

УДК 531.39

Бабенко А.Є., д.т.н., проф., Лавренко Я.І., Куренков М.М.  
НТУУ України «Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна

## ВПЛИВ СТАТИЧНОГО І ДИНАМІЧНОГО ДИСБАЛАНСУ НА КОЛИВАННЯ ВАЛУ ЦЕНТРИФУГИ З ВРАХУВАННЯМ ГІРОСКОПІЧНИХ ЕФЕКТІВ

Babenko A., Lavrenko Ia., Kurenkov N.  
National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine  
([babenko.ac@gmail.com](mailto:babenko.ac@gmail.com), [lavrenko.iarosлав@gmail.com](mailto:lavrenko.iarosлав@gmail.com), [kurenkov.nikolay@yandex.ua](mailto:kurenkov.nikolay@yandex.ua))

### INFLUENCE OF STATIC AND DYNAMIC IMBALANCE ON VIBRATIONS OF THE CENTRIFUGE SHAFT WITH GYROSCOPIC EFFECT

*Розглянуто динаміку лабораторної центрифуги. Одержані диференціальні рівняння її руху. Знайдено вплив гіроскопічних ефектів на власні частоти. Розглянуто вплив статичного і динамічного дисбалансу обертання частин і показано, що вони викликають вимушені коливання. Побудовано амплітудно-частотні характеристики цих коливань і показано вплив на них гіроскопічних ефектів. Прийнята в статті методика розрахована на її використання при вирішенні ряду прикладних задач. **Ключові слова:** Коливання, статичний дисбаланс, динамічний дисбаланс, власні частоти, гіроскопічні ефекти, центрифуга.*

**Вступ.** У сучасному машинобудуванні безперервно ростуть швидкості обертання валів більшості машин-двигунів і робочих машин: двигунів внутрішнього згорання, електродвигунів, електричних генераторів, парових, газових турбін, гіроскопів і гідромоторів, центрифуг, веретен, молотарок, відцентрових насосів і компресорів, високопродуктивних автоматів та ін. Швидкість обертання деяких з них досягає 20 000 ... 50 000 об/хв. і більше (електродвигуни підвищеної частоти і турбомашини будуються для швидкостей, що перевищують 100 000 об / хв.; центрифуги, призначені для отримання біологічних емульсій, роблять до 600 000 об/хв.; швидкості обертання окремих деталей текстильного машинобудування доходять до 1 000 000 об/хв.). Отже, при відхиленні центру мас від осі обертання ланки або нерівномірному розташуванні мас уздовж цієї осі виникають значні сили інерції, які, безперервно змінюючись за величиною і напрямком, викликають додаткові динамічні навантаження в системі, тобто – дисбаланс системи [1].

Основною причиною відхилень центру мас або нахилу головних осей інерції є неточне виготовлення деталей або неточна збірка. Ці фактори змінюють коливальні характеристики системи.

Метою даної роботи є визначення впливу статичної і динамічної незбалансованості системи на амплітуди коливань переміщень і кутів повороту.

Розглянемо модель вимушених коливань, обумовлених дисбалансом.

**Математична модель.** В результаті наявності зміщення центру ваги  $e$  (рис.1) та кутів нахилу головних осей інерції  $\gamma_1, \gamma_2$  (рис.2) до нерухої системи координат  $\xi, \eta, \zeta$ , маємо наявність статичного і динамічного

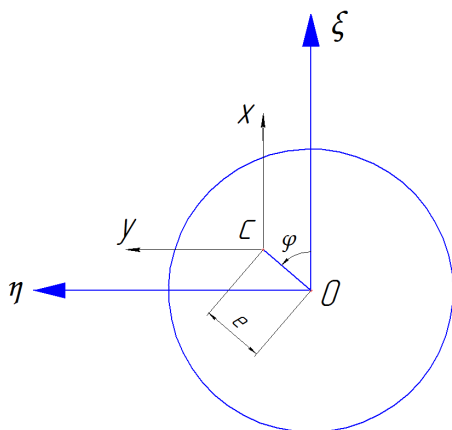


Рис. 1. Відхилення центру мас на величину  $e$

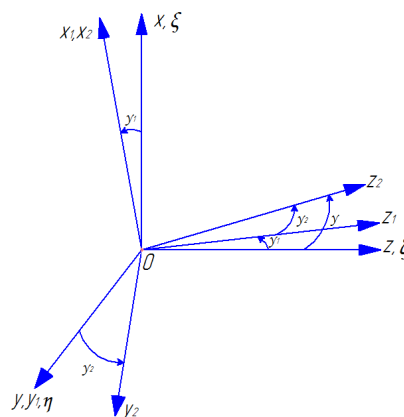


Рис. 2. Поворот головних центральних осей відносно нерухомих осей обертання

дисбалансів центрифуги. Моменти інерції диска відносно пов'язаних з ним осей  $x_1, y_1, z_1$  позначимо:  $I_{Z_1} = I_0$ ;  $I_{X_1} = I_{Y_1} = I_1$ .

Лабораторну центрифугу типу Рісо 21 можна звести до еквівалентної системи з трьох тіл (статора, анкера та ротора), одне з яких не обертається, тому лабораторна центрифуга Рісо 21 сумарно має 14 степенів вільності для всіх її елементів.

Для визначення власних частот розроблена розрахункова схема, яка наведена на рис. 3 [2], яка максимально наближена до реальної центрифуги, що досліджується.

