

УДК 539.3

Бабенко¹ А.Е., д.т.н., проф., Лавренко¹ Я.І., асп., Штракельян² Й., д.т.н., проф.

1 - НТУУ «Київський політехнічний інститут», м. Київ, Україна;

2 - Отто-фон-Герике Університет Магдебурга, Німеччина

ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ЛАБОРАТОРНОЇ ЦЕНТРИФУГИ ЯК БАГАТОМАСОВОЇ СИСТЕМИ

Babenko¹ A., Lavrenko¹ Ia., Strackeljan² J.1 - National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine (babenko.ae@gmail.com, lavrenko.iaroslav@gmail.com), 2 - Otto-von-Guericke University Magdeburg, Germany, (jens.strackeljan@ovgu.de)

INVESTIGATION OF LABORATORY CENTRIFUGE MOTION AS MULTIBODY SYSTEM

Визначені динамічні характеристики лабораторної центрифуги з врахуванням її конструктивних особливостей, які полягають в тому, що вона являється багатомасовою системою закріпленою на пружних опорах. Показана відмінність від попередніх широко відомих підходів, в яких центрифуга розглядається як одномасова конструкція і не враховуються конструктивні особливості закріплення. Для дослідження її руху використані рівняння Лагранжа другого роду. Одержані диференціальні рівняння руху і визначені особливості руху центрифуги.

Ключові слова: лабораторна центрифуга, ротор, рівняння руху.

Аналіз попередніх робіт показав, що центрифуги розглядаються як одномасова система, але одержані рівняння для одномасової системи не відповідають дійсності. Аналіз конструкції і експериментальні дослідження показали, що вони є багатомасовою системою. Реальні центрифуги складаються з декількох тіл, тому описати систему через рівняння руху одного тіла неможливо. У зв'язку з цим існує необхідність розгляду системи з декількома тілами, що обертаються. Описати рух багатомасової системи можна за допомогою рівняння Лагранжа другого роду.

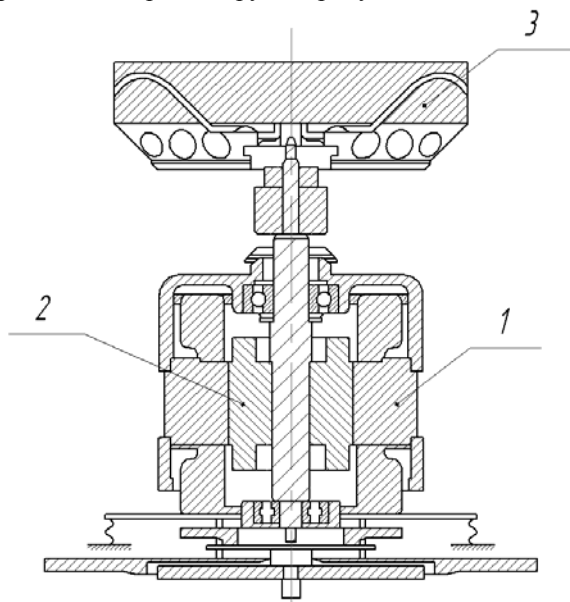


Рис. 1. Ескіз центрифуги Pico 21

Центрифуга складається з ротору 3, що обертається навколо вертикальної осі, який приводиться до обертання електродвигуном, ротор двигуна (анкер) 2, сидить на тій самій осі, яка закріплена в корпусі, а статор та корпус 1 закріплені на пружних опорах.

Метою роботи є дослідження руху лабораторної центрифуги за допомогою аналізу системи рівнянь руху одержаних за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду.

Лабораторну центрифугу (рис.1) типу Pico 21 можна звести до еквівалентної системи з трьох тіл (статора, анкера та ротора), одне з яких (статор) не обертається навколо осі симетрії. Положення центрифуги можна

Більшість існуючих робіт даного напрямку відрізняються фрагментарністю, носять індивідуальний несистемний характер. Рівняння руху одержуються для конкретних центрифуг і потім виконується їх аналіз. Відсутність єдиного узагальненого підходу до аналізу центрифуг довільного виду обмежує можливості виявлення їх загальних властивостей та закономірностей. Відмітимо, що дослідження руху лабораторних центрифуг як системи, що складається з двоохорного валу з розташованим на ньому диском розглядаються в роботах [1, 2, 5].

Найпростішими задачами про коливання валу з диском, площина якого здатна відхилитись від початкового положення, є задачі про двоохорний вал з розташованим на ньому диском. В залежності від місця розташування диску на розрахунковій схемі залежить і система рівнянь, яка описує рух центрифуги. Рух системи, у якій ротор розташований посередині підшипникових вузлів, досліджено досить широко [1, 5].

У зв'язку з вище сказаним, існує актуальна необхідність розробки узагальнених підходів та методів аналітичного дослідження динаміки механічних систем.

описати наступними параметрами $\xi_i, \eta_i, \psi_i, \theta_i, \varphi$, де ξ_i, η_i – переміщення центру мас кожного тіла, ψ_i, θ_i – кути повороту відносно головних осей валу, φ – кут повороту відносно осі обертання, $i = 1, 2, 3$ – тіла в системі, що досліджується.

Виведемо систему рівнянь для досліджуваного механізму, який має 14 степенів вільності. Розрахункові схеми для кожного тіла наведені нижче (рис.2).

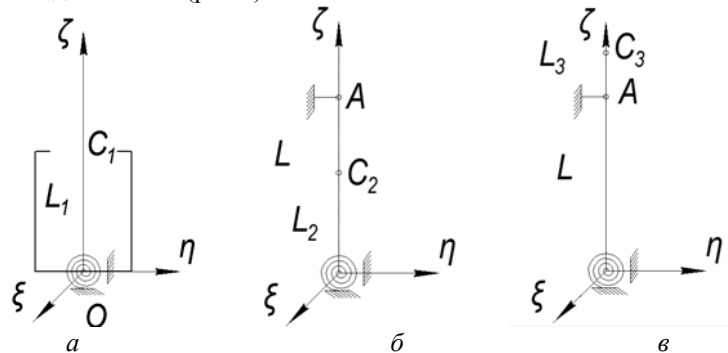


Рис. 2. Розрахункові схеми: а- статор, б- анкер, в- ротор

Для визначення руху системи розроблена розрахункова схема, наведена на рис.3, яка максимально наближена до реальної центрифуги, що досліджується. На наведеній схемі $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ – сили та моменти, які прикладені в точках розташування центрів ваги ротора двигуна (анкера) та ротора, відповідно.

