

## НАПРЯЖЕНО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТОЛСТОСТЕННЫХ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК

Yakhno B., Trubachev S.  
National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine

### STRESS-STRAINE STATE OF THE CYLINDRICAL WALLED PERFORATED SHELLS

*Рассмотрено напряженно-деформированное состояние цилиндрической толстостенной перфорированной оболочки под действием внутреннего давления. Определена приведенная жесткость этой оболочки посредством определения эквивалентной толщины стенок. Проведен численный расчет с использованием трехмерных (3D) и оболочечных конечных элементов. Проанализировано НДС по окружности перфорирующих отверстия и по толщине стенки. Было проведено сравнение результатов НДС полученных на твердотельной трехмерной модели с результатами, полученными для оболочки с приведенной жесткостью. Были приведены рекомендации об определении НДС с использованием параметра приведенной жесткости с учетом концентрации напряжений.*

Ключевые слова: приведенная жесткость, перфорированная оболочка, цилиндрическая оболочка, концентрация напряжений.

#### Вступление

Использование перфорированных цилиндрических оболочек нашло широкое применение в теплообменниках атомной и теплоэнергетической отрасли народного хозяйства. Решение задачи о напряженно-деформированном состоянии такого типа конструктивных элементов является необходимой составляющей при определении допустимых режимов эксплуатации, прогнозировании ресурса, исследовании вибро- и сейсмостойкости [1].

Сложность решения такой задачи заключается в большом количестве перфорирующих отверстий, что значительно усложняет постановку задачи, фактически делая невозможным ее решение без введения дополнительных предположений и ограничений. Использование метода конечных элементов при решении задачи с учетом всех отверстий, приводит к значительному росту количества конечных элементов, что приводит к слишком высоким требованиям к вычислительной технике, с точки зрения объема памяти и быстродействия.

Одним из способов решения данного типа задач есть использование метода приведенной жесткости конструкции, когда перфорированная оболочка заменяется сплошной с жесткостью, эквивалентной перфорированной. Использование эквивалентных по жесткости оболочек в расчетных моделях оправдано, если необходимо оценить напряженно-деформированное состояние объектов присоединенных к перфорированной оболочке. Для определения напряженно-деформированного состояния самой перфорированной оболочки данный метод можно использовать только в первом приближении, так как он не учитывает концентрацию напряжений, которая возникает от большого количества небольших отверстий.

**Цель работы** заключается в построении численного алгоритма анализа напряженно-деформированного состояния перфорированной цилиндрической толстостенной оболочки теплоэнергетического оборудования.

#### Постановка и решение задачи

Важным классом задач термоупругости являются задачи, в которых рассматриваются тела вращения, находящиеся в условиях осесимметричной термомеханической нагрузки. Эти задачи удобно рассматривать в цилиндрической системе координат. Поскольку область исследования напряженно-деформированного состояния и условия нагрузки не осесимметричны, то компоненты  $U_r$  и  $U_z$  вектора перемещений  $\vec{U}$ , тензоров деформаций и напряжений зависят не только от осевой  $z = x_3$ , но и от радиальной координаты. Зависимость от угловой координаты  $\varphi$  отсутствует, угловой компонент  $U_\varphi$  вектора перемещений  $\vec{U}$  равняется нулю. В этом случае соотношения Коши, которые решают компоненты тензора деформации и вектора перемещений, принимают вид [2]:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}; \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{U_r}{r}; \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}; \gamma_{r\varphi} = \gamma_{\varphi r} = 0; \gamma_{rz} = \gamma_{zr} = \left( \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right); \gamma_{z\varphi} = \gamma_{\varphi z} = 0 \quad (1)$$

Для линейно-упругого изотропного материала можно получить выражения для компонентов тензора напряжений:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{2G}{1-2\mu} \left( (1-\mu)\varepsilon_{rr} + \mu(\varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}) - (1+\mu)\varepsilon^T \right) \\ \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{2G}{1-2\mu} \left( (1-\mu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \mu(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{rr}) - (1+\mu)\varepsilon^T \right), \\ \sigma_{zz} = \frac{2G}{1-2\mu} \left( (1-\mu)\varepsilon_{zz} + \mu(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - (1+\mu)\varepsilon^T \right) \\ \tau_{rz} = \tau_{zr} = G\gamma_{rz} = G\gamma_{zr} \end{cases} \quad (2)$$

где  $G$  и  $\mu$  - модуль сдвига, и коэффициент Пуассона,  $\varepsilon^T$  - температурная деформация. При этом  $\tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = 0$  и  $\tau_{z\varphi} = \tau_{\varphi z} = 0$ .

