

АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИ ВЕЛИКИХ ПРУЖНО- ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЯХ ТА З УРАХУВАННЯМ ПОШКОДЖЕНОСТІ СТРУКТУРИ МАТЕРІАЛУ. ПОВІДОМЛЕННЯ 1. ЛОГАРИФМІЧНІ ДЕФОРМАЦІЇ

Rudakov K., Sydorenko I.
The National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine (mmi@kpi.ua)

ALGORITHMS OF THE DECISION OF PROBLEMS WITH BOUNDARY CONDITIONS, WITH APPLICATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD AT THE LARGE ELASTOPLASTIC STRAINS AND TAKING INTO ACCOUNT DAMAGES STRUCTURE. MESSAGE 1. LOGARITHMIC STRAINS

Пропонується цикл повідомлень про алгоритми МСЕ для розв'язування крайових задач з урахуванням великих деформацій та пошкоджуваності матеріалу. В цьому повідомленні розглянуті деякі практичні питання, пов'язані з застосуванням логарифмічних деформацій: лівий та правий розклад матриці градієнтів руху Коші-Гріна, визначення головних напрямків й значень деформацій, спряжені тензори напружень. Докладно описано алгоритм знаходження власних чисел і векторів матриці з компонентами тензора руху Коші-Гріна (алгоритм полярної декомпозиції). На чисельному прикладі проілюстровані матриці лівого та правого розкладу. Наведена схема початкового, проміжного й поточного стану елементарного об'єму матеріалу при лівому й правому розкладах.

Ключові слова: великі деформації, логарифмічні деформації, полярна декомпозиція, тензори напружень.

Вступ

Для проведення чисельного розрахунку поведінки медичних стентів, що встановлюються в кров'яні судини людини, необхідно мати математичні алгоритми, які дозволяють моделювати великі пружно-пластичні деформації з урахуванням пошкоджуваності матеріалу. Із літератури відомі декілька варіантів скінченно-елементних алгоритмів, за допомогою яких можна відтворити великі пружно-пластичні деформації різноманітних конструкцій, однак жоден з них не відповідає розглянутій проблемі в повній мірі. Наприклад, в роботі [1] запропонована модель, яка базується на логарифмічних деформаціях Генкі (H. Hencky, 1885-1951р.р.). Потім ця модель була розвинена у роботах [2, 3] та реалізована в програмному комплексі ADINA. Близьку по суті модель запропоновано в [4]. Однак ці моделі не дозволяють враховувати вплив пошкоджуваності матеріалу на ступінь деформування стентів. Модель пружно-пластичного матеріалу з пошкоджуваністю і великими деформаціями опубліковано в [5]. Але вона не має практичної реалізації.

В даній серії повідомлень описується скінченно-елементний алгоритм, який є модифікованою версією моделей [1, 3, 5] та адаптований для оцінки НДС медичних стентів. В даному повідомленні описані особливості використання в цьому алгоритмі логарифмічних деформацій і розглядаються питання їх практичного визначення. Для спрощення записів вважається, що всі деформації є пружними (не пишемо верхній індекс e).

Полярна декомпозиція матриці градієнтів руху Коші-Гріна

Логарифмічні деформації Генкі визначають в головних осях деформації (тріадах Лагранжа). Для їх знаходження використовується теорема Коші про полярну декомпозицію [6], згідно якої матрицю з компонентами тензора градієнтів руху Коші-Гріна $[X]$, для якої завжди $\det[X] > 0$, можемо однозначно розкласти на матрицю $[R]$ жорсткого повороту елементарного об'єму тіла і симетричну ліву $[V]$ або праву $[U]$, матрицю його чистої деформації (при відсутності жорсткого повороту матриця $[R]$ є одиничною):

$$[X] = [V][R] = [R][U] . \quad (1)$$

При цьому, після знаходження матриці $[\Theta] = [X][X]^T = [V][V]^T$ або $[C] = [X]^T[X] = [U]^T[U]$, з системи $[\Theta]\{W_L\} = \{W_L\}[\lambda]$ або $[C]\{W_R\} = \{W_R\}[\lambda]$ знаходять діагональну матрицю їх власних значень $[\lambda]$ і матриці власних векторів $[W_L]$ або $[W_R]$ відповідно. Матриці $[\Theta]$ і $[C]$ мають однакові власні числа, оскільки мають однакову основу (матрицю $[X]$), тому не має значення, яку з них використовувати для визначення $[\lambda]$. Доведено, що всі компоненти $\lambda_i \geq 0$.