Із показаних в одній площині трьох мас обертаються лише дві (ротор двигуна і ротор центрифуги), тому при подальших розрахунках кутова швидкість статора дорівнює нулю.

Потенціальна енергія системи складається з потенціальної енергії деформації валу, пружних опор на яких закріплений корпус та потенціальної енергії деформації підшипників, які розглядаються як пружний елемент, тобто:

$$P = P_p + P_{val1} + P_{val2}$$

Потенціальна енергія валу складається з суми потенціальних енергій кожної ділянки валу за рахунок згину валу:

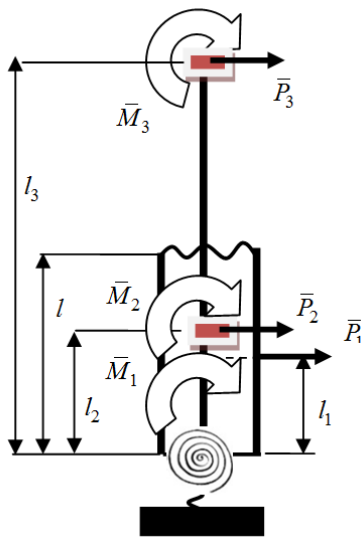


Рис. 3. Розрахункова схема центрифуги

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{2EI_1} \int_0^{b_1} (M_3 + P_3 \cdot x)^2 dx = \frac{3M_3^2 b_1}{6EI_1} + \frac{3M_3 P_3 b_1^2}{6EI_1} + \frac{P_3^2 b_1^3}{6EI_1} \\ \Pi_2 &= \frac{1}{2EI_1} \int_{b_1}^{b_2} (M_3 + P_3 \cdot x - X \cdot (x - b_1))^2 dx = \\ &= \frac{(b_2^3 - b_1^3) P_3^2}{6EI_1} + \frac{(-3b_1^2 + 3b_2^2) M_3 P_3}{6EI_1} + \frac{(3b_1 b_2^2 - 2b_2^3 - b_1^3) X \cdot P_3}{6EI_1} + \\ &+ \frac{(3b_2 - 3b_1) M_3^2}{6EI_1} + \frac{(-3b_1^2 + 6b_1 b_2 - 3b_2^2) X M_3}{6EI_1} + \frac{(b_2^3 - 3b_1 b_2^2 + 3b_2 b_1^2 - b_1^3) X^2}{6EI_1} \\ \Pi_3 &= \frac{1}{2EI_1} \int_{b_2}^{b_3} (M_3 + P_3 \cdot x - X \cdot (x - b_1) + M_2 + P_2 \cdot (x - b_2))^2 dx = \\ &= \frac{(3b_3 b_2^2 - 3b_3^2 b_2 + b_3^3 - b_2^3) P_2^2}{6EI_1} + \frac{[(2b_3^3 + b_2^3 - 3b_3^2 b_2) P_3 + (3b_2^2 - 6b_3 b_2 + 3b_3^2) M_2 + \\ &+ (3b_2^2 - 6b_3 b_2 + 3b_3^2) M_3 + (3b_3^2 b_2 + 3b_1 b_3^2 - 6b_1 b_3 b_2 - 2b_3^3 + 3b_1 b_2^2 - b_2^3) X] P_2 + \\ &+ \frac{(b_3^3 - b_2^3) P_3^2}{6EI_1} + \frac{[(-3b_2^2 + 3b_3^2) M_2 + (-3b_2^2 + 3b_3^2) M_3 + (-2b_3^3 + 2b_2^3 - 3b_1 b_2^2 + 3b_1 b_3^2) X] P_3 +}{6EI_1} \end{aligned}$$

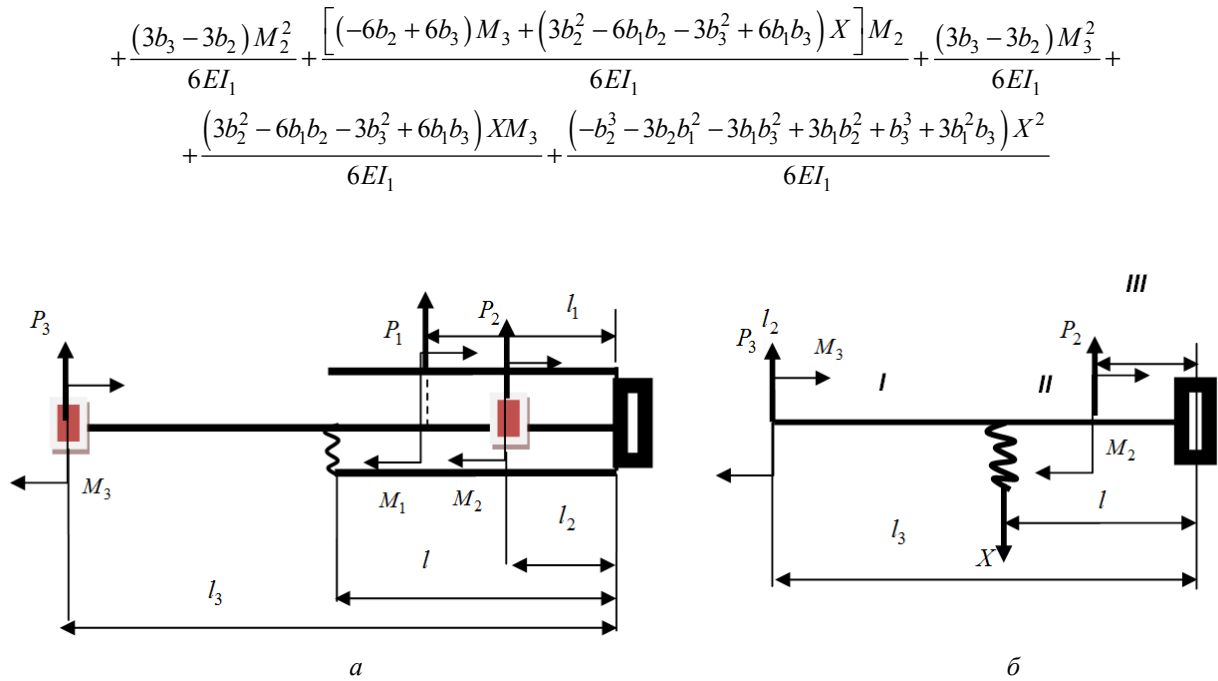


Рис. 4. Розрахункова схема: а- центрифуга, б- для визначення деформації валу

Потенціальна енергія підшипника, як пружної опори, обчислюється:

$$\Pi_p = \frac{X^2}{2 \cdot C_{\Pi}}$$

Реакція X може бути знайдена за теоремою Менабреа [3,4].

Остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned}
 X = & \frac{(3b_3^2 - 6b_1b_3 + 3b_1^2)M_3 + (6b_1b_2 - 3b_2^2 + 3b_3^2 - 6b_1b_3)M_2}{2 \cdot K} + \\
 & + \frac{(b_1^3 - 3b_3^2b_1 + 2b_3^3)P_3 + (-3b_3^2b_1 + 6b_1b_2b_3 - 3b_2^2b_1 + 2b_3^3 + b_2^3 - 3b_3^2b_2)P_2}{2 \cdot K}
 \end{aligned}$$

Отримане значення X підставляється у потенціальну енергію підшипника виражену через прикладені сили і моменти.

З рівнянь рівноваги виражаємо силу та момент в опорі

$$\begin{aligned}
 M_0 & = M_3 + P_3L_3 + M_2 + P_2L_2 + M_1 + P_1L_1 \\
 Q_0 & = -P_3 - P_2 - P_1
 \end{aligned}$$

Лінійне та кутове переміщення в опорі визначається:

$$\eta_0 = \frac{Q_0}{C_Q} \text{ а } \theta_0 = \frac{M_0}{C_M}, \text{ де } C_M \text{ і } C_Q \text{ – жорсткості опор при повороті і переміщенні, відповідно.}$$

Потенціальна енергія опори матиме вигляд

$$\Pi_O = \frac{1}{2} Q_0 \eta_0 + \frac{1}{2} M_0 \theta_0 = \frac{Q_0^2}{2C_Q} + \frac{M_0^2}{2C_M}$$

Тоді потенціальна енергія валу
$$\Pi_{val} = \sum_{i=1}^3 \Pi_i$$

Потенціальна енергія системи
$$\Pi = \Pi_{val} + \Pi_O + \Pi_p$$

Підставляючи вище отримані вирази, отримаємо потенціальну енергію системи:

$$\Pi = M_3^2 \cdot \left(\frac{3b_1}{6EI_1} + \frac{(3b_2 - 3b_1)}{6EI_1} + \frac{(3b_3 - 3b_2)}{6EI_1} \right) + \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{(3 \cdot b_3^2 - 6 \cdot b_1 \cdot b_3 + 3 \cdot b_1^2)^2}{(K^2 \cdot C_{\Pi})} + \frac{3b_1^2}{6EI_1} + \frac{(-3b_1^2 + 3b_2^2)}{6EI_1} + \frac{(-3b_2^2 + 3b_3^2)}{6EI_1} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \cdot \frac{(-6 \cdot b_1 \cdot b_3 + 3 \cdot b_1^2 + 3 \cdot b_3^2 - 6 \cdot b_1 \cdot b_3) \cdot (2 \cdot b_3^3 - 3 \cdot b_1 \cdot b_3^2 + b_1^3)}{(K^2 \cdot C_{\Pi})} \cdot P_3 M_3 + \\
& + P_3^2 \cdot \left(\frac{b_1^3}{6EI_1} + \frac{(b_2^3 - b_1^3)}{6EI_1} + \frac{(b_3^3 - b_2^3)}{6EI_1} + \frac{1}{8} \cdot \frac{(2 \cdot b_3^3 - 3 \cdot b_1 \cdot b_3^2 + b_1^3)^2}{(K^2 \cdot C_{\Pi})} \right) + \frac{(3b_2^2 - 6b_1b_2 - 3b_3^2 + 6b_1b_3)}{6EI_1} \cdot XM_2 + \\
& + \left(\frac{(-3b_1^2 + 6b_1b_2 - 3b_2^2)}{6EI_1} + \frac{(3b_2^2 - 6b_1b_2 - 3b_3^2 + 6b_1b_3)}{6EI_1} \right) \cdot XM_3 + \\
& + \left(\frac{(b_2^3 - 3b_1b_2^2 + 3b_2b_1^2 - b_1^3)}{6EI_1} + \frac{(-b_2^3 - 3b_2b_1^2 - 3b_1b_3^2 + 3b_1b_2^2 + b_3^3 + 3b_1^2b_3)}{6EI_1} \right) \cdot X^2 + \\
& + \left(\frac{1}{8} \cdot \frac{(6 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_1 + 2 \cdot b_3^3 - 3 \cdot b_2^2 \cdot b_1 - 3 \cdot b_3^2 \cdot b_1 + b_2^3 - 3 \cdot b_2 \cdot b_3^2)^2}{(K^2 \cdot C_{\Pi})} + \frac{(3b_3b_2^2 - 3b_3^2b_2 + b_3^3 - b_2^3)}{6EI_1} \right) \cdot P_2^2 + \\
& + \left(\frac{(2b_3^3 + b_2^3 - 3b_3^2b_2)}{6EI_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(6 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_1 + 2 \cdot b_3^3 - 3 \cdot b_2^2 \cdot b_1 - 3 \cdot b_3^2 \cdot b_1 + b_2^3 - 3 \cdot b_2 \cdot b_3^2)(2 \cdot b_3^3 - 3 \cdot b_1 \cdot b_3^2 + b_1^3)}{(K^2 \cdot C_{\Pi})} \right) \cdot P_3 P_2 + \\
& + \left(\frac{(3b_3 - 3b_2)}{6EI_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(6 \cdot b_1 \cdot b_2 - 3 \cdot b_2^2 + 3 \cdot b_3^2 - 6 \cdot b_1 \cdot b_3)^2}{(K^2 \cdot C_{\Pi})} \right) \cdot M_2^2 + \\
& + \left(\frac{(3b_2^2 - 6b_3b_2 + 3b_3^2)}{6EI_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(6 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_1 + 2 \cdot b_3^3 - 3 \cdot b_2^2 \cdot b_1 - 3 \cdot b_3^2 \cdot b_1 + b_2^3 - 3 \cdot b_2 \cdot b_3^2)}{(K^2 \cdot C_{\Pi})} \right) \times \\
& \times (6 \cdot b_1 \cdot b_2 - 3 \cdot b_2^2 + 3 \cdot b_3^2 - 6 \cdot b_1 \cdot b_3) \cdot M_2 P_2 + \\
& + \left(\frac{(3b_2^2 - 6b_3b_2 + 3b_3^2)}{6EI_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(6 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot b_1 + 2 \cdot b_3^3 - 3 \cdot b_2^2 \cdot b_1 - 3 \cdot b_3^2 \cdot b_1 + b_2^3 - 3 \cdot b_2 \cdot b_3^2)}{(K^2 \cdot C_{\Pi})} \right) \times \\
& \times (3 \cdot b_3^2 - 6 \cdot b_1 \cdot b_3 + 3 \cdot b_1^2) \cdot M_3 P_2 + \\
& + \left(\frac{(-6b_2 + 6b_3)}{6EI_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(6 \cdot b_1 \cdot b_2 - 3 \cdot b_2^2 + 3 \cdot b_3^2 - 6 \cdot b_1 \cdot b_3) \cdot (3 \cdot b_3^2 - 6 \cdot b_1 \cdot b_3 + 3 \cdot b_1^2)}{(K^2 \cdot C_{\Pi})} \right) \cdot M_2 M_3 + \\
& + \left(\frac{(3b_3^2b_2 + 3b_1b_3^2 - 6b_1b_3b_2 - 2b_3^3 + 3b_1b_2^2 - b_2^3)}{6EI_1} \right) \cdot XP_2 + \left(\frac{(3b_1b_2^2 - 2b_3^3 - b_1^3)}{6EI_1} + \frac{(-2b_3^3 + 2b_3^2 - 3b_1b_2^2 + 3b_1b_3^2)}{6EI_1} \right) \cdot XP_3 + \\
& + \left(\frac{(-3b_2^2 + 3b_3^2)}{6EI_1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{(6 \cdot b_2 \cdot b_1 - 3 \cdot b_2^2 + 3 \cdot b_3^2 - 6 \cdot b_1 \cdot b_3) \cdot (2 \cdot b_3^3 - 3 \cdot b_1 \cdot b_3^2 + b_1^3)}{(K^2 \cdot C_{\Pi})} \right) \cdot P_3 M_2
\end{aligned}$$