Из трех уравнений равновесия для трехмерного случая, при рассмотрении осесимметричной задачи, остаются только два уравнения в виде:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + f_r^0 = 0 \\ \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau_{rr})}{\partial r} + f_z^0 = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

где  $f_r^0$  и  $f_z^0$  - радиальный и осевой компоненты заданного вектора распределенной объемной силы. Если на части контура  $\Gamma'$  осевого сечения тела вращения заданы распределенные поверхностные силы с компонентами  $p_r^0$  и  $p_z^0$ , то силовые граничные условия необходимо представить в виде:

$$\begin{cases} \sigma_{rr}n_r + \tau_{rz}n_z = p_r^0 \\ \tau_{rz}n_r + \sigma_{zz}n_z = p_z^0 \end{cases}, \quad (4)$$

где  $n_r$ ,  $n_z$  - компоненты единичного вектора внешней нормали к части контура  $\Gamma'$ . Кинематические граничные условия на части контура  $\Gamma''$  осевого сечения принимают вид:

$$U_r(p) = U_r^0(p), \quad U_z(p) = U_z^0(p); \quad p \in \Gamma'' \quad (5)$$

где  $U_r^0(p)$  и  $U_z^0(p)$  - компоненты заданного вектора  $U^0(p)$  перемещений точек  $p \in \Gamma''$ .

Таким образом, для решения осесимметричной задачи термоупругости необходимо найти десять функций: два компонента вектора перемещений и по четыре компоненты тензоров деформации и напряжений, используя два уравнения равновесия (3), по четыре соотношения Коши (1) и закона Гука (2), удовлетворяя при этом граничным условиям (4) и (5).

Рассмотрим решение осесимметричной задачи в перемещениях. Объемную деформацию выразим, как [3]

$$\theta = \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} = \frac{\partial U_z}{\partial z} + \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) U_r = \frac{\partial U_z}{\partial z} + D U_r, \quad (6)$$

где  $D = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$  - соответствующий оператор.

Если подставить (6) в физические уравнения (2), а потом выражения, полученные для напряжений подставить в условия (3) при постоянных значениях физико-механических свойств конструкционного материала и отсутствии объемных сил для изотермической задачи теории упругости получим два дифференциальных уравнения относительно двух функций  $U_z(r, z)$  и  $U_r(r, z)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} D \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{2(1-\mu)} \frac{\partial}{\partial z} (D U_r) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} (D U_r) + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\mu)} \frac{\partial^2 U_z}{\partial r \partial z} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Проинтегрировав уравнения (7), найдем функции  $U_z(r, z)$  и  $U_r(r, z)$  которые должны удовлетворять уравнению (7), и граничным условиям на поверхности, которые должны быть записаны в перемещениях. Введем оператор  $D^2$  так, что

$$D^2 = \frac{\partial}{\partial r} D = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) \quad (8)$$

Если из условий (7) исключить величину  $U_z$ , тогда будем иметь

$$\frac{\partial^4 U_r}{\partial z^4} + 2D^2 \frac{\partial^2 U_r}{\partial z^2} + D^2 D^2 U_r = 0 \quad (9)$$

Аналогично можно сложить дифференциальное уравнение четвертого порядка, которому должно удовлетворять перемещение  $U_z$

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} D \frac{\partial U_z}{\partial z} + \left( D \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 U_z = 0 \quad (10)$$

Следовательно, решение осесимметричной изотермической задачи теории упругости в перемещениях свелось к решению двух дифференциальных уравнений четвертого порядка (9) и (10).

В случае, когда тела вращения имеют сложную геометрическую форму, или неоднородные физико-механические характеристики по оси вращения и радиусу, использование аналитических методов решения задачи об определении напряженно-деформированного состояния является неэффективным, поэтому необходимо ориентироваться на численные методы, например, метод конечных элементов (МКЭ) [4-7].

В большинстве случаев при решении осесимметричной задачи с помощью (МКЭ) решение сводится к нахождению на двумерной сетке конечных элементов узловых значений двух компонентов вектора перемещений  $U = (U_r, U_z)^T$ . Это позволяет при решении осесимметричной задачи использовать двумерные конечные элементы, как и в случае плоской задачи. Но в случае, когда осесимметричная конструкция имеет сложную форму, например, перфорированные толстостенные цилиндрические оболочки, которые широко используются в энергетике, возникает вопрос постановки задачи и выбора типа конечных элементов. Учитывая то, что в отверстиях перфорированных толстостенных оболочек возникает концентрация напряжений, целесообразно использовать трехмерные конечные элементы и рассматривать задачу в трехмерной постановке.