З допомогою величин λ_i можемо зібрати діагональну матрицю (матрицю "витягування" (stretch)). Позначимо її як $[U]$, з діагональними компонентами:

$$[U] = [\lambda]^{1/2}; \quad u_i = \sqrt{\lambda_i}. \quad (2)$$

Тепер після знаходження матриці $[U]$ та використовуючи матриці власних векторів $[W_L]$ і $[W_R]$ ми можемо отримати симетричні ліву та праву матриці $[V]$, $[U]$ та матрицю жорсткого повороту $[R]$:

$$[V] = [W_L][U][W_L]^T; \quad (3-а)$$

$$[U] = [W_R][U][W_R]^T; \quad (3-б)$$

$$[R] = [X][U]^{-1} = [V]^{-1}[X]. \quad (3-в)$$

В свою чергу матриці $[C]$ та $[\Theta]$ складаються з компонент:

$$C_{ij} = \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j = X_{mi} \vec{e}_m \cdot X_{nj} \vec{e}_n = X_{mi} \vec{e}_m \cdot \vec{e}_n X_{nj} = X_{mi} \delta_{mn} X_{nj} = X_{mi} X_{mj}; \quad \Theta_{ij} = X_{im} X_{jm}, \quad (4)$$

де:

$$X_{mi} = \nabla_i x^m = \partial x^m / \partial a^i = \delta_{mi} + \nabla_i u^m; \quad (5)$$

$x^m = x^m(a^j, t)$ – поточні та $x^m(a^j, 0) = a^m$ – початкові координати точки; \vec{e}_i – початковий базис; \vec{E}_i – поточний базис; $m, j, i = 1, 2, 3$.

Якщо помножити (1) на $[R]^T$ з правої сторони, то отримаємо, що $[R][U][R]^T = [V][R][R]^T = [V]$, тобто

$$[V] = [R][U][R]^T. \quad (6)$$

З умови $\det[R] = 1$, формул (1), (6) та $[C] = [X]^T[X] = [U]^T[U]$ будемо мати, що:

$$J = \det[X] = \det[U] = \det[V] = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}. \quad (7)$$

Якщо підставити (3.1) та (3.2) в (6), то отримаємо

$$[V] = [W_L][U][W_L]^T = [R][U][R]^T = [R][W_R][U][W_R]^T [R]^T = [R]_E [U] [R]_E^T,$$

де введено позначення:

$$[R]_E = [R][W_R] = [W_L]. \quad (8)$$

Саме матриця $[R]_E = [R][W_R] = [W_L]$ включає в себе значення *направляючих косинусів* орієнтації головних осей деформації (тріад Лагранжа) *поточного* стану елемента об'єму відносно основної (нерухомої) системи координат. А матриця $[W_R]$ характеризує *проміжний* стан, в якому головні осі деформації мають іншу орієнтацію (див. приклади). Тому, якщо необхідно зобразити або проаналізувати поточний стан елемента, необхідно використовувати матрицю $[R]_E = [W_L]$ з (8), а не $[W_R]$.

Логарифмічні деформації Генкі

Якщо прийняти, що під час деформування волокна матеріалу довжиною s_0 напрямком деформації не змінюється, то "дійсню" подовжню деформацію волокна можемо визначити [7] як

$$\epsilon_H = \int_{s_0}^s \frac{dl}{l} = \ln \left(\frac{s}{s_0} \right) = \ln \left(\frac{s_0 + \Delta s}{s_0} \right) = \ln(1 + \epsilon), \quad (9)$$

де $\epsilon = \Delta s / s_0$ – "умовна" деформація.