Вираз для потенціальної енергії через зовнішні сили матиме вид

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot (P_1, P_2, \dots, P_6) \parallel \delta_{ij} \parallel \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_6 \end{pmatrix}$$

Для чисельного розрахунку використовувались наступні параметри центрифуги:

$$m_R = 0,507 \text{ кг}, m_A = 0,6 \text{ кг}, m_S = 2,4 \text{ кг}, l = 86 \text{ мм}, l_1 = 45 \text{ мм}, l_2 = 32 \text{ мм}, l_3 = 120 \text{ мм}, I_R = 882 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, \\
I_{R0} = 1529 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, I_A = 93 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, I_{A0} = 425 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, I_S = 0,018 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2, I_{S0} = 0,018 \text{ кг} \cdot \text{мм}^2$$

Спростивши та згрупувавши члени при $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{M}_1, \bar{M}_2, \bar{M}_3$ та підставляючи довжини та жорсткості, отримаємо:

$$\begin{aligned} \Pi = & 0,00003644122459P_2^2 + 0,00003452119679M_2P_2 + 0,00003405918930M_3P_2 + 0,00007588797397P_3P_2 + \\ & + 0,0001284593280P_3M_2 + 0,00004366099383P_3^2 + 0,0001314498422M_3P_3 + 0,001061990566M_3M_2 + \\ & + 0,0005888039632M_3^2 + 0,0005444108767M_2^2 + 0,00007756542997P_3P_1 + 0,00007332073060P_2P_1 + \\ & + 0,00003697389423P_1^2 + 0,00004823522006M_3P_1 + 0,001071893779M_3M_1 + 0,0001286272535P_3M_1 + \\ & + 0,00004823522006M_2P_1 + 0,001071893779M_2M_1 + 0,00003430060093P_2M_1 + 0,00004823522006P_1M_1 + \\ & + 0,0005359468895M_1^2 \end{aligned}$$

Користуючись одержаними виразом для потенціальної енергії формуємо матрицю піддатливості [6]:

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 7.394778845 & 4.823522006 & 7.332073059 & 4.823522006 & 7.756542995 & 4.823522006 \\ 4.823522006 & 107.193778999 & 3.430060091 & 107.193778999 & 12.862725349 & 107.193778999 \\ 7.3320730599 & 3.430060091 & 7.288244917 & 3.452119679 & 7.588797395 & 3.405918929 \\ 4.823522006 & 107.193778999 & 3.452119679 & 108.882175339 & 12.845932800 & 106.1990566 \\ 7.756542995 & 12.862725349 & 7.588797395 & 12.845932800 & 8.732198765 & 13.144984220 \\ 4.823522006 & 107.193778999 & 3.405918929 & 106.1990566 & 13.144984220 & 117.760792639 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5}$$

У якості параметрів які визначають положення системи вибираються переміщення, то необхідно виразити потенціальну енергію через переміщення.

Обертаючи вирази для переміщень

$$(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_6) = \|\delta_{ij}\| \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_6 \end{pmatrix},$$

отримаємо вирази для сил, які виражаються через переміщення

$$(P_1, P_2, \dots, P_6) = \|\delta_{ij}\|^{-1} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_6 \end{pmatrix}$$

