

## ГИДРОДИНАМИКА ПОТОКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ФОРМУЮЩЕМ ИНСТРУМЕНТЕ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СТРУЙ

Yakhno O., Seminskaya N.  
The National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine (seminska@ukr.net)

### HYDRODYNAMICS OF VISCOUS FLUID FLOW IN FORMING TOOL FOR MULTILAYER JET PRODUCTION

*Проведены экспериментальные и теоретические исследования течения вязких ньютоновских жидкостей на начальном участке двухслойного струйного потока. Установлено, что нестабилизированное течение можно представить двумя участками. Выявлены закономерности изменения скорости контакта в процессе течения жидкости в слоях. Определены факторы оказывающие существенное влияние на структуру поверхности жидкости вне пределов насадка. Получены эмпирические зависимости позволяющие определить длины гидродинамического и геометрического начальных участков.*

*Ключевые слова:* многослойные, нестабилизированные, насадок, начальный участок

#### Введение

Исследование гидродинамики струйных потоков вязкой жидкости является актуальным и перспективным. Это обусловлено широким спектром применения струйных течений в различных областях промышленности, а именно угольной, металлургической, химической, пищевой промышленности, машиностроении и нефтедобыче. Одним из функциональных участков струи, требующим детального изучения, является участок стабилизированного течения (начальный). Особенности формирования свободных незатопленных однослойных струй достаточно изучены в работах [1-2]. Значительно сложнее описать подобного рода течения в многослойных струях, которые находят широкое применение в химической и нефтехимической промышленности. Исследованием таких потоков занимался целый ряд авторов [3-6].

**Цель работы** заключается в проведении экспериментальных и теоретических исследований течения вязких ньютоновских жидкостей на начальном участке двухслойного струйного потока.

#### Исследование

Нами были проведены экспериментальные исследования на стенде, внешний вид которого представлен на рис 1. На основании этих исследований установлено, что подобного рода течения в насадках, рассматриваемых как формирующий струю инструмент, являются нестабилизированными и состоящими из ряда зон (рис. 2). При подводе в насадок нескольких потоков в начальной области взаимодействия слоёв формируется поток, течение жидкости в котором осуществляется при наличии конвективного ускорения и характеризуется деформацией профиля скорости по длине, а так же областью повышенных перепадов давления. Таким образом, течение слоёв жидкости за участком встречи потоков можно охарактеризовать тремя различными по структуре участками:

- участок раздельного течения с зоной нестабилизированного течения с изменяющейся площадью "живого" сечения  $l_1$ ;

- участок нестабилизированного течения с постоянной площадью "живого" сечения  $l_2$ ;

- участок стабилизированного течения с постоянной величиной соотношения слоёв  $l_3$ .

Определение размеров этих участков дает возможность определить длину формирующего поток насадка на выходе, из которого будет эпюра скоростей потока, соответствующая стабилизированному течению. Понятие "стабилизированное течение" достаточно полно описано в работах [3,4]. Вместе с тем, ни экспериментально, ни теоретически не исследованными являются течения на начальном участке. В тоже время, именно здесь значения напряжений перепада давлений и других гидродинамических параметров являются экспериментальными и должны быть учтены не только при технологических, но и прочностных расчётах.

Экспериментальные исследования подобного типа течений, проведенные нами с различными по реологическим свойствам жидкостями, позволили установить, что нестабилизированное течение можно

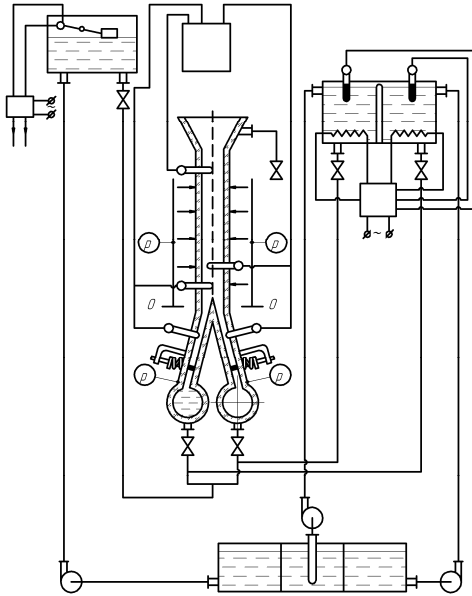


Рис. 1. Схема экспериментального стенда для исследования двухслойных течений вязких жидкостей