Формулою (9) вводяться логарифмічні деформації Генкі для волокна матеріалу. Оскільки для кутових деформацій виразів для деформацій Генкі не існує, то спочатку деформації Генкі визначають в головних осях деформації, їх значення розміщують в діагональну матрицю $[\Delta]_H$ (тут і нижче підкреслюються головні компоненти). Три шукані компоненти логарифмічних деформацій Генкі $(\underline{\epsilon}_i)_H$ можна знайти як:

$$(\underline{\epsilon}_i)_H = (\Delta_{ii})_H = \ln \sqrt{\lambda_i} = \ln(1 + \underline{\epsilon}_i); \quad i = 1, 2, 3, \quad (10)$$

де $\underline{\epsilon}_i = \sqrt{\lambda_i} - 1$; $i = 1, 2, 3$ – компоненти головних "умовних" деформацій.

Пояснимо формулу (10). При одновісному розтягу вздовж першої осі перші компоненти матриць $[X]$ та $[C]$ визначають як $X_{11} = 1 + \varepsilon_{11}$ та $C_{11} = \lambda_1 = (X_{11})^2 = (1 + \varepsilon_{11})^2 = 1 + 2\varepsilon_{11} + (\varepsilon_{11})^2$ відповідно [8]. Тому значення компоненти деформації Гріна-Лагранжа матиме вигляд: $\varepsilon_{11} = 0.5(C_{11} - 1) = 0.5(1 + 2\varepsilon_{11} + (\varepsilon_{11})^2 - 1) = \varepsilon_{11} + 0.5(\varepsilon_{11})^2$, а наближене ("умовна" деформація) $\varepsilon_{11} \approx \varepsilon_{11}$. Також маємо: $1 + \varepsilon_{11} = \sqrt{\lambda_1}$, тому $\underline{\Delta}_{11} = (\underline{\varepsilon}_1)_H = \ln(1 + \varepsilon_{11}) = \ln \sqrt{\lambda_1}$.

При переході до базової системи координат отримують компоненти лівого та правого тензора деформації Генкі, якщо використовують відповідно: симетричну матрицю $[W_L]$, яка відображає положення головних осей деформацій (тріад Лагранжа) по відношенню до базової (нерухомої) системи координат, або симетричну матрицю $[W_R]$:

$$([\varepsilon]_H)_L = [W_L]^T [\underline{\Delta}]_H [W_L]; \quad ([\varepsilon]_H)_R = [W_R] [\underline{\Delta}]_H [W_R]^T. \quad (11)$$

Для підкреслення факту використання деформації Генкі, в літературі часто записують замість формул (11) їх *мнемонічні* записи:

$$([\varepsilon]_H) = \ln[\varepsilon]; \quad ([\varepsilon]_H)_L = [W_L]^T [\ln U] [W_L]; \quad ([\varepsilon]_H)_R = [W_R] [\ln U] [W_R]^T. \quad (12)$$

Теоретичні основи використання логарифмічної деформації Генкі при великих деформаціях відображені у низці публікацій, наприклад [9]. Але практична сторона визначення компонент логарифмічних деформацій звичайно залишається поза увагою.

Алгоритм визначення власних значень $[\lambda]$ і матриць $[W]$ з матриці $[C]$

Відомо [10], що задача знаходження власних значень матриці $[C]$ еквівалентна задачі знаходження коренів рівняння $\det[C] = 0$. Так як симетрична матриця $[C]$ має розмірність 3×3 , то замість звичайних алгоритмів знаходження власних значень матриці ми можемо використовувати аналітичний розв'язок цієї проблеми, який застосовується зазвичай для знаходження головних напружень [11]. Однак цей варіант в реалізації має деякі нюанси, які викладені нижче.

Спочатку необхідно оцінити матрицю $[C]$ на близькість до діагональної. Якщо сума квадратів її недиагональних членів близька до нуля, то матрицю $[C]$ маємо право вважати діагональною. Тоді її власні значення рівні діагональним членам, а матриця власних векторів $[W_R]$ є одиничною матрицею.