В данной работе для расчета перфорированных оболочек использовались как четырехузловые оболочечные, так и трехмерные восьмиузловые призматические конечные элементы. Выбор такого подхода позволяет с высокой точностью определить напряженно-деформированное состояние конструктивных элементов с учетом концентрации напряжений вблизи отверстий.

Рассмотрим толстостенный перфорированный цилиндр с внешним диаметром 1072 мм, толщиной стенки 136 мм, и диаметром перфорирующих отверстий - 13,2 мм. Распределение перфорирующих отверстий по поверхности цилиндра приведено на рис.1. Цилиндр нагружен внутренним давлением, равным 10 МПа. В качестве материала цилиндра была использована нержавеющая сталь 08X18H10T со следующими механическими свойствами: модуль Юнга  $E=2 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\mu=0,24$ . Цилиндр может беспрепятственно расширяться. Один концом цилиндр зафиксирован в осевом направлении.

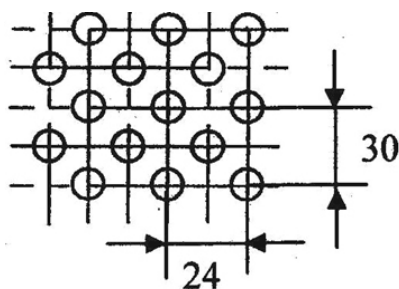


Рис. 1. Схема размещения, перфорирующих отверстий

В связи с тем, что при данной постановке задачи, распределение напряжений циклически симметрично, возможно рассмотрение в расчетной модели не целого цилиндра, а некоторую его часть. Так при решении задачи с помощью оболочечных конечных элементов целесообразно рассматривать цилиндрическое кольцо, вид которого приведен на рис. 2 а-б. Вначале было рассмотрено перфорированное кольцо (рис.2 б) нагруженное внутренним давлением. При этом перемещение кольца в радиальном направлении составило 0,132 мм. Такому перемещению отвечает толщина сплошного цилиндрического кольца (рис.2 а), которая равняется 65 мм. При этом максимальное напряжение в сплошном кольце составило, - 59 МПа, а в перфорированном кольце - 101,5 МПа. На рис.3 показана концентрация напряжений, причиной которой является перфорация оболочки круглыми отверстиями. Величина

коэффициента концентрации напряжений достигает 2.

Для более детального анализа напряженно-деформированного состояния была рассмотрена часть цилиндра в трехмерной постановке (рис.2. в). Результаты расчета приведены на рис. 4. Как видно из рис.4 б, напряжения изменяются как по периметру перфорирующего отверстия, так и по толщине стенки. Причем на внутренней поверхности цилиндра они значительно меньше, чем на внешней.

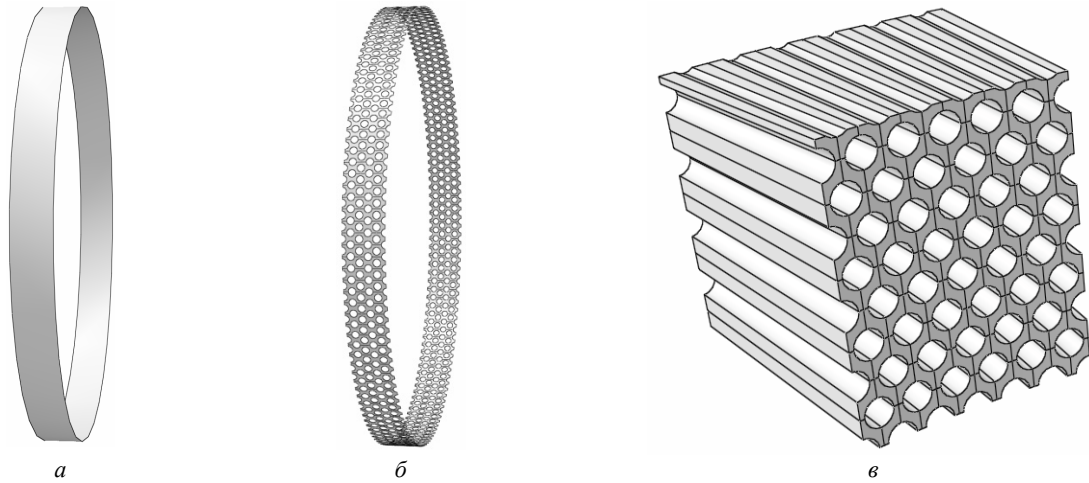


Рис. 2. Расчетные рассматриваемые геометрические модели. *a* - геометрическая модель оболочки с приведенной жесткостью; *б* - геометрическая модель перфорированной оболочки; *в* - твердотельное представление части перфорированной оболочки