Ось  $y$  в данном случае является осью симметрии общего плоскощелевого насадка шириной  $\delta_0$ . Опыты показали, что толщина слоёв жидкости  $\delta_1$  и  $\delta_2$  при двухслойном течении может быть определена следующим образом:

$$\delta_1 = \frac{Q_1 u_{2cp} \delta_0}{Q_2 u_{1cp} + Q_1 u_{2cp}} \quad \delta_2 = \frac{Q_1 u_{1cp} \delta_0}{Q_1 u_{2cp} + Q_2 u_{1cp}}$$

при  $\delta_0 = \delta_1 + \delta_2$

Длина геометрического начального участка  $l_1$ , как правило, значительно отлична от длины гидродинамического начального участка  $l_2$  (рис. 1). Она в большей степени зависит от формы границы раздела слоёв  $\delta_1$  и  $\delta_2$ , которая может быть определена из соотношений:

$$\delta_1 = \left( 0,5\delta_0 + aj^{\frac{1}{k}} \right) B; \quad \delta_2 = \left( 0,5\delta_0 - aj^{\frac{1}{k}} \right) B,$$

где  $j = \frac{y}{\delta_0}$ ,  $B$ - ширина потока.

Учитывая данные соотношения для любого сечения  $x$  имеем

$$u_{cp1} = Q_1 \left( 0,5\delta_0 + aj^{\frac{1}{k}} \right)^{-1} B^{-1}, \quad u_{cp2} = Q_2 \left( 0,5\delta_0 - aj^{\frac{1}{k}} \right)^{-1} B^{-1}.$$

Разность средних скоростей на геометрическом начальном участке можно выразить зависимостью.

$$\Delta u_{cp} = \frac{0,5\delta_0(Q_1 - Q_2) - aj^{\frac{1}{k}}(Q_1 + Q_2)}{B \left[ (0,5\delta_0)^2 - (aj^{\frac{1}{k}})^2 \right]},$$

представить двумя зонами  $l_1$  и  $l_2$  (рис. 2). Причиной появления зоны  $l_1$  или так называемого геометрического начального участка, является различие объемных реофизических характеристик спутных потоков.

При этом, определяющую роль на размеры такого участка оказывает величина соотношения расходов в слоях, условия их встречи, геометрические особенности внутренней поверхности формирующего поток насадка.

Пограничная линия потоков жидкости на геометрическом начальном участке  $l_1$  представляет собой (при  $Re_1 \neq Re_2$ ) кривую, которая может быть описана показательной функцией, а именно

$$x = ay^{1/k}, \tag{1}$$

где

$$k = \frac{\ln[c(Re_1 + Re_2)\delta_0]}{\lg \left\{ 0,5\delta_0 - \frac{Q_1 u_{2cp} \delta_0}{Q_2 u_{1cp} + Q_1 u_{2cp}} \right\}} \tag{2}$$

где  $x = 0,5(\delta_0 \pm \delta_i)$ - текущее расстояние между осью симметрии канала и линией контакта слоёв;  
 $a$  - безразмерный коэффициент;  $y$  - изменяющаяся координата по длине начального участка ( $y_{max} = l_1$ ).

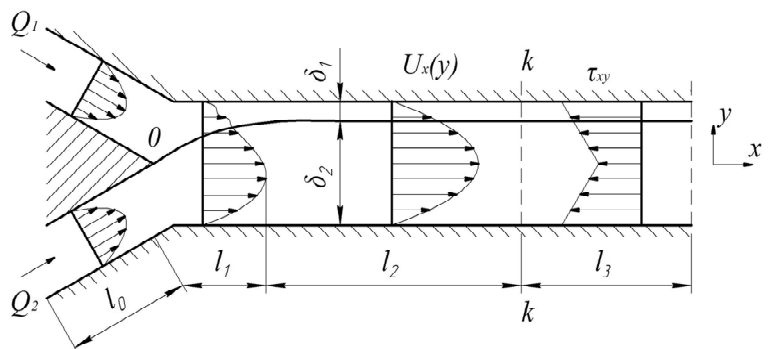


Рис. 2. Схема течения вязкой жидкости в формирующем струю насадке

следовательно  $\Delta u_{\max} = \frac{Q_1 - Q_2}{0,5h_0B}$  - максимальное значение, а  $\Delta u_{\min}$  минимальное значение, которое соответствует сечению, находящемуся на расстоянии  $l$  от сечения встречи потоков.