В протилежному випадку необхідно проводити додаткові обчислення. Алгоритм знаходження власних значень $\lambda_i \geq 0$; $i = 1, 2, 3$ такої матриці містить послідовність наведених нижче виразів:

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{0.5[(C_{11} - C_{22})^2 + (C_{22} - C_{33})^2 + (C_{33} - C_{11})^2] + 3(C_{12}^2 + C_{23}^2 + C_{31}^2)}; \\ S_1 &= C_{11} - \phi; \quad S_2 = C_{22} - \phi; \quad S_3 = C_{33} - \phi; \\ \phi &= (C_{11} + C_{22} + C_{33})/3; \quad \chi = S_1 S_2 S_3 - S_1 C_{23}^2 - S_2 C_{31}^2 - S_3 C_{12}^2 + 2C_{12} C_{23} C_{31}. \end{aligned}$$

Власні значення $\lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$:

$$\lambda_1 = \phi + (2/3)\omega \cos(\psi); \quad \lambda_2 = \phi + (2/3)\omega \cos(\psi + 4\pi/3); \quad \lambda_3 = \phi + (2/3)\omega \cos(\psi + 2\pi/3), \quad (13)$$

де

$$\psi = \arccos(\xi)/3;$$

а для обчислення величини ξ застосовується наступна процедура: якщо $\omega < \delta$, де δ є малим числом, наприклад, $\delta = 10^{-20}$, то назначається $\xi = 1$. Інакше застосовується вираз $\xi = 27\chi / (2\omega^3)$.

Якщо в результаті розрахунків отримали $\xi > 1$, то назначається $\xi = 1$, а якщо $\xi < -1$, то використовується $\xi = -1$. Тим самим забезпечується умова $|\xi| \leq 1$, необхідна для правильного обчислення на ПЕОМ значення $\arccos(\xi)$.

Оскільки $[U] = [\lambda]^{1/2}$, то діагональні члени \underline{u}_i , $i = 1, 2, 3$ матриці $[U]$, необхідної для обчислення $[U]$ а потім $[R] = [X][U]^{-1}$, знаходяться як $\underline{u}_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Матриця власних векторів $[W_R]$ складається з трьох власних векторів (стовбців) $(\{w\}_i)_R$ матриці $[C]$, кожен з яких відповідає власному значенню λ_i .

Власні вектори $(\{w\}_i)_R$ матриці $[C]$ визначаються [10] з частини системи $([C] - [\lambda_i])(\{w\}_i)_R = \{0\}$, де діагональна матриця $[\lambda_i]$ містить на діагоналі однакові значення, рівні λ_i . Важливо, щоб спочатку власний

вектор мав одиницю теж на i -й позиції. Це досягається простим попереднім призначенням. Система $([C]-[\lambda]_i)(\{w_i\}_R = \{0\})$ вироджена, тому з неї вилучається i -ий рядок, а з залишків знаходяться інші компоненти i -го власного вектора. Після знаходження кожний власний вектор $(\{w_i\}_R)$ необхідно обов'язково нормувати: спочатку з компонент w_k вектора треба знайти значення $w = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$, потім кожному компоненту $(\{w_i\}_R)$ розділити на величину w .

Але все це робиться лише тоді, коли матриця $[C]$ не вироджена ні по одному з власних векторів. Тому спочатку матрицю $[C]$ необхідно перевірити на часткове виродження: оцінюється сума квадратів недиагональних членів j -го стовпця (або рядка), $j = 1, 2, 3$.

Якщо j -я сума практично дорівнює нулю або нуль, то це означає, що дане направлення деформацій є одним з головних. Усі недиагональні члени j -го стовпця та j -го рядка матриці власних векторів потрібно закласти рівними нулю. Із системи $([C]-[\lambda]_i)(\{w_i\}_R = \{0\})$, $i = 1, 2, 3$, вилучається j -ий рядок і j -ий стовпчик, а із залишків (розмірністю 2×2) системи вираховуються компоненти матриці власних векторів, які залишилися: спочатку одна з компонент прирівнюється до одиниці, потім з системи 2×2 знаходиться друга, після чого вони нормуються, і більша за номіналом назначається діагональній компоненті матриці власних векторів, а менша – компоненті, яка залишилася. Тут виявляється, що з точністю до знаку недиагональних компонент, останні 4 компоненти попарно рівні (наслідок ортогональності цих двох власних векторів).