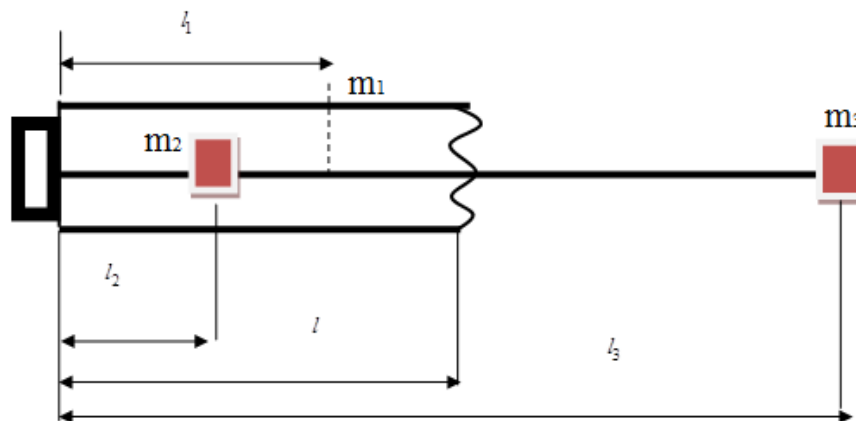


Рис. 3. Розрахункова схема центрифуги

Із показаних в одній площині трьох мас обертаються лише дві (анкер і ротор), тому для подальших розрахунків кутова швидкість статора дорівнює нулю.

Для чисельного розрахунку використовувались наступні параметри центрифуги:

$$m_3 = 0,507 \text{ кг}, m_2 = 0,6 \text{ кг}, m_1 = 2,4 \text{ кг}, l = 86 \text{ мм}, l_1 = 45 \text{ мм}, l_2 = 32 \text{ мм}, l_3 = 120 \text{ мм}, I_3 = 882 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, \\ I_{z_3} = 1529 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, I_2 = 93 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, I_{z_2} = 425 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, I_1 = 18000 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, I_{z_1} = 18000 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, e = 0,0009 \text{ м}, \\ \gamma = 0,0012 \text{ рад}$$

Власні частоти цієї системи, без врахування дисипативних сил, з врахуванням гіроскопічних ефектів були знайдені в роботі [3]. Знайдемо власні частоти при наявності дисбалансів. Складаємо диференціальні рівняння руху системи за допомогою рівняння Лагранжа другого роду. Для цього скористаємося виразом для потенціальної і кінетичної енергій, які раніше вже були знайдені в роботі [3]:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{11}(\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{1}{2} c_{22}(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{2} c_{33}(\xi_3^2 + \eta_3^2) + \frac{1}{2} c_{44}(\alpha_1^2 + \theta_1^2) + \frac{1}{2} c_{55}(\alpha_2^2 + \theta_2^2) + \frac{1}{2} c_{66}(\alpha_3^2 + \theta_3^2) + \\ + c_{12}(\xi_1 \cdot \xi_2 + \eta_1 \cdot \eta_2) + c_{13}(\xi_1 \cdot \xi_3 + \eta_1 \cdot \eta_3) + c_{14}(\xi_1 \cdot \theta_1 + \eta_1 \cdot \alpha_1) + c_{15}(\xi_1 \cdot \theta_2 + \eta_1 \cdot \alpha_2) + c_{16}(\xi_1 \cdot \theta_3 + \eta_1 \cdot \alpha_3) + \\ + c_{23}(\xi_2 \cdot \xi_3 + \eta_2 \cdot \eta_3) + c_{24}(\xi_2 \cdot \theta_1 + \eta_2 \cdot \alpha_1) + c_{25}(\xi_2 \cdot \theta_2 + \eta_2 \cdot \alpha_2) + c_{26}(\xi_2 \cdot \theta_3 + \eta_2 \cdot \alpha_3) + c_{34}(\xi_3 \cdot \theta_1 + \eta_3 \cdot \alpha_1) + \\ + c_{35}(\xi_3 \cdot \theta_2 + \eta_3 \cdot \alpha_2) + c_{36}(\xi_3 \cdot \theta_3 + \eta_3 \cdot \alpha_3) + c_{45}(\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \theta_1 \cdot \theta_2) + c_{46}(\alpha_1 \cdot \alpha_3 + \theta_1 \cdot \theta_3) + c_{56}(\alpha_2 \cdot \alpha_3 + \theta_2 \cdot \theta_3), \\ K = \frac{1}{2} m_1(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2) + \frac{1}{2} m_2(\dot{\xi}_2^2 + \dot{\eta}_2^2) + \frac{1}{2} m_3(\dot{\xi}_3^2 + \dot{\eta}_3^2) + \frac{1}{2} I_1[\dot{\theta}_1^2 + \dot{\alpha}_1^2] + \frac{1}{2} I_2[\dot{\theta}_2^2 + \dot{\alpha}_2^2] + \frac{1}{2} I_3[\dot{\theta}_3^2 + \dot{\alpha}_3^2] + \\ + \frac{1}{2} I_{z_2}[\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_2 \cdot \theta_2]^2 + \frac{1}{2} I_{z_3}[\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_3 \cdot \theta_3]^2,$$

де  $c_{ij}$  - жорсткості системи.

Якщо має місце статичний дисбаланс диску, то положення центру ваги відносно осі  $\zeta$  нерухомої системи координат буде зміщено (Рис. 1):

$$w_{x_i} = \xi_i + e_i \cdot \cos \varphi = \xi_i + e_i \cdot \cos \omega t,$$

$$w_{y_i} = \eta_i + e_i \cdot \sin \varphi = \eta_i + e_i \cdot \sin \omega t,$$

$$I_{\zeta} = I_z + m \cdot e^2.$$

У випадку динамічного дисбалансу, ми можемо вибрати системи координат таким чином, щоб сумарний кут дисбалансу  $\gamma$  лежав в одній площині, наприклад в площині  $X_1 O Z_1$  (Рис.4, Рис.5).