Выбирая систему координат, как показано на рис. 2, для каждого из движущихся слоёв можно записать соответствующую систему уравнений:

$$\rho \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \rho a_x + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}; \quad \rho \left( u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = \rho a_y + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$$

и уравнение неразрывности  $div \vec{u} = 0$ .

Граничные условия для каждого из слоёв будут различными, однако, общим будет условия на границе контакта слоёв. Введя соответствующую безразмерную координату по  $y$ , то есть  $\eta = y/\delta(x)$  и воспользовавшись методикой решения уравнения, приведенной в работе [5], для  $u_x(\eta)$  каждого слоя можно получить

$$u_x(\eta) = C_1(x)\eta + C_2(x)\eta^2 + C_3(x)\eta^3 + \dots$$

Проверка на сходимость данного ряда показала, что для рассматриваемого случая можно ограничиться первыми тремя членами. На границе контакта слоёв  $\tau_k = \mu \left( \frac{du_x}{dy} \right)_{y=\delta(x)}$ , то есть  $\tau_k = f(x)$ . В соответствии с

методикой [3] можно получить следующий результат для  $u_x(x, y)$ , а именно

$$u_x(x, y) = \frac{y}{5} \left[ \frac{12Q}{B(\delta_0 - ax^{1/k})^2} - \frac{\tau_k(x)}{\mu} - \frac{\lambda \rho u_{cp}^2 (\delta_0 - ax^{1/k})}{3\delta_0 \mu} \right] + y^2 \frac{\lambda \rho u_{cp}^2}{4\delta_0 \mu} + \frac{2}{5} \left( \frac{y}{\delta_0 - ax^{1/k}} \right)^3 \left[ \frac{\tau_k(x)}{\mu} \left( \delta_0 - ax^{1/k} \right) - \frac{2Q}{B(\delta_0 - ax^{1/k})} - \frac{\lambda \rho u_{cp}^2 (\delta_0 - ax^{1/k})^2}{3\delta_0 \mu} \right]$$

Величина  $u_y$  определяется на основании уравнения неразрывности среды.

Используя приведенное ранее уравнение движения, можно провести анализ течения и на участке  $l_2$ . В этом случае расход жидкости  $Q_1$  и  $Q_2$  в слоях шириной  $\delta_1$  и  $\delta_2$  будет равен:

$$Q_1 = \int_0^{\delta_1} u_x(x, y) dy; \quad Q_2 = \int_{h_1}^{\delta_1 + \delta_2} u_x(x, y) dy$$

или

$$Q = Q_1 + Q_2 = \int_0^{\delta_1} u_x(x, y) dy + \int_{\delta_1}^{\delta_1 + \delta_2} u_x(x, y) dy.$$

К удовлетворительным результатам приводят расчёты параметров потока по методике, описанной Г. Шлихтингом, на основании которой для  $u_x$  можно получить, что