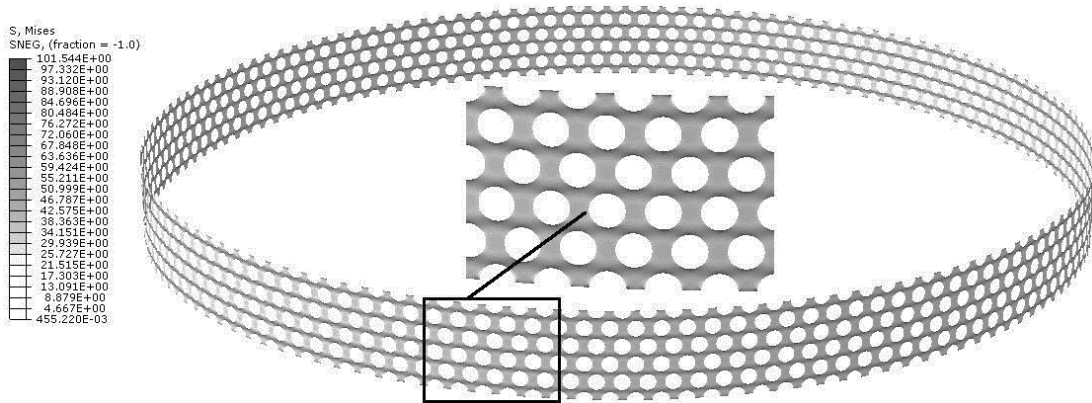


Рис. 3. Концентрация напряжений в перфорированном кольце

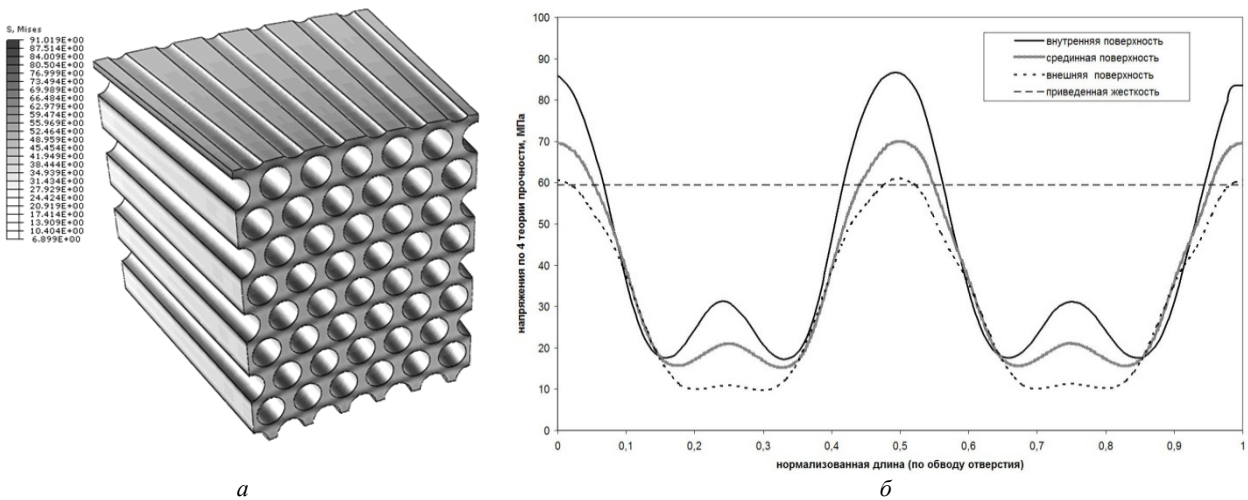


Рис. 4. Концентрация напряжений вблизи перфорационных отверстий. *a* - распределение напряжений на трехмерной модели, *б* - количественное сравнение напряжений в отверстиях, полученных на трехмерной модели на внутренней, средней и внешней поверхностях цилиндра с напряжениями в оболочке с приведенной жесткостью

**Выводы**

В работе приведено аналитическое описание задачи теории упругости для перфорированного толстостенного цилиндра в термомеханической постановке. Показано, что для решения задач о напряженно-

деформированном состоянии перфорированных цилиндров необходимо использовать численные методы, в частности метод конечных элементов. Причем для толстостенных перфорированных цилиндров целесообразно использовать трехмерные конечные элементы. В работе показано, что решение задачи с учетом приведенной жесткости для оболочечной модели дает заниженное значение напряжений, не учитывающее концентрацию напряжений на внутренней поверхности оболочки.