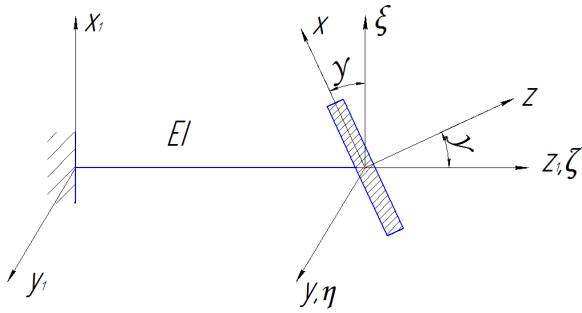


Рис. 4. Динамічний дисбаланс в площині  $X_1OZ_1$

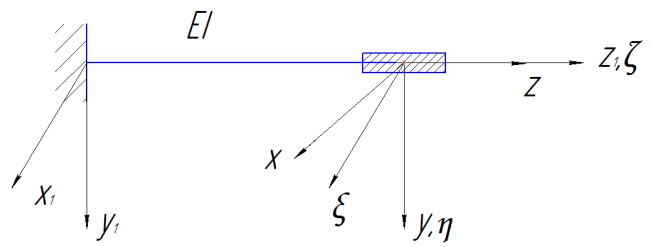


Рис. 5. Відсутність динамічного дисбалансу в площині  $Y_1OZ_1$

Площина  $X_1Y_1Z_1$  – додаткова площина, яка була введена для зручності і наглядності зображення дисбалансу.

Тоді, якщо ми виразимо кутові швидкості відносно рухомої системи координат  $(x,y,z)$  через кутові швидкості відносно нерухомої системи координат  $(\xi,\eta,\zeta)$ , як це було без дисбалансу, то будемо мати стандартні формули переходу:

$$\begin{aligned} \omega_{\eta_2} &= \dot{\beta}_{II}, \\ \omega_{\xi_2} &= \dot{\alpha}_{II} \cdot \cos \beta, \\ \omega_{\zeta_2} &= \dot{\varphi}_{II} + \dot{\alpha}_{II} \cdot \sin \beta, \end{aligned}$$

де індекс  $II$  – повний кут повороту.

При наявності дисбалансу, кут повороту  $\alpha_{II}$  буде складатися із двох кутів:  $\alpha$  – безпосередньо кута повороту і  $\varphi_{x_1}$  – кута початкового дисбалансу (Рис.6). Аналогічно для кута  $\beta_{II}$ , який складається з  $\beta$  і  $\varphi_{y_1}$ .

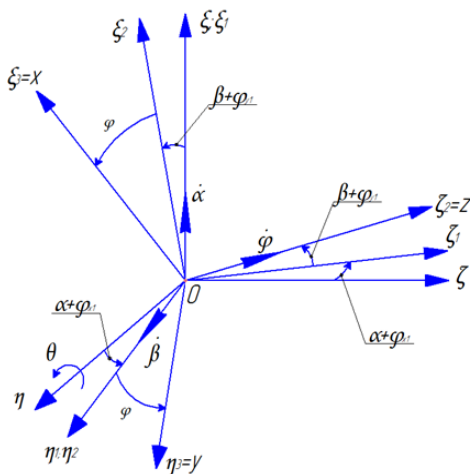


Рис. 6. Кути повороту диска

Враховуючи той факт, що кути повороту – малі, ми можемо скласти величини цих кутів:

$$\begin{aligned} \alpha_{II} &= \alpha + \varphi_{x_1}, \\ \beta_{II} &= \beta + \varphi_{y_1}. \end{aligned}$$

В початковий момент часу  $\varphi_{x_1} = \gamma, \varphi_{y_1} = 0$  (Рис.2, Рис.3), але, при обертанні валу, дані кути дисбалансу будуть змінювати своє значення відносно нерухомої системи координат, в залежності від повороту валу. Так, наприклад, якщо вал зробить оборот на  $90^\circ$ , то кут  $\varphi_{x_1} = 0$ , а  $\varphi_{y_1} = \gamma$ . Таким чином кути  $\varphi_{x_1}, \varphi_{y_1}$  – періодичні функції з амплітудою  $\gamma$ , які виражаються:

$$\begin{aligned} \varphi_{x_1} &= \gamma \cdot \cos \omega t, \\ \varphi_{y_1} &= \gamma \cdot \sin \omega t, \end{aligned}$$

де  $\omega$  – кутова частота обертання валу.

Тоді

$$\begin{aligned} \alpha_{II} &= \alpha + \gamma \cdot \cos \omega t, \\ \beta_{II} &= \beta + \gamma \cdot \sin \omega t, \\ \varphi_{II} &= \varphi. \end{aligned}$$

Знайдемо кутову швидкість обертання  $\omega_z$  головної осі інерції диска.

Залежності між кутовими швидкостями мають наступний вигляд:

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma_1 & 0 & -\sin \gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma_1 & 0 & \cos \gamma_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_2 & \sin \gamma_2 \\ 0 & -\sin \gamma_2 & \cos \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \gamma_1 & \sin \gamma_1 \cdot \sin \gamma_2 & -\sin \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 \\ 0 & \cos \gamma_2 & \sin \gamma_2 \\ \sin \gamma_1 & -\sin \gamma_2 \cdot \cos \gamma_1 & \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix}.$$

Вирази для кутових швидкостей запишуться:

$$\omega_x = a_{13} \cdot \omega = -\sin \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 \cdot \omega,$$

$$\omega_y = a_{23} \cdot \omega = \sin \gamma_2 \cdot \omega,$$

$$\omega_z = a_{33} \cdot \omega = \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 \cdot \omega.$$

Якщо вважати кути дисбалансу малими величинами, то  $\omega_x = 0$ ,  $\omega_y = 0$ , тобто  $\dot{\varphi} = \omega_z = \omega$ .