$$u_x = u_{cp} \left\{ \left[ C_0 \left( \frac{u_{cp} \rho}{\mu \delta_0} \right)^{0,5} y - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{\mu u_{cp}} \right] + \left( \frac{x}{\delta_0} + a_0 \right)^{-1} C_1 \left( \frac{u_{cp}}{\nu \delta_0} \right)^{0,5} y + \left( \frac{x}{\delta_0} + a_0 \right)^{-2} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{u_{cp}}{\nu^3 \delta_0} \right)^{0,5} C_1 y^5 - \right. \right. \\ \left. \left. - C_0 C_1 \left( \frac{u_{cp}}{\nu \delta_0} \right)^2 \frac{y^4}{12} + C_2 \left( \frac{u_{cp}}{\nu \delta_0} \right)^{0,5} y \right] + \left( \frac{x}{\delta_0} + a_0 \right)^{-3} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{u_{cp}}{\nu^5 \delta_0^3} \right)^{0,5} C_2 y^5 - (C_1^2 - 2C_0 C_2) \left( \frac{u_{cp}}{\nu \delta_0} \right)^2 \frac{y^4}{12} + C_3 \left( \frac{u_{cp} \rho}{\mu \delta_0} \right)^{0,5} y \right] + \right. \\ \left. + \left( \frac{x}{\delta_0} + a_0 \right)^{-4} \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \left( \frac{u_{cp}}{\nu^5 \delta_0^3} \right)^{0,5} C_2 y^5 - (C_0 C_3 - C_1 C_2) \left( \frac{u_{cp}}{\nu \delta_0} \right)^2 \frac{y^4}{4} + \left( \frac{x}{\delta_0} + a_0 \right)^{-5} \left[ - \left( \frac{u_{cp}}{\nu \delta_0} \right)^2 \frac{y^4}{4} (C_2^2 - 2C_1 C_3) \right] \right] \right\}$$

где  $C_0, C_1, C_2, C_3, a$  - некоторые константы, определяемые из краевых условий, в том числе и условия на границе контакта слоёв. Если на входе в участок  $l_2$  величина  $u_k(x)$  является некоторой фиктивной величиной, то в конце участка  $l_2$  (область стабилизированного течения)  $u_k^{cm}$  будет равно

$$u_k^{cm} = \frac{2Q_1 [\delta_2^2 - (\delta_0 - 2\delta_1)^2]}{B \left\{ 2\delta_0^2 \delta_1 + \frac{1}{3} [(\delta_0 - 2\delta_1)^3 - \delta_0^3] \right\}}.$$

Следовательно, в процессе течения жидкости в слоях происходит изменения скорости контакта от  $u_k^{ex}$  до  $u_k^{cm}$ . Это изменение может быть представлено, как показал эксперимент, в виде следующей зависимости (рис.3) для двухслойного потока. Следует так же отметить, что на положение в потоке точки расположения максимальной скорости и скорости контакта слоёв влияет ряд факторов, среди которых величины  $\frac{Q_1}{Q_2}, \frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{\delta_0}{\delta_1}$  и  $\frac{\delta_0}{\delta_2}$ .

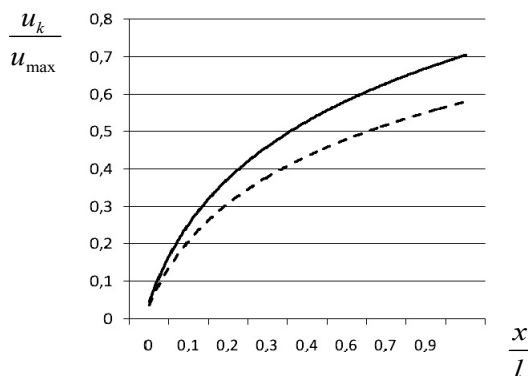


Рис. 3. Зависимость скорости на линии контакта слоёв от величины  $x/l$  для двух жидкостей отличающихся между собой величиной вязкости при различных соотношениях расходов  $Q_1/Q_2$

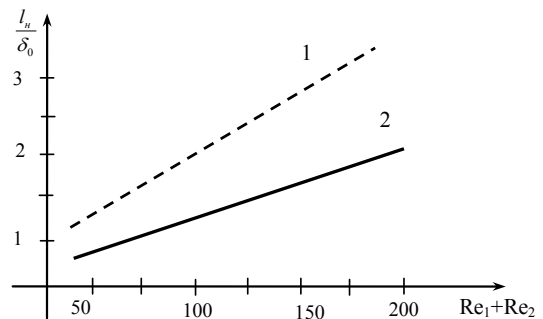


Рис. 4. Зависимость безразмерной длины геометрии начального участка от числа  $Re$  при двухкаскадном течении: 1-воды (---); 2- водного раствора глицерина(-)

Анализ кинематических характеристик потока в слоях  $\delta_1$  и  $\delta_2$  на участке  $l_2$  даёт возможность определить его длину. Для этого можно воспользоваться, описанным в работе [6], графоаналитическим методом. Достоинством этого метода является возможность учета распределения скоростей в начале зоны дестабилизированного течения, где форма эпюры скоростей, как в первом, так и во втором слое зависит от ряда факторов, в том числе и  $\frac{Q_1}{Q_2}, \frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{\delta_0}{\delta_1}$  и  $\frac{\delta_0}{\delta_2}$ . Как, показал эксперимент, проведенный на стенде,

сконструированном к.т.н. Ануфриевым В.А. (рис. 4), за счет взаимодействия слоёв происходит стабилизация потока одновременно в каждом из них.

