiy sluchay sinteza ehvolventnogo zacepleniya. Trudih Rizhskogo instituta inzhenerov grazhdanskoy aviacii. Sb: «Issledovanie mekhanicheskikh peredach privodov agregatov. 1970. Vihp. 148. P. 55-68.
3. Vulgakov Eh.B. Zubchatiye peredachi s uluchshennimi svoystvami. Moscow: Mashinostroenie. 1974. 264 p.
4. Anikin Yu.V. Sinusoidalnoye zaceplenie: osnovih geometro-kinemacheskoy teorii. Voronezh: Izd-vo Voronezhskogo un-ta, 1975. 63 p.
5. Gricay I.E., Litvinyak Ya.M. Sinusoidalni zubchasti peredachi yak aljternativa tradiciyjnim peredacham ta noviy metod ikh vigoovlennya. Visnik Nac. Tekhn. un-tu «KhPI». Zb. nauk. pracj. Tematichnij vipusk «Problemi mekhanichnogo privodu». Kharkiv: NTU «KhPI». 2009. №19. 168 p. P. 43-52.
6. Gricay I.E. Viljshancjkiyj V.I. Udoskonalennya tekhnologiji vigoovlennya zubchastikh kolis na osnovi novogo metodu zubonarizannya. Visnik Nac. Tekhn. un-tu «KhPI». Zb. nauk. pracj. Tematichnij vipusk «Problemi mekhanichnogo privodu». Kharkiv: NTU «KhPI». 2011. №28. 190 p. P. 44-52.
7. Shishov V.P. Teoriya, matematicheskoe obespechenie i realizaciya sinteza vihokonagruzhennihkh peredach zacepleniem dlya promihshlennogo transporta: Dis. ... dokt. tekhn. nauk. 05.05.02. Lugansk. 1994. 525 p.
8. Pogorelov A.V. Differencialnaya geometriya. Moscow: Nauka, 1974. 176 p.
9. Pogorelov A.V. Analiticheskaya geometriya: Uchebnik dlya vuzov. 4-e izd. pererab. Moscow: Nauka, 1978. 208 p.
10. Litvin F.L. Teoriya zubchatihkh zacepleniij. Moscow: Nauka. 1968. 84 p.
11. Dusev I.I. Svyazj mezhdru geometricheskimi i kinemacheskimi parametrami vihssheyj kinemacheskoyj parih. Izv. Severo-Kavkazskogo nauchnogo centra vihssheyj shkolih. 1973. № 3. P. 28-32.
12. Bronshteyn I.N. Semendyaev K.A. Spravochnik po matematike. 13-e izd. Moscow: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit. 1986. 544 p.

Подана до редакції 30.05.2014