Якщо два власних значення матриці $[C]$ однакові, то тільки третє направлення знайдено однозначно, а інші два – з точністю до кута повороту елемента тіла відносно третього направлення. Якщо всі три власні значення матриці $[C]$ однакові, то така матриця є представником так званого шарового тензора, для якого всі напрямки рівнозначні.

Для перевірки можемо використовувати формули (1) і (3), а саме $[X] = [R][U] = [R][W_R][U][W_R]^T$, а також використати наступні властивості матриці власних векторів: $[W][W]^T = [I]$, що означатиме їх взаємну ортогональність і нормування.

Тензор напружень для використання тензора логарифмічних деформацій Генкі

Отже, після знаходження власних частот матриці $[C]$ (або $[\Theta]$) формули (10) дозволяють отримати компоненти логарифмічних деформацій Генкі.

Але тензор логарифмічних деформацій Генкі є допоміжним тензором, який використовується в алгоритмі лише для обчислення актуальних значень напружень в точці тіла через фізичні рівняння. Так як матриця $[\underline{\Delta}]_H$ фактично містить компоненти тензора головних деформацій (тут – тільки пружних), то їй повинна відповідати матриця з компонентами тензора головних напружень. Доведено, що це – матриця $[\underline{\tau}] = J[\underline{\Sigma}]$ з компонентами тензора напружень Нолла [12]. Тут матриця $[\underline{\Sigma}]$ містить в собі головні компоненти тензора "напружень Ейлера-Коші з виключеним поворотом". Інакше матрицю $[\underline{\tau}]$ називають матрицею з головними компонентами тензора "напружень Кірхгофа з виключеним поворотом". Величина J відповідає (7).

Компоненти $[\underline{\Sigma}]$ та компоненти тензора напружень Ейлера-Коші у вихідному базисі $[\sigma]$ зв'язані через матрицю $[W_L]$ формулою:

$$[\underline{\Sigma}] = [W_L][\sigma][W_L]^T. \quad (14)$$

Компоненти $[\underline{\tau}] = J[\underline{\Sigma}]$ обчислюються з використанням формул теорії пружності і пластичності на основі компонент тензора логарифмічних деформацій Генкі $[\underline{\epsilon}]_H$, отриманих відповідно виразу (10). Після цього потрібно повернутися до вихідного базису. З (14):

$$[\sigma] = [W_L]^{-T}[\underline{\Sigma}][W_L]^{-1}. \quad (15)$$

Оскільки матриці $[\sigma]$ і $[\underline{\Sigma}]$ конгруентні, а матриця $[\underline{\Sigma}]$ – симетрична, то і матриця $[\sigma]$ – симетрична. Щоб отримати компоненти другого тензору напружень Піола-Кірхгофа $[\sigma]_0$, з яким енергетично сполучений правий тензор деформацій Гріна-Лагранжа $[\epsilon] = 0.5([C]-[I])$ (декартові координати), достатньо застосувати вираз [6]:

$$[\sigma]_0 = [X]^{-1}J[\sigma][X]^{-T}. \quad (16)$$

Приклади

Візьмемо довільну не вироджену не симетричну матрицю $[X]$ с $\det[X] > 0$ і обчислимо всі похідні від неї матриці і значення (див. табл.1, де округлення проведені з точністю до шести знаків після коми).