Тепер, після того, як було одержано усі необхідні формули для врахування динамічного дисбалансу, запишемо вирази потенціальної і кінетичної енергії системи.

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} c_{11} (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{1}{2} c_{22} (\xi_2^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{2} c_{33} (\xi_3^2 + \eta_3^2) + \frac{1}{2} c_{44} (\alpha_1^2 + \theta_1^2) + \frac{1}{2} c_{55} (\alpha_2^2 + \theta_2^2) + \frac{1}{2} c_{66} (\alpha_3^2 + \theta_3^2) + c_{12} (\xi_1 \cdot \xi_2 + \eta_1 \cdot \eta_2) + \\ & + c_{13} (\xi_1 \cdot \xi_3 + \eta_1 \cdot \eta_3) + c_{14} (\xi_1 \cdot \theta_1 + \eta_1 \cdot \alpha_1) + c_{15} (\xi_1 \cdot \theta_2 + \eta_1 \cdot \alpha_2) + c_{16} (\xi_1 \cdot \theta_3 + \eta_1 \cdot \alpha_3) + c_{23} (\xi_2 \cdot \xi_3 + \eta_2 \cdot \eta_3) + c_{24} (\xi_2 \cdot \theta_1 + \eta_2 \cdot \alpha_1) + \\ & + c_{25} (\xi_2 \cdot \theta_2 + \eta_2 \cdot \alpha_2) + c_{26} (\xi_2 \cdot \theta_3 + \eta_2 \cdot \alpha_3) + c_{34} (\xi_3 \cdot \theta_1 + \eta_3 \cdot \alpha_1) + c_{35} (\xi_3 \cdot \theta_2 + \eta_3 \cdot \alpha_2) + c_{36} (\xi_3 \cdot \theta_3 + \eta_3 \cdot \alpha_3) + c_{45} (\alpha_1 \cdot \alpha_2 + \theta_1 \cdot \theta_2) + \\ & + c_{46} (\alpha_1 \cdot \alpha_3 + \theta_1 \cdot \theta_3) + c_{56} (\alpha_2 \cdot \alpha_3 + \theta_2 \cdot \theta_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{2} m_1 [\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2] + \frac{1}{2} m_2 \left[ (\dot{\xi}_2 - \omega \cdot e_2 \cdot \sin \omega t)^2 + (\dot{\eta}_2 + \omega \cdot e_2 \cdot \cos \omega t)^2 \right] + \frac{1}{2} m_3 \left[ (\dot{\xi}_3 - \omega \cdot e_3 \cdot \sin \omega t)^2 + (\dot{\eta}_3 + \omega \cdot e_3 \cdot \cos \omega t)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} I_1 [\dot{\theta}_1^2 + \dot{\alpha}_1^2] + \frac{1}{2} I_2 \left[ (\dot{\theta}_2 + \omega \cdot \gamma_2 \cdot \cos \omega t)^2 + (\dot{\alpha}_2 - \gamma_2 \cdot \omega \cdot \sin \omega t)^2 \right] + \frac{1}{2} I_3 \left[ (\dot{\theta}_3 + \omega \cdot \gamma_3 \cdot \cos \omega t)^2 + (\dot{\alpha}_3 - \gamma_3 \cdot \omega \cdot \sin \omega t)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} I_{\zeta_2} [\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_2 \cdot \theta_2]^2 + \frac{1}{2} I_{\zeta_3} [\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_3 \cdot \theta_3]^2. \end{aligned}$$