Поэтому представилась возможность производить обработку экспериментальных данных в виде зависимости  $Z = Z(Re_1, Re_2)$ . На рис. 4 представлена такая зависимость.

На основании анализа экспериментальных данных можно рекомендовать для ньютоновских жидкостей формулы  $l_{н.у.} = (l_1 + l_2) = 0,018(Re_1 + Re_2)^{1,2} \delta_0$ .

Для сопоставления с данными результатами были проведены экспериментальные исследования длины гидродинамического начального участка в том же канале только при однослойном течении жидкости. Опыты показали, что для воды величины  $l_{н.у.}$  при прочих равных условиях ( $\mu, \delta, \rho$ ) равна  $l_{н.у.} = 0,0147 Re^{1,2} \delta_0$ , что близко к результатам, полученным Л. Шиллером, С.М. Таргом и др.

Таким образом, увеличение длины начального участка при двухслойном течении осуществляется в среднем на величину, составляющую 18,5%, то есть  $l_{н.у.} = 0,0033 Re^{1,2} \delta_0$ .

Следовательно, взаимодействие потока связано с особенностями течения в области встречи и взаимодействия слоёв жидкости, что и приводит к увеличению величины  $l_{н.у.}$ .

Кроме того, для ньютоновских жидкостей абсолютная величина  $l_2$  оказалась меньше  $l_1$ , что позволяет заключить, что основное формирование полей скоростей и напряжений в потоке все же происходит на

геометрическом начальном участке. Опыты по определению величины  $l_1$  для ньютоновских жидкостей, описываемых степенным реологическим законом Освальда де Вилля, показали, что величина  $l_1$  равна  $l_1 = 0,74 \text{Re}_\Sigma^{0,33} \delta_0$ .

В заключении следует отметить, что величины  $l_1, l_2$  подвергаются некоторой корректировке, когда одна из поверхностей канала является профилированной и описывается функцией  $y = f(x)$  (например, синусоида). Если величина угла встречи потоков находится в диапазоне  $10^\circ \leq \alpha \leq 30^\circ$ , определено, что при  $(\delta_2)_{cp} > \delta_1$

$$l_n = 0,018\delta_0(\text{Re}_1 + \text{Re}_2)^{1,2}(1 + \delta^*)^{\frac{\ln \frac{\delta_2}{\delta_1}}{\delta_1}},$$

а при  $(\delta_2)_{cp} < \delta_1$

$$l_n = 0,027\delta_0(\text{Re}_1 + \text{Re}_2)^{1,2}(1 + \delta^*)^{\frac{\ln \frac{\delta_2}{\delta_1}}{\delta_1}} + k_0,$$

где  $k_0$  - параметр, в рассматриваемом случае равный 2,6;  $\delta^* = \frac{[f(x)]_{\max}}{\delta_2}$ .

При течении между параллельными стенками канала на границе раздела слоёв при достаточно низких значениях числа  $\text{Re} < \text{Re}_{кр}$  и угле встречи потоков  $\alpha > 30^\circ \div 35^\circ$  форма границы раздела характеризуется "слабой извилистостью". Такая "извилистость" может быть регулярной. В зависимости от величины  $\delta(x)$ , на эту "извилистость" могут накладываться возмущения, возникающие в слое, а также связанные с наличием профилированной или шероховатой поверхностей. Граница раздела слоёв принимает чётко выраженную форму, близкую к форме, описываемой функцией  $f(x)$  при условии, что  $\delta^*$  не превышает величины  $0,13 \dots 0,15$ , то есть  $\frac{[f(x)]_{\max}}{h_2} \leq 0,13 \div 0,15$ .