Підставляючи вхідні значення, отримаємо вирази сил виражених через переміщення приймуть вид:

$$\begin{aligned} P_1 = & 2.46650323058199584 \cdot 10^8 (\xi_1 + \eta_1) - 3.99534296177572106 \cdot 10^6 (\psi_1 + \theta_1) - \\ & - 2.16524188848188698 \cdot 10^8 (\xi_2 + \eta_2) + 2.86077985157029238 \cdot 10^6 (\psi_2 + \theta_2) - \\ & - 3.01122022080636360 \cdot 10^7 (\xi_3 + \eta_2) + 5.77536878491423560 \cdot 10^5 (\psi_3 + \theta_2) \\ M_1 = & -3.99534296177823702 \cdot 10^6 (\xi_1 + \eta_1) + 2.63472010161050305 \cdot 10^5 (\psi_1 + \theta_1) + \\ & + 5.22931441159042530 \cdot 10^6 (\xi_2 + \eta_2) - 1.25613852706632316 \cdot 10^5 (\psi_2 + \theta_2) - \\ & - 1.23459839000073937 \cdot 10^6 (\xi_3 + \eta_3) + 23678.9497972274876 (\psi_3 + \theta_3) \\ P_2 = & -2.16524188848226636 \cdot 10^8 (\xi_1 + \eta_1) + 5.22931441158880014 \cdot 10^6 (\psi_1 + \theta_1) + \\ & + 2.16202652747254848 \cdot 10^8 (\xi_2 + \eta_2) - 2.67714356996323030 \cdot 10^6 (\psi_2 + \theta_2) + \\ & + 3.21536096883397724 \cdot 10^5 (\xi_3 + \eta_3) + 2.34348439624087565 \cdot 10^5 (\psi_3 + \theta_3) \\ M_2 = & 2.86077985157055594 \cdot 10^6 (\xi_1 + \eta_1) - 1.25613852706608684 \cdot 10^5 (\psi_1 + \theta_1) - \\ & - 2.67714356996304450 \cdot 10^6 (\xi_2 + \eta_2) + 96732.3703999549034 (\psi_2 + \theta_2) - \\ & - 1.83636281569839485 \cdot 10^5 (\xi_3 + \eta_3) + 7851.33698327812908 (\psi_3 + \theta_3) \\ P_3 = & -3.01122022080257610 \cdot 10^7 (\xi_1 + \eta_1) - 1.23459839000163298 \cdot 10^6 (\psi_1 + \theta_1) + \\ & + 3.21536096845479915 \cdot 10^5 (\xi_2 + \eta_2) - 1.83636281569389947 \cdot 10^5 (\psi_2 + \theta_2) + \\ & + 2.97906661133220158 \cdot 10^7 (\xi_3 + \eta_3) - 8.11885318178503658 \cdot 10^5 (\psi_3 + \theta_3) \end{aligned}$$

$$M_3 = 5.77536878490345902 \cdot 10^5 (\xi_1 + \eta_1) + 23678.9497972498358(\psi_1 + \theta_1) + \\ + 2.34348439625119442 \cdot 10^5 (\xi_2 + \eta_2) + 7851.3369832656553(\psi_2 + \theta_2) - \\ - 8.11885318178457441 \cdot 10^5 (\xi_3 + \eta_3) + 32407.641815033657(\psi_3 + \theta_3)$$

Власні частоти системи визначаються за допомогою теореми Лагранжа другого роду, тому необхідно записати вираз для потенціальної енергії через переміщення у нерухомій системі координат.

Потенціальна енергія системи виражається через переміщення у наступному виді

$$П = \frac{1}{2} \sum C_{ij} u_i u_j, \text{ де } \|C_{ij}\| = \|\delta_{ij}\|^{-1}, \text{ матриця жорсткості.}$$

Положення системи описується кутами поворотів системи координат x, y, z пов'язаній з тілом відносно нерухомої системи координат ξ, η, ζ . У нерухомій системі координат $O\xi\eta\zeta$ вісь ζ співпадає з віссю валу. Обертання ротору навколо осі характеризується кутом φ (рис.5).

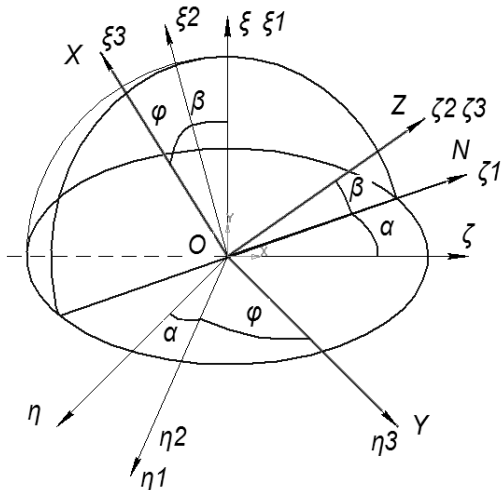


Рис. 5. Куты Ейлера-Крилова, які визначають положення тіла

Кінетична енергія системи дорівнює сумі кінетичних енергій тіл з яких система складається, тобто:

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

де T_1 – кінетична енергія статора та корпусу центрифуги, T_2 – кінетична енергія ротору двигуна (анкер), T_3 – кінетична енергія ротору.

Для абсолютно твердого тіла кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій за рахунок руху мас зосереджених у центрах інерції та обертального руху. Головними осями тіла є осі ξ_2, η_2, ζ_2 , де ζ_2 співпадає з віссю z .

$$T_1 = \frac{1}{2} \dot{U}_{C1}^2 \cdot m_S + \frac{1}{2} I_{AS} \cdot (\omega_{\xi_2 S}^2 + \omega_{\eta_2 S}^2)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \dot{U}_{C2}^2 \cdot m_A + \frac{1}{2} I_{AA} \cdot (\omega_{\xi_2 A}^2 + \omega_{\eta_2 A}^2) + \frac{1}{2} I_{PA} \cdot \omega_{\zeta_2 A}^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \dot{U}_{C3}^2 \cdot m_R + \frac{1}{2} I_{AR} \cdot (\omega_{\xi_2 R}^2 + \omega_{\eta_2 R}^2) + \frac{1}{2} I_{PR} \cdot \omega_{\zeta_2 R}^2$$

У зв'язку з тим, що напрямки взаємно ортогональні, то квадрати швидкостей центру інерції визначаються:

$$\dot{U}_{C1}^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2, \quad \dot{U}_{C2}^2 = \xi_2^2 + \eta_2^2, \quad \dot{U}_{C3}^2 = \xi_3^2 + \eta_3^2$$

Оскільки кінетична енергія тіла дорівнює сумі кінетичної енергії поступального та обертального руху, то необхідно визначити кінетичну енергію обертального руху.