Після підстановки енергій у рівняння Лагранжу другого роду, отримуємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\xi}_1 + c_{11} \dot{\xi}_1 + c_{12} \dot{\xi}_2 + c_{13} \dot{\xi}_3 + c_{14} \dot{\theta}_1 + c_{15} \dot{\theta}_2 + c_{16} \dot{\theta}_3 &= 0, \\ m_2 \ddot{\xi}_2 + c_{12} \dot{\xi}_1 + c_{22} \dot{\xi}_2 + c_{23} \dot{\xi}_3 + c_{24} \dot{\theta}_1 + c_{25} \dot{\theta}_2 + c_{26} \dot{\theta}_3 &= m_2 \omega^2 e_2 \cdot \cos \omega t, \\ m_3 \ddot{\xi}_3 + c_{13} \dot{\xi}_1 + c_{23} \dot{\xi}_2 + c_{33} \dot{\xi}_3 + c_{34} \dot{\theta}_1 + c_{35} \dot{\theta}_2 + c_{36} \dot{\theta}_3 &= m_3 \omega^2 e_3 \cdot \cos \omega t, \\ m_1 \ddot{\eta}_1 + c_{11} \dot{\eta}_1 + c_{12} \dot{\eta}_2 + c_{13} \dot{\eta}_3 + c_{14} \dot{\alpha}_1 + c_{15} \dot{\alpha}_2 + c_{16} \dot{\alpha}_3 &= 0, \\ m_2 \ddot{\eta}_2 + c_{12} \dot{\eta}_1 + c_{22} \dot{\eta}_2 + c_{23} \dot{\eta}_3 + c_{24} \dot{\alpha}_1 + c_{25} \dot{\alpha}_2 + c_{26} \dot{\alpha}_3 &= m_2 \omega^2 e_2 \cdot \sin \omega t, \\ m_3 \ddot{\eta}_3 + c_{13} \dot{\eta}_1 + c_{23} \dot{\eta}_2 + c_{33} \dot{\eta}_3 + c_{34} \dot{\alpha}_1 + c_{35} \dot{\alpha}_2 + c_{36} \dot{\alpha}_3 &= m_3 \omega^2 e_3 \cdot \sin \omega t, \\ I_1 \ddot{\alpha}_1 + c_{14} \dot{\eta}_1 + c_{24} \dot{\eta}_2 + c_{34} \dot{\eta}_3 + c_{44} \dot{\alpha}_1 + c_{45} \dot{\alpha}_2 + c_{46} \dot{\alpha}_3 &= 0, \\ I_2 \ddot{\alpha}_2 + c_{15} \dot{\eta}_1 + c_{25} \dot{\eta}_2 + c_{35} \dot{\eta}_3 + c_{45} \dot{\alpha}_1 + c_{55} \dot{\alpha}_2 + c_{56} \dot{\alpha}_3 + I_{\zeta_2} \omega \cdot \dot{\theta}_2 &= I_2 \omega^2 \gamma_2 \cdot \cos \omega t, \\ I_3 \ddot{\alpha}_3 + c_{16} \dot{\eta}_1 + c_{26} \dot{\eta}_2 + c_{36} \dot{\eta}_3 + c_{46} \dot{\alpha}_1 + c_{56} \dot{\alpha}_2 + c_{66} \dot{\alpha}_3 + I_{\zeta_3} \omega \cdot \dot{\theta}_3 &= I_3 \omega^2 \gamma_3 \cdot \cos \omega t, \\ I_1 \ddot{\theta}_1 + c_{14} \dot{\xi}_1 + c_{24} \dot{\xi}_2 + c_{34} \dot{\xi}_3 + c_{44} \dot{\theta}_1 + c_{45} \dot{\theta}_2 + c_{46} \dot{\theta}_3 &= 0, \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + c_{15} \dot{\xi}_1 + c_{25} \dot{\xi}_2 + c_{35} \dot{\xi}_3 + c_{45} \dot{\theta}_1 + c_{55} \dot{\theta}_2 + c_{56} \dot{\theta}_3 - I_{\zeta_2} \omega \cdot \dot{\alpha}_2 &= I_2 \omega^2 \gamma_2 \cdot \sin \omega t, \\ I_3 \ddot{\theta}_3 + c_{16} \dot{\xi}_1 + c_{26} \dot{\xi}_2 + c_{36} \dot{\xi}_3 + c_{46} \dot{\theta}_1 + c_{56} \dot{\theta}_2 + c_{66} \dot{\theta}_3 - I_{\zeta_3} \omega \cdot \dot{\alpha}_3 &= I_3 \omega^2 \gamma_3 \cdot \sin \omega t. \end{aligned}$$

Нас цікавить лише періодичні коливання системи. Тому, переміщення і кути повороту шукаємо у вигляді:

Власні коливання шукаємо у вигляді:

$$\begin{cases} \xi_i = A_i \sin pt, \\ \eta_i = A_i \cos pt, \\ \alpha_i = B_i \cos pt, \\ \theta_i = B_i \sin pt. \end{cases}$$

Вимушені коливання шукаємо як частинний розв'язок:

$$\begin{cases} \xi_i = K_i \cos \omega t, \\ \eta_i = L_i \sin \omega t, \\ \alpha_i = M_i \sin \omega t, \\ \theta_i = N_i \cos \omega t. \end{cases}$$

Основний розв'язок дає рівняння для визначення власних частот. Значення власних частот при дисбалансі не відрізняються від власних частот, знайдених раніше. Після підстановки виразів для часткового розв'язку у систему та взявши похідні, отримуємо наступні рівняння:

$$\begin{aligned}
 & -m_1 K_1 \omega^2 \sin \omega t + c_{11} K_1 \cos \omega t + c_{12} K_2 \cos \omega t + c_{13} K_3 \cos \omega t + c_{14} N_1 \cos \omega t + c_{15} N_2 \cos \omega t + c_{16} N_3 \cos \omega t = 0, \\
 & -m_2 K_2 \omega^2 \cos \omega t + c_{12} K_1 \cos \omega t + c_{22} K_2 \cos \omega t + c_{23} K_3 \cos \omega t + c_{24} N_1 \cos \omega t + c_{25} N_2 \cos \omega t + c_{26} N_3 \cos \omega t = m_2 \omega^2 e_2 \cdot \cos \omega t, \\
 & -m_3 K_3 \omega^2 \cos \omega t + c_{13} K_1 \cos \omega t + c_{23} K_2 \cos \omega t + c_{33} K_3 \cos \omega t + c_{34} N_1 \cos \omega t + c_{35} N_2 \cos \omega t + c_{36} N_3 \cos \omega t = m_3 \omega^2 e_3 \cdot \cos \omega t, \\
 & -m_1 L_1 \omega^2 \sin \omega t + c_{11} L_1 \sin \omega t + c_{12} L_2 \sin \omega t + c_{13} L_3 \sin \omega t + c_{14} M_1 \sin \omega t + c_{15} M_2 \sin \omega t + c_{16} M_3 \sin \omega t = 0, \\
 & -m_2 L_2 \omega^2 \sin \omega t + c_{12} L_1 \sin \omega t + c_{22} L_2 \sin \omega t + c_{23} L_3 \sin \omega t + c_{24} M_1 \sin \omega t + c_{25} M_2 \sin \omega t + c_{26} M_3 \sin \omega t = m_2 \omega^2 e_2 \cdot \sin \omega t, \\
 & -m_3 L_3 \omega^2 \sin \omega t + c_{13} L_1 \sin \omega t + c_{23} L_2 \sin \omega t + c_{33} L_3 \sin \omega t + c_{34} M_1 \sin \omega t + c_{35} M_2 \sin \omega t + c_{36} M_3 \sin \omega t = m_3 \omega^2 e_3 \cdot \sin \omega t, \\
 & -I_1 M_1 \omega^2 \cos \omega t + c_{14} L_1 \cos \omega t + c_{24} L_2 \cos \omega t + c_{34} L_3 \cos \omega t + c_{44} M_1 \cos \omega t + c_{45} M_2 \cos \omega t + c_{46} M_3 \cos \omega t = 0, \\
 & -I_2 M_2 \omega^2 \cos \omega t + c_{15} L_1 \cos \omega t + c_{25} L_2 \cos \omega t + c_{35} L_3 \cos \omega t + c_{45} M_1 \cos \omega t + c_{55} M_2 \cos \omega t + c_{56} M_3 \cos \omega t + \\
 & + I_{\zeta_2} \cdot \omega \cdot N_2 \cdot \omega \cdot \cos \omega t = I_2 \omega^2 \gamma_2 \cdot \cos \omega t, \\
 & -I_3 M_3 \omega^2 \cos \omega t + c_{16} L_1 \cos \omega t + c_{26} L_2 \cos \omega t + c_{36} L_3 \cos \omega t + c_{46} M_1 \cos \omega t + c_{56} M_2 \cos \omega t + c_{66} M_3 \cos \omega t + \\
 & + I_{\zeta_3} \cdot \omega \cdot N_3 \cdot \omega \cdot \cos \omega t = I_3 \omega^2 \gamma_3 \cdot \cos \omega t, \\
 & -I_1 N_1 \omega^2 \sin \omega t + c_{14} K_1 \sin \omega t + c_{24} K_2 \sin \omega t + c_{34} K_3 \sin \omega t + c_{44} N_1 \sin \omega t + c_{45} N_2 \sin \omega t + c_{46} N_3 \sin \omega t = 0, \\
 & -I_2 N_2 \omega^2 \sin \omega t + c_{15} K_1 \sin \omega t + c_{25} K_2 \sin \omega t + c_{35} K_3 \sin \omega t + c_{45} N_1 \sin \omega t + c_{55} N_2 \sin \omega t + c_{56} N_3 \sin \omega t + \\
 & -I_{\zeta_2} \cdot \omega \cdot M_2 \cdot \omega \cdot \sin \omega t = I_2 \omega^2 \gamma_2 \cdot \sin \omega t, \\
 & -I_3 N_3 \omega^2 \sin \omega t + c_{16} K_1 \sin \omega t + c_{26} K_2 \sin \omega t + c_{36} K_3 \sin \omega t + c_{46} N_1 \sin \omega t + c_{56} N_2 \sin \omega t + c_{66} N_3 \sin \omega t + \\
 & -I_{\zeta_3} \cdot \omega \cdot M_3 \cdot \omega \cdot \sin \omega t = I_3 \omega^2 \gamma_3 \cdot \sin \omega t.
 \end{aligned}$$

Отримаємо наступну систему рівнянь:

$$[D_{ij}] \{A\} = \{P\},$$

$$\text{де } \{A\} = \{K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad M_1 \quad M_2 \quad M_3 \quad N_1 \quad N_2 \quad N_3\}^T,$$

$$[D_{ij}] = \begin{bmatrix}
 c_{11} - m_1 \omega^2 & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\
 c_{12} & c_{22} - m_2 \omega^2 & c_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\
 c_{13} & c_{23} & c_{33} - m_3 \omega^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\
 0 & 0 & 0 & c_{11} - m_1 \omega^2 & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & c_{12} & c_{22} - m_2 \omega^2 & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & c_{13} & c_{23} & c_{33} - m_3 \omega^2 & c_{34} & c_{35} & c_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} - I_1 \omega^2 & c_{45} & c_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} - I_2 \omega^2 & c_{56} & 0 & -I_{\zeta_2} \omega^2 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} - I_3 \omega^2 & 0 & 0 & 0 & -I_{\zeta_3} \omega^2 \\
 c_{14} & c_{24} & c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{\zeta_2} \omega^2 & 0 & c_{44} - I_1 \omega^2 & c_{45} & c_{46} & 0 \\
 c_{15} & c_{25} & c_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{46} & c_{55} - I_2 \omega^2 & c_{56} & 0 \\
 c_{16} & c_{26} & c_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{\zeta_3} \omega^2 & c_{46} & c_{56} & c_{66} - I_3 \omega^2
 \end{bmatrix},$$

$$\{P\} = \{0 \quad m_2 \omega^2 e_2 \quad m_3 \omega^2 e_3 \quad 0 \quad m_2 \omega^2 e_2 \quad m_3 \omega^2 e_3 \quad 0 \quad I_2 \omega^2 \gamma_2 \quad I_3 \omega^2 \gamma_3 \quad 0 \quad I_2 \omega^2 \gamma_2 \quad I_3 \omega^2 \gamma_3\}^T.$$

Розв'язуючи отриману систему рівнянь 12x12, знаходимо значення амплітудних величин переміщень і кутів повороту для неоднорідного розв'язку. Значення амплітудних величин є функцією від кутової швидкості обертання [4]. Отримана функція має розриви 2-го роду в точках, значення яких співпадають із значеннями власних частот, отриманих для даної математичної моделі з врахуванням гіроскопічного ефекту при  $\omega = p$  (для перших трьох резонансних точок Рис. 7).