Следует отметить, что характер течения жидкости на границе раздела слоёв в области её двухмерного течения может оказать существенное влияние на структуру поверхности жидкости вне пределов насадка. Это влияние наблюдалось нами при соотношении толщин  $\frac{\delta_1}{\delta_2} > 8 \dots 10$ .

### Выводы

По результатам проведенных экспериментальных и теоретических исследований можно заключить, что:

- основное формирование полей скоростей и напряжений в потоке происходит на геометрическом начальном участке  $l_{н.у.}$ ;

- для воды величина  $l_{н.у.}$  при прочих равных условиях ( $\mu, \delta, \rho$ ), равна  $l_{н.у.} = 0,0147 \text{Re}^{1,2} \delta_0$ , что близко к результатам, полученным Л. Шиллером, С.М. Таргом и др.;

- увеличение длины начального участка при двухслойном течении осуществляется в среднем на величину, составляющую 18,5%, то есть  $l_{н.у.} = 0,0033 \text{Re}^{1,2} \delta_0$ ;

- взаимодействие потока связано с особенностями течения в области встречи и взаимодействия слоёв жидкости, что и приводит к увеличению величины  $l_n$ ;

- характер течения жидкости на границе раздела слоёв в области её двухмерного течения может оказать существенное влияние на структуру поверхности жидкости вне пределов насадка при соотношении толщин  $\frac{\delta_1}{\delta_2} > 8 \dots 10$ ;

- на основании анализа экспериментальных данных можно рекомендовать для ньютоновских жидкостей формулу  $l_{н.у.} = (l_1 + l_2) = 0,018(\text{Re}_1 + \text{Re}_2)^{1,2} \delta_0$ .

**Анотація.** Проведено експериментальні та теоретичні дослідження течії в'язких ньютонівських рідин на початковій ділянці двошарового струминного потоку. Виявлено закономірності зміни швидкості контакту в процесі течії рідини в шарах. Визначено чинники, які суттєво впливають на структуру поверхні рідини поза межами насадка. Отримані емпіричні залежності дозволяють визначити довжини гідродинамічної і геометричної початкових ділянок.

**Ключові слова:** багатошарові, нестабілізований, насадок, початкова ділянка

**Abstract.** *The subject of study presented in this paper is a flow of a viscous fluid in forming tool for multilayer jet production.*

*The purpose of this work is to carry out experimental and theoretical studies of initial part of a two-layer jet stream of viscous Newtonian fluids. The methodology and main results of work. On the basis of the results of experimental studies which carried out by authors was found that flows of two-layer jet stream of viscous Newtonian fluids in nozzles are unstabilized and consisted of a number of zones such as: a) zone of separated flow with area of unstabilized flow with changing hydraulic section  $l_1$ ; b) zone of unstabilized flow with constant hydraulic section  $l_2$ ; c) zone of stabilized flow with constant ratio of layers  $l_3$ . The equation of motion which takes possibility to analyze a fluid flow in zone  $l_2$  is given. For satisfactory results leads calculation of flow parameters by the method described by H. Schlichting on the basis of which the value of  $u_x$  was determined, and proved that in process of liquid flow speed of contact in layers is changed from  $u_k^{ex}$  to  $u_k^{cm}$ . Using graphic-analytical method described in [6] length of zone  $l_2$  was evaluated based on the analysis of flow kinematic characteristics in layers  $\delta_1$  and  $\delta_2$ .*

**Conclusions.** *Obtained results of experimental and theoretical studies proves that:*

- *The basic formation of the velocity field and the flow stress is on the geometric initial section;*

- *For water the value of  $l_{n.y.}$  with other equal conditions ( $\mu, \delta, \rho$ ) is  $l_{n.y.} = 0,0147 Re^{1,2} \delta_0$  which is close to the results obtained by L. Schiller, S. Targ and others;*

- *Average increase of the initial segment length in two-layer flow is about of 18.5%, that is  $l_{n.y.} = 0,0033 Re^{1,2} \delta_0$ ;*

- *The interaction of jet flow connected with features of the flow in area of contact of liquid layers and it leads to increase of a value of parameter  $l_n$ ;*