Кінетична енергія визначається:

$$T_1 = \frac{1}{2} \dot{U}_{C1}^2 \cdot m_S + \frac{1}{2} I_{AS} \cdot (\dot{\alpha}_1^2 \cos^2 \beta_1 + \dot{\beta}_1^2) = \frac{1}{2} [\xi_1^2 + \eta_1^2] \cdot m_S + \frac{1}{2} I_{AS} \cdot (\dot{\alpha}_1^2 \cos^2 \beta_1 + \dot{\beta}_1^2)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \dot{U}_{C2}^2 \cdot m_A + \frac{1}{2} I_{AA} \cdot (\dot{\alpha}_2^2 \cos^2 \beta_2 + \dot{\beta}_2^2) + \frac{1}{2} I_{PA} \cdot (\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_2 \sin \beta_2)^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} \dot{U}_{C3}^2 \cdot m_R + \frac{1}{2} I_{AR} \cdot (\dot{\alpha}_3^2 \cos^2 \beta_3 + \dot{\beta}_3^2) + \frac{1}{2} I_{PR} \cdot (\dot{\varphi} + \dot{\alpha}_3 \sin \beta_3)^2$$

Для переходу від осей ξ, η, ζ до осей x, y, z використовується матриця повороту осей координат:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

або у більш компактній формі $[\xi \ \eta \ \zeta]^T = \|a_{ik}\| \cdot [x \ y \ z]^T$, де символ T означає операцію транспонування матриці, та a_{ik} – дев'ять направляючих косинусів a_{ik} .

Направляючі косинуси можна визначити за допомогою застосування основної формули сферичної тригонометрії або матричним методом [2,3].

Матричний метод полягає у використанні матриць перетворення послідовно для кожного повороту та у майбутньому виключенні проміжних матриць.

В результаті матимемо $[\xi \ \eta \ \zeta]^T = B \cdot [x \ y \ z]^T$, де матриця перетворення

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

Обернена матриця переходу

$$B^T = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

За допомогою матриці перетворення вираховуємо кутові швидкості обертання в нерухомій системі координат

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot{\alpha} + \dot{\varphi} \sin \beta, \\ \omega_\eta &= -\dot{\varphi} \cos \beta \sin \alpha + \dot{\beta} \cos \alpha, \\ \omega_\zeta &= \dot{\varphi} \cos \beta \cos \alpha + \dot{\beta} \sin \alpha. \end{aligned}$$

в той час $\omega_\xi = \dot{\psi}$, $\omega_\eta = \dot{\theta}$, $\omega_\zeta = \dot{\gamma}$, та системі пов'язаній з тілом

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\alpha} \cos \varphi \sin \beta + \dot{\beta} \sin \varphi, \\ \omega_y &= -\dot{\alpha} \sin \varphi \cos \beta + \dot{\beta} \cos \varphi, \\ \omega_z &= \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta. \end{aligned}$$

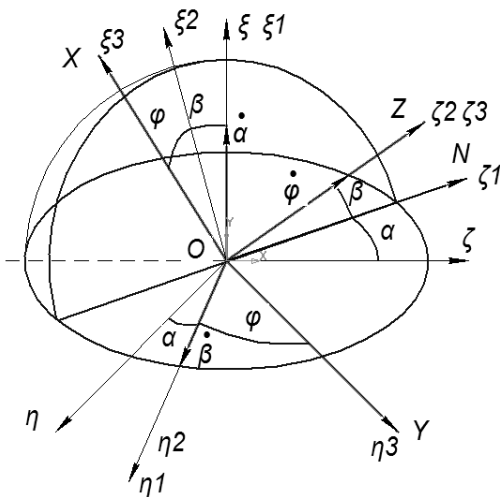


Рис. 6. Кутові швидкості тіла

Вирази кутових швидкостей в головній площині

$$\begin{aligned} \omega_{\xi 2} &= \dot{\alpha} \cos \beta, \\ \omega_{\eta 2} &= \dot{\beta}, \\ \omega_{\zeta 2} &= \dot{\varphi} + \dot{\alpha} \sin \beta, \end{aligned}$$

Виражаємо кути у головній площині $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\varphi}$ через кути у нерухомій системі координат $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\omega}$ (рис.6). Оскільки осі обертання співпадають, то $\dot{\alpha} = \dot{\psi}$, а відповідно $\alpha = \psi$. Вектор $\vec{B} = \dot{\beta}$ проектуємо на осі η та ζ . Проекції матимуть вид $\dot{\beta} \cos \alpha$ та $\dot{\beta} \sin \alpha$ відповідно. Тобто, у першому наближенні $\dot{\theta} = \dot{\beta}$, а отже $\theta = \beta$. Враховуючи, що кути повороту є малими, то синус кута замінюємо кутом, косинус – одиницею, а добуток кутів відкидаємо і лінеаризуємо задачу.

Підставляючи вище наведені викладки, отримаємо

вирази для кінетичної енергії у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} T_{1S} &= \frac{1}{2} [\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2] \cdot m_S + \frac{1}{2} I_{AS} \cdot (\dot{\psi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) \\ T_{2A} &= \frac{1}{2} [\dot{\xi}_2^2 + \dot{\eta}_2^2] \cdot m_A + \frac{1}{2} I_{AA} \cdot (\dot{\psi}_2^2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{1}{2} I_{PA} \cdot (\dot{\gamma} + \dot{\psi}_2 \theta_2)^2 \\ T_{3R} &= \frac{1}{2} [\dot{\xi}_3^2 + \dot{\eta}_3^2] \cdot m_R + \frac{1}{2} I_{AR} \cdot (\dot{\psi}_3^2 + \dot{\theta}_3^2) + \frac{1}{2} I_{PR} \cdot (\dot{\gamma} + \dot{\psi}_3 \theta_3)^2 \end{aligned}$$

Загальна кінетична енергія системи запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2] \cdot m_S + \frac{1}{2} I_{AS} \cdot (\dot{\psi}_1^2 + \dot{\theta}_1^2) + \frac{1}{2} [\dot{\xi}_2^2 + \dot{\eta}_2^2] \cdot m_A + \frac{1}{2} I_{AA} \cdot (\dot{\psi}_2^2 + \dot{\theta}_2^2) + \\ &+ \frac{1}{2} I_{PA} \cdot \dot{\gamma}^2 + \frac{1}{2} [\dot{\xi}_3^2 + \dot{\eta}_3^2] \cdot m_R + \frac{1}{2} I_{AR} \cdot (\dot{\psi}_3^2 + \dot{\theta}_3^2) + \frac{1}{2} I_{PR} \cdot \dot{\gamma}^2 \end{aligned}$$