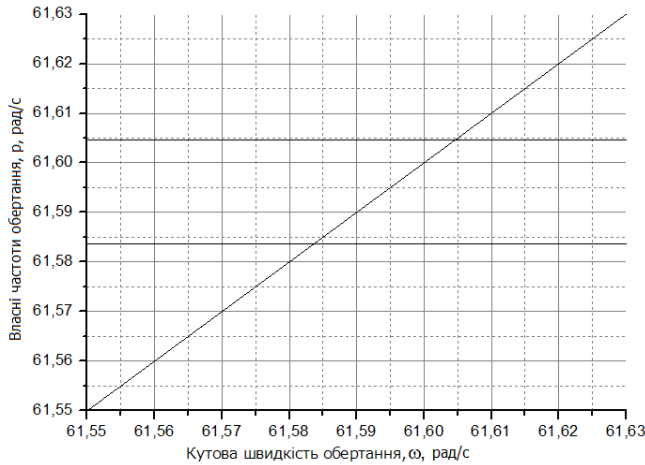


Рис. 7. а) Діаграма Кемпбелла для першої частоти

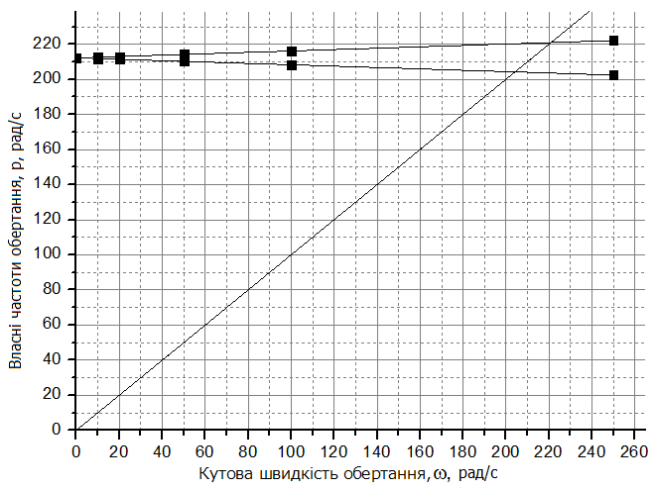


Рис. 7. в) Діаграма Кемпбелла для другої частоти

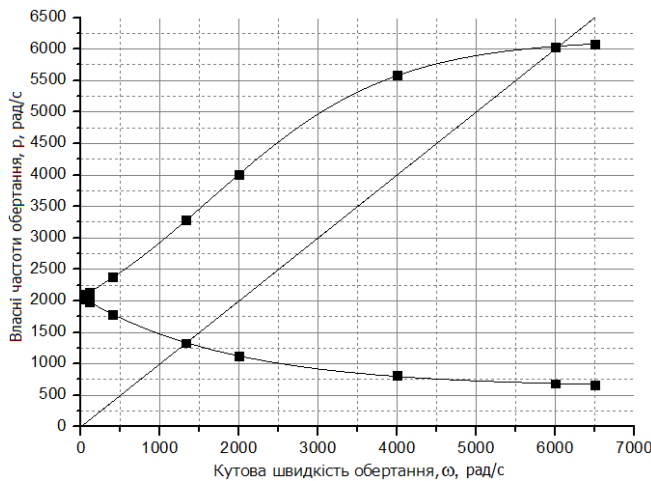


Рис. 7. д) Діаграма Кемпбелла для третьої частоти

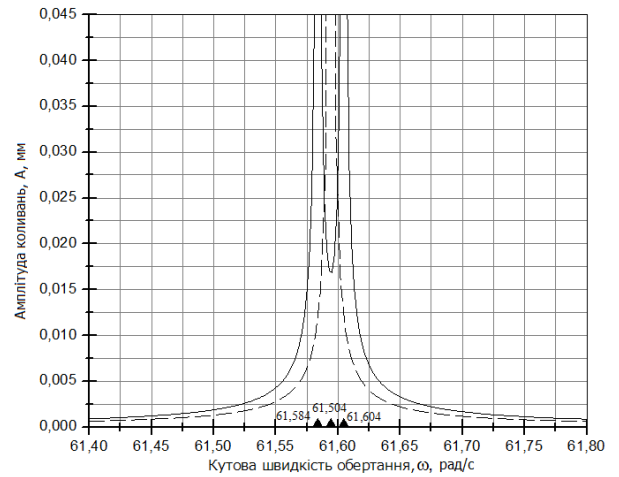


Рис. 7. б) АЧХ з врахуванням гіроскопічного ефекту для першої власної частоти

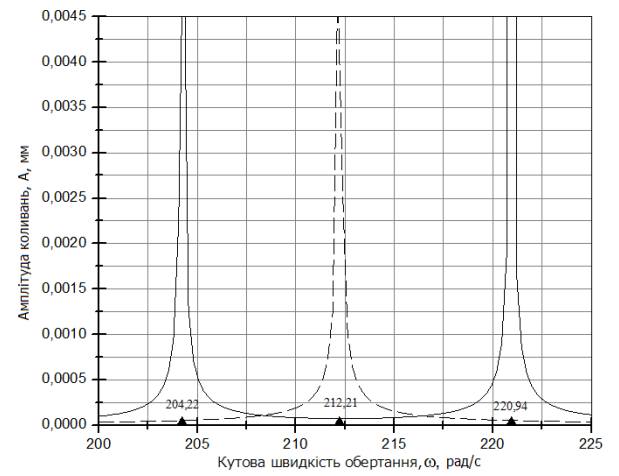


Рис. 7. г) АЧХ з врахуванням гіроскопічного ефекту для другої власної частоти

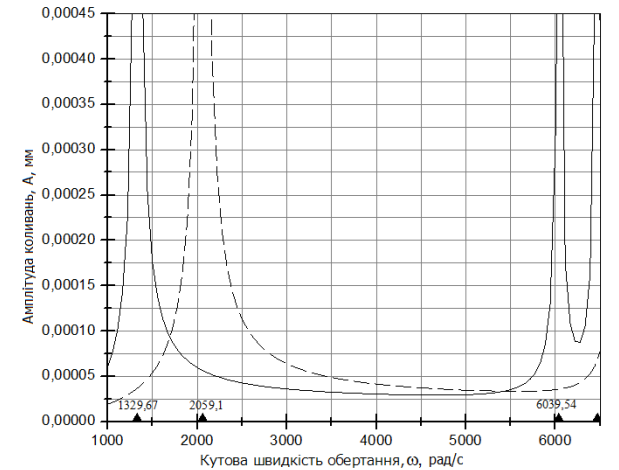


Рис. 7. е) АЧХ з врахуванням гіроскопічного ефекту для третьої власної частоти

На Рис. 7 а, в, д наведені діаграми Кемпбелла [5] для перших трьох частот, а також пряма, яка напрямлена під кутом  $45^\circ$ , точки перетину якої відповідають резонансним частотам; на Рис. 7 б, г, є – амплітудно-частотна характеристика на прикладі кута повороту ротора. Пунктиром зображено графік амплітудно-частотної характеристики без врахування гіроскопічного ефекту, цілим – з врахуванням гіроскопічного ефекту.

Визначаючи залежності амплітудних величин при дисбалансі, отримуємо функцію, яка має критичні точки у місцях, де збігаються значення власних частот і частоти обертання валу.

### Висновки.

1. Статичний і динамічний дисбаланс приводять до виникнення вимушених коливань, амплітуди яких пропорційні величинам статичного і динамічного дисбалансу.
2. Дисбаланс еквівалентний збурюючій силі, частота якої співпадає з кутовою швидкістю обертання центрифуги.
3. Амплітуди переміщень або кутів повороту досягають максимуму, коли величини кутової частоти обертання валу центрифуги співпадає із величинами власних частот з врахуванням гіроскопічних ефектів.
4. Амплітудно-частотна характеристика показує, що кожен максимум коливань розпадається на два, завдяки впливу гіроскопічних сил.

*Аннотация.* Рассмотрена динамика лабораторной центрифуги. Полученные дифференциальные уравнения ее движения. Найдено влияние гироскопических эффектов на собственные частоты. Рассмотрено влияние статического и динамического дисбаланса частей и показано, что они вызывают вынужденные колебания. Построены амплитудно-частотные характеристики этих колебаний и показано влияние на них гироскопических эффектов. Принятая в статье методика рассчитана на ее использование при решении ряда прикладных задач.

*Ключевые слова:* Колебания, статический дисбаланс, динамический дисбаланс, собственные частоты, гироскопические эффекты, центрифуга.

*Abstract. Purpose.* Definition of influence static and dynamic unbalance with gyroscopic effect on vibrations of a laboratory centrifuge.