**Анотація.** Розглянуто деформування циліндричної товстостінної перфорованої оболонки під дією внутрішнього тиску. Визначена приведена жорсткість цієї оболонки за допомогою визначення еквівалентної товщини стінки. Проведено чисельний розрахунок з використанням твердотільних (3D) та оболочкових скінченних елементів. Проаналізовано НДС по обводу перфоровуючого отвору, по товщині стінки, та порівняно із результатами для оболонки із зведеною жорсткістю. Були наведені рекомендації про визначення НДС з використанням параметра приведеної жорсткості з урахуванням концентрації напружень.

**Ключові слова:** зведена жорсткість, перфорована оболонка, циліндрична оболонка, концентрація напружень.

**Abstract.** In the article was discussed the problem of the stress determination in thick-walled cylinders. This task type is used for strength analyse of nuclear power plant equipment, for example - steam generator. Analytical solution for axial-symmetric construction parts was discussed. The perforation holes make geometrical inhomogeneity of structure, so numerical solution was find in solid and shall formulation. Equivalent rigidity of the shall don't account a stress concentration from holes. This fact was shown on fig.4b. It's necessary to use solid (3D) geometrical task formulation to calculate stress concentration level. The stress-strain state of thick-walled cylindrical perforated shell under internal pressure is consider. Defined the reduced stiffness of the shell by defining an equivalent thickness. A numerical calculation using solid (3D) and shell finite elements is done. Analyzed stress-straine state of circle perforating holes and the thickness of the wall. Compared the stress-straine state obtained on solid three-dimensional model with the results for a shell with equivalent stiffness. Were given advice on the definition of strass-straine state by using the equivalent stiffness considering stress concentration.

**Keywords:** equivalent stiffness, perforated shall, cylindricall shall, stress concentration.

1. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. Перфорированные пластины и оболочки/ Э.И. Григолюк, Л.А. Фильштинский. – М.: Наука, 1970.– 556 с.
2. Зарубин В.С., Станкевич И.В. Расчет теплонапряженных конструкций. / В.С. Зарубин, И.В. Станкевич – М.: Машиностроение, 2005. – 352с.
3. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості: Підручник./ М.С. Можаровський – К.: Вища школа., 2002 – 308с.
4. Зенкевич О. С. Метод конечных элементов в технике/ О. С. Зенкевич. – М.: МИР, 1975. – 542с.
5. Getting Started with ABAQUS. – USA, Abaqus inc., 2003 - 497 p.
6. FKM – Guideline, Analytical Strength Assessment Of Components In Mechanical Engineering, 5th, revised edition, English Version, Forschungskuratorium Maschinenbau (FKM), – Frankfurt/Main, 2003 – 268p.
7. Норри Д., Фрид Ж. Введение в метод конечных элементов./ Д. Норри, Ж. Фрид – М.: Мир.1981 – 304с.

## REFERENCE

1. Grigoluk A.I., Filshtinskij L.A. Perforirovannie plastyni i obolochki. Moscow: Nauka, 1970. 556 p.
2. Zarubin V.S., Stankevich I.V. Paschet teplonapriazennich konstrukcij. Moscow: Mashinostroenie, 2005. 352p.
3. Mozharovsky N.S.Theorija pruznosty, plastychnosty I polzuchesty. Pidruchnik. Kiev: High School., 2002. 308p.
4. Zenkiewicz O. C. Metod konechnix elementov v technike. Moscow: MIR, 1975. 542p.
5. Getting Started with ABAQUS. USA, Abaqus inc., 2003. 497 p.
6. FKM – Guideline, Analytical Strength Assessment Of Components In Mechanical Engineering, 5th, revised edition, English Version, Forschungskuratorium Maschinenbau (FKM), Frankfurt Main, 2003. 268p.
7. Norrie D., Freese J. Vvedenie v metod konechnich elementov. Moscow: MIR.,1981. 304p.