Потенціальна енергія системи запишеться

$$\begin{aligned} \dot{I} = & 5,229315675 \cdot 10^6 \cdot \psi_1 \xi_1 + 16203,81435 \cdot \psi_2^2 + 3,215336585 \cdot 10^5 \cdot \xi_2 \xi_3 + 1,489532418 \cdot 10^7 \cdot \xi_3^2 + 1,317360102 \cdot 10^5 \cdot \psi_1^2 + \\ & + 5,775363391 \cdot 10^5 \cdot \xi_1 \psi_3 - 2,677144261 \cdot 10^6 \cdot \xi_2 \psi_2 - 3,011218201 \cdot 10^7 \cdot \xi_1 \xi_3 + 2,860780407 \cdot 10^6 \cdot \xi_1 \psi_2 + 7851,333057 \cdot \psi_2 \psi_3 - \\ & - 8,118848369 \cdot 10^5 \cdot \xi_3 \psi_3 + 1,081013434 \cdot 10^8 \cdot \xi_2^2 + 48366,19082 \cdot \psi_2^2 - 1,256138793 \cdot 10^5 \cdot \psi_1 \psi_2 + 23678,93149 \cdot \psi_1 \psi_3 - \\ & - 2,165242205 \cdot 10^8 \cdot \xi_1 \xi_2 - 1,836361448 \cdot 10^5 \cdot \psi_2 \xi_3 + 23678,93149 \cdot \theta_1 \theta_3 + 7851,333057 \cdot \theta_2 \theta_3 - 1,836361448 \cdot 10^5 \cdot \theta_2 \eta_3 + \\ & + 1,081013434 \cdot 10^8 \cdot \eta_2^2 + 48366,19082 \cdot \theta_2^2 - 2,677144261 \cdot 10^6 \cdot \eta_2 \theta_2 + 3,215336585 \cdot 10^5 \cdot \eta_2 \eta_3 + 2,343484975 \cdot 10^5 \cdot \eta_2 \theta_3 + \\ & + 1,2333251673 \cdot 10^8 \cdot \eta_1^2 - 3,995344907 \cdot 10^6 \cdot \eta_1 \theta_1 - 2,165242205 \cdot 10^8 \cdot \eta_1 \eta_2 + 2,860780407 \cdot 10^6 \cdot \eta_1 \theta_2 - 3,011218201 \cdot 10^7 \cdot \eta_1 \eta_3 - \\ & - 1,234597708 \cdot 10^6 \cdot \theta_1 \eta_3 + 5,775363391 \cdot 10^5 \cdot \eta_1 \theta_3 + 1,317360102 \cdot 10^5 \cdot \theta_1^2 + 5,229315675 \cdot 10^6 \cdot \theta_1 \eta_2 - 1,256138793 \cdot 10^5 \cdot \theta_1 \theta_2 + \\ & + 2,343484975 \cdot 10^5 \cdot \xi_2 \psi_3 - 1,234597708 \cdot 10^6 \cdot \psi_1 \xi_3 + 1,489532418 \cdot 10^7 \cdot \eta_3^2 - 8,118848369 \cdot 10^5 \cdot \eta_3 \theta_3 + 16203,81435 \cdot \theta_3^2 + \\ & + 1,2333251673 \cdot 10^8 \cdot \xi_1^2 - 3,995344907 \cdot 10^6 \cdot \xi_1 \psi_1 \end{aligned}$$

Використовуючи рівняння Лагранжа другого роду $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, де L - функція Лагранжа, $L = T - \Pi$, де T

- кінетична енергія, Π - потенціальна енергія, одержуємо рівняння руху [3,4]. Так як нас цікавлять коливання, то задаємо переміщення у вигляді гармонічних функцій та отримуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь. З умови того, що її детермінант дорівнює нулю, знаходимо власні частоти і їх залежність від швидкості обертання ротору, тобто гіроскопічних ефектів.

Результати розрахунків з різним діапазоном частот наведені нижче (Рис.7).