*Design/methodology/approach.* Vibrations take into account six degrees of freedom. The model of a gyroscope accepted in article is calculated on its use at the solution of a number of applied tasks.

*Findings.* When static and dynamic unbalance considered, the amplitudes have discontinuity when the frequency coincides with the rotation own oscillation frequency.

*Originality/value.* This research was important and original in field of vibrations of medical machines, which usually work with high values of frequencies. It shows changes of amplitudes depending on work frequency. It can help to avoid a resonance during operation.

*Keywords:* Vibrations, own frequency, static imbalance, dynamic imbalance, gyroscopic effects, the centrifuge.

### Бібліографічний список використаної літератури

1. Бакаева Л.С., Суевалова Л.А. Статическое и динамическое уравнивание вращающихся звеньев механизмов и машин, Хабаровск, Издательство ТОГУ 2008, 2с.
2. Бабенко А., Лавренко Я., Куренков М. Вплив гіроскопічних ефектів на коливання валу центрифуги. Вісник НТУУ «КПІ», Машинобудування. — К.: НТУУ «КПІ». - 2012. — Вып. 65. - с. 166-174.
3. Бабенко А.Е., Лавренко Я.И., Куренков Н.Н. Колебания центрифуги с учетом гироскопического эффекта. Загально-університетська науково-технічна конференція молодих вчених та студентів секція «Машинобудування» 2014 – К: НТУУ "КПІ", 2014. – с. 10-11.
4. Зейтман М.Ф., Кушуль М.Я. Изгибные колебания вертикальных роторов в гравитационном поле. Машиноведение, 1968, №5;
5. Маундер Л. Собственные частоты колебаний свободного гироскопа с упругим валом, установленного в кардановом подвесе. Механика, сб. перев. и обз. иностр. период. лит., 1961, №5 (69);

### References

1. Bakaeva L.S., Suevalova L.A. Static and dynamic balancing of rotating parts of machines and mechanisms, Habarovsk, Publisher PNU 2008, 2p.
2. Babenko A., Lavrenko Ia., Kurenkov M. Journal of Mechanical Engineering of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", 2013, no 65, pp. 166-174.
3. Babenko A.E., Lavrenko Ia.I., Kurenkov M.M. Fluctuations centrifuge with gyroscopic effect. All-university Scientific Conference of Young Scientists and Students section "Mechanical Engineering 2014". Kiev, 2014, p.10-11.
4. Zeytman M.F. Kushul M.J. Yzhybnye kolebaniya vertykalnyh rotorov v hravytatsyonnom pole [Vertical bending vibrations of rotors in a gravitational field]. Mashynovedeniye, 1968, № 5;
5. Maunder L. Sobstvennye chastoty kolebanij svobodnogo giroskopa s uprugim valom, ustanovlennogo v kardanovom podvese [Natural frequencies of the free gyroscope with elastic shaft mounted in gimbals]. Mechanics, Sat. Trans. and obz. foreign lang. period. lit., 1961, № 5 (69).

Подана до редакції 05.05.2014