- *The nature of the fluid flow at the interface between the layers in area of its two-dimensional flow can have a significant impact on the structure of the surface of the liquid surface outside the nozzle when ratio of thickness  $\frac{\delta_1}{\delta_2} > 8...10$ ;*

- *On the basis of experimental data can be recommended for Newtonian fluids formula  $l_{n.y.} = (l_1 + l_2) = 0,018(Re_1 + Re_2)^{1,2} \delta_0$ .*

**Key words:** *multi-layered, unsteady-state, nasadok, initial area*

1. Семинская Н.В., Яхно Б.О. Влияние геометрических и прочностных параметров струеформирующих устройств на компактность струи // Вісник Східноукраїнського національного університету імені В. Даля. – 2007. – №3 (109). – Ч.2. – С.143-148.
2. Яхно О.М., Савченко Н.В. Гідравлічні принципи струминеви методів різання матеріалів // Процеси механічної обробки в машинобудуванні – Ж.: ЖДТУ, 2005. – Вип. 1. – С. 250 – 259
3. Ануфриев В.А. О характере двухслойного течения расплавов полимеров / В.А. Ануфриев, О.М. Яхно, А.Д. Петухов // Материалы Всесоюзного симпозиума по реологии. Сборник Реология полимерных и дисперсных систем, реофизика. Ч.1 - Минск. - 1975. – С. 218-228
4. Фридман М.Л. Двухслойные течения расплавов полимеров в кольцевых головка экструдеров / М.Л. Фридман, А.Н. Малкин, В.И. Власов // Пластические массы – 1975. - № 3. – С.29-32.
5. Яхно О.М. Поле скоростей на ламинарном входном участке течения плёнки вязких жидкостей при их распределении по орашаемому периметру/ О.М. Яхно, Е.Г. Воронцов // Химическое машиностроение. - Киев - Техника, №21.- 1996. — С. 90-104.
6. Воронцов Е.Г., Яхно О.М. Длина начального участка орошаемых плёнок. Сборник Гидромеханика АН УССР, №38, 1988.- С. 97-104.

## REFERENCES

1. Semynskaja N.V., Jahno B.O. Vlyjanye geometrycheskyh y prochnostnyh parametrov strueformirujushhyh ustrojstv na kompaktnost' struy [Influence of geometric and strength parameters strueformiruyuschih devices on a jet], Visnyk Shidnoukrai'ns'kogo nacional'nogo universytetu imeni V. Dalja, 2007, no 109, Ch.2, p.p.143-148.
2. Jahno O.M., Savchenko N.V. Gidravlichni pryncypy strumynevyh metodiv rizannja materialiv [Hydraulic principles strumynevyh methods of cutting materials]. Procesy mehanichnoi' obrobky v mashynobuduvanni. Zh.: ZhDTU, 2005, Vyp. 1. p.p. 250 - 259
3. Anufriev V.A., Jahno O.M., Petuhov A.D.. O haraktere dvuhslojnogo techenija rasplavov polimerov [The nature of the two-layer flow of polymer melts], [Materialy Vsesojuznogo simpoziuma po reologii. Sbornik Reologija polimernyh i dispersnyh sistem, reofizika. no.1, Minsk, 1975, p.p. 218-228
4. Fridman M.L., Malkin A.N., Vlasov V.I. Dvuhslojnye techenija rasplavov polimerov v kol'cevyh golovka jekstruderov. [Two-layer flow of polymer melts in circular die]. Plasticheskie massy 1975, no 3. p.p. 29-32.
5. Jahno O.M., Voroncov E.G. Pole skorostej na laminamom vhodnom uchastke techenija pljonki vjazkih zhidkostej pri ih raspredelenii po orashaemomu perimetru [Velocity field at the entrance of a laminar film flow of viscous fluids at their distribution on the perimeter orashaemomu], Himicheskoe mashinostroenie. Kiev, Tehnika, no 21, 1976, p.p.90-104.
6. Voroncov E.G., Jahno O.M. Dlina nachal'nogo uchastka oroshaemyh pljonok [The length of the initial part of the irrigated films] Sbornik Gidromehanika AN USSR, no38, 1978., p.p. 97-104.