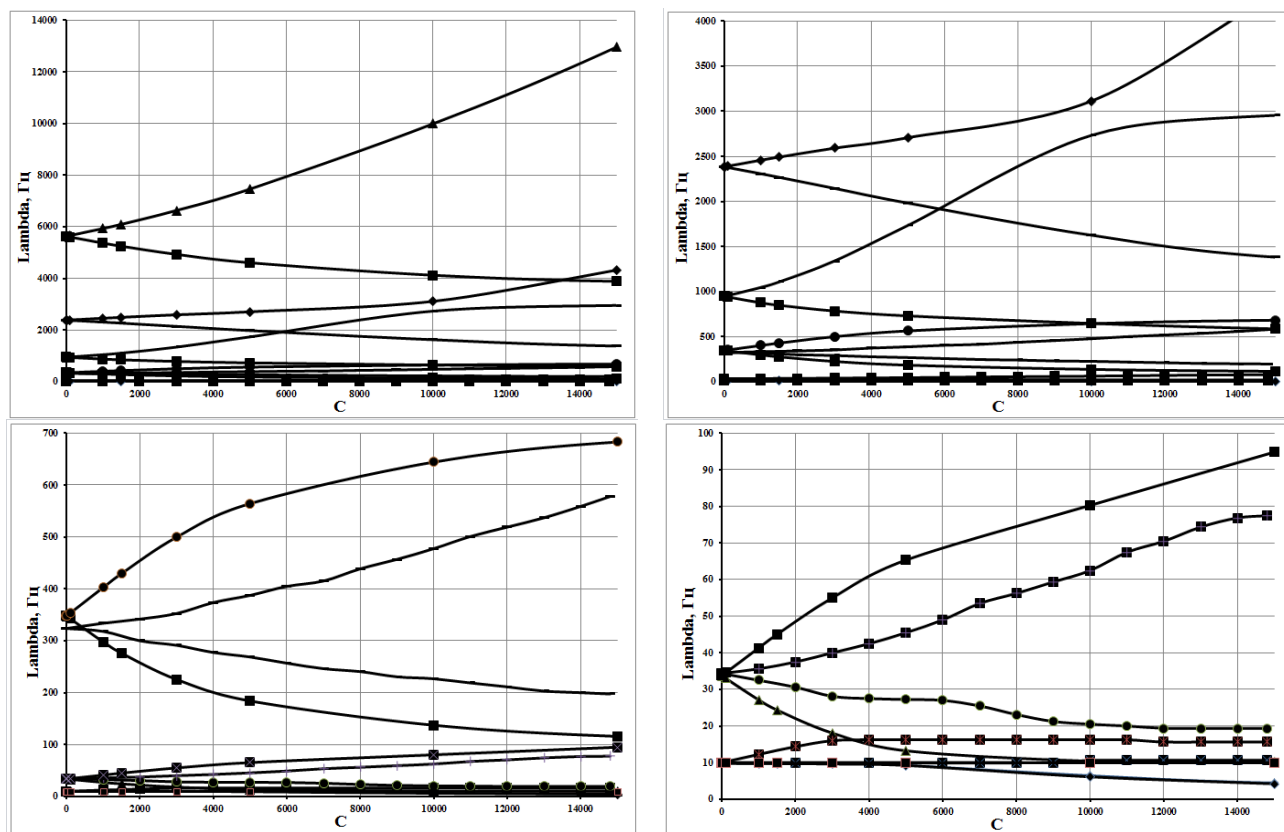


Рис. 7. Результати визначення залежності власних частот від частоти обертання

В результаті побудована діаграма Кемпбела, яка відображає залежності власних частот від частоти обертання, тобто вплив гіроскопічних ефектів на власні частоти.

Розрахунковим шляхом при визначенні власних частот найбільш близькими були отримані результати з допомогою моделі, яка враховує ступені вільності багатомасової системи обумовлені кутовою деформацією за рахунок пружних опор, деформацією при зсуві пружних опор, що відповідає реальній конструкції.

Висновки

1. Показано, що існуючі розрахункові моделі не достатньо точно описують роботу реальної конструкції центрифуги типу Рісо 21. Запропонована нова розрахункова модель, яка відображає реальну конструкцію і

динамічну поведінку центрифуги Pico 21 з достатньою точністю. Вона дає можливість визначити всі власні частоти для центрифуги як трьох масової системи.

2. Аналітичним шляхом, на основі використання рівняння Лагранжа другого роду та використання параметрів моделі, отримані залежності впливу гіроскопічних ефектів на власні частоти коливань центрифуги.

3. Розроблена експериментальна методика визначення динамічних параметрів центрифуги. На її основі визначені жорсткості опор та вплив швидкості обертання на власні частоти.

4. Розрахункова модель дозволяє визначити весь спектр коливань багатомасової системи на відміну від одно масової системи, яка не дає такої можливості. Показано, що розрахункові та експериментально визначені власні частоти мають достатньо високу степінь кореляції, їх відхилення не перевищує 3%.

Анотація. Определены динамические характеристики лабораторной центрифуги с учетом ее конструктивных особенностей, которые заключаются в том, что она является многомассовой системой закрепленной на упругих опорах. Показано отличие от предыдущих широко известных подходов, в которых центрифуга рассматривается как одномассовая конструкция и не учитываются конструктивные особенности закрепления. Для исследования ее движения использованы уравнения Лагранжа второго рода. Получены дифференциальные уравнения движения и определены особенности движения центрифуги.

Ключевые слова: лабораторная центрифуга, ротор, уравнение движения.

Abstract. Purpose. Definition of influence of gyroscopic effect on vibrations of a laboratory centrifuge.

Design/methodology/approach. Vibrations take into account six degrees of freedom. Were found dependences of own frequencies depending on frequency and direction of rotation of a centrifuge. The correlation of results of numerical and experimental definition of values of own frequencies were shown. The model of a gyroscope accepted in article is calculated on its use at the solution of a number of applied tasks.

The dynamic characteristics of the centrifuge with design features that consist in fact that it is multi-mass system fixed on elastic support is determined. Contrast to the previous well-known approaches in which the centrifuge is seen as a single-mass construction and do not take into account the design features fixing is shown. In order to study its motion used Lagrange equations of the second kind. Differential equations of motion and the specific features the centrifuge motion defined.

Findings. With influence of gyroscopic effect on every degree of freedom we have two resonant frequencies instead of one.

Originality/value. This research was important and original in field of vibrations of medical machines, which usually work with high values of frequencies. It shows changes of own frequencies depending on work frequencies. It can help to avoid a resonance during operation.

Keywords: lab centrifuge, rotor, equation of motion.

Бібліографічний список використаної літератури

1. Нестеренко В.П. Автоматическая балансировка роторов проборов и машин со многими степенями свободы / В.П. Нестеренко. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1985. – 84 с.
2. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів авто балансирами з твердими коригувальними вантажами / Г.Б. Філімоніхін. – Кіровоград: КНТУ, 2004. – 352с.
3. Лурье А.И. Аналитическая механика. М., 1961. – 824с.
4. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., «Наука», 1974. – 431с.
5. Гусаров А.А. Автоматическая балансировка роторов машин. – М.: Наука, 1979. – 306с.
6. Бабенко А.С., Лавренко Я.І., Куренков М.М. Вплив гіроскопічних ефектів на коливання валу центрифуги. // Вісник НТУУ «КПІ», Машинобудування. — К.: НТУУ «КПІ». - 2013. — Вып. 65 – с. 166-174

References

1. Nesterenko V. Automaticheskaya balansirovka rotorov pryborov i mashin so mnogimi stepenyami svobody [Automatic balancing rotors of devices and machines with many degrees of freedom]. Tomsk, 1985, p.84.
2. Filimonihin G.B. Zrивnovazhennja i vibrozahyst rotoriv avto balansyramy z tverdymy koryguval'nymy vantazhamy [Balancing and vibroprotection of rotors by autobalance with solid weights]. Kirovograd, 2004, 352p.
3. Lurie A.I. Analytycheskaya mechanica [Analytical mechanics]. Moscow, 1961, 824p.
4. Arnold V.I. Matematicheskie metody klasicheskoy mechaniki [Mathematical Methods Classical Mechanics]. Moscow, 1974, 431p.
5. Gusarov A.A. Automaticheskaya balansirovka rotorov mashin [Automatic balancing rotors machines]. Moscow, 1979, 306p.
6. Babenko A., Lavrenko Ia., Kurenkov M. Journal of Mechanical Engineering of the National Technical University of Ukraine “Kyiv Politechnic Institute”, 2013, no 65, pp. 166-174.