Матриця $[X]$ та її похідні й значення

Ліве розкладання	Праве розкладання
$[X] = \begin{bmatrix} 1.3 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1.2 & 0 \\ 0.5 & -0.2 & 1.1 \end{bmatrix}$	
$[\Theta] = [X][X]^T = \begin{bmatrix} 1.69 & 0.52 & 0.65 \\ & 1.60 & -0.04 \\ Sym & & 1.50 \end{bmatrix}$	$[C] = [X]^T[X] = \begin{bmatrix} 2.10 & 0.38 & 0.55 \\ & 1.48 & -0.22 \\ Sym & & 1.21 \end{bmatrix}$
$\lambda_1 = 2.433661; \lambda_2 = 1.600205; \lambda_3 = 0.756134$	
$\underline{u}_1 = 1.560020; \underline{u}_2 = 1.264992; \underline{u}_3 = 0.869560$	
$[W_L] = \begin{bmatrix} 0.745361 & -0.047384 & -0.664976 \\ 0.440931 & 0.783175 & 0.438426 \\ 0.500018 & -0.619994 & 0.604640 \end{bmatrix}$	$[W_R] = \begin{bmatrix} 0.894444 & -0.046108 & -0.444797 \\ 0.275069 & 0.840961 & 0.465964 \\ 0.352572 & -0.539128 & 0.764875 \end{bmatrix}$
$[V] = \begin{bmatrix} 1.254041 & 0.212247 & 0.268947 \\ & 1.246342 & -0.039780 \\ Sym & & 1.194188 \end{bmatrix}$	$[U] = \begin{bmatrix} 1.422789 & 0.154544 & 0.227570 \\ & 1.201458 & -0.112321 \\ Sym & & 1.070325 \end{bmatrix}$
$[R] = \begin{bmatrix} 0.964647 & -0.144677 & -0.220284 \\ 0.163267 & 0.984196 & 0.068570 \\ 0.206882 & -0.102110 & 0.973023 \end{bmatrix}$	

Для наочності, на рис.1 наведена двовимірна схема трансформації елементарного об'єму від початкового стану до поточного через проміжне, при лівому та правому розкладаннях.

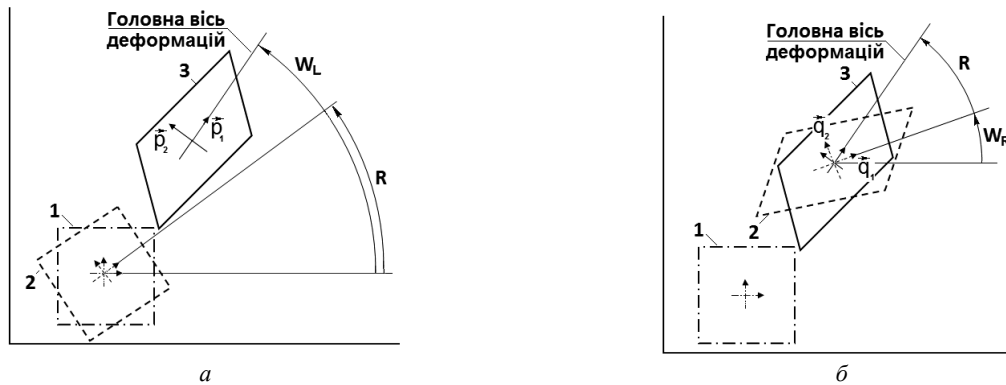


Рис. 1. Схема початкового (1), проміжного (2) та поточного (3) стану елементарного об'єму матеріалу при розкладаннях: а) лівому (спочатку поворот, потім деформування); б) правому (спочатку деформування, потім поворот)

Візьмемо дані з таблиці 1 та визначимося з деформаціями, які закладені в матрицю градієнта руху $[X]$ (традиційно замість $([\epsilon])_R$ пишуть $[\epsilon]$, оскільки правий тензор деформацій Гріна-Лагранжа $([\epsilon])_R$ використовується частіше).

Тут компоненти $([\epsilon])_L$ знаходились з формули $[\epsilon] = 0.5([\mathcal{C}] - [I])$ заміною матриці $[C]$ на матрицю $[\Theta] = [X][X]^T$ (на матрицю деформацій Фінгера).

Як бачимо, різні розкладання призводять до різних значень деформацій при однакових значеннях головних деформацій. Це сталося тому, що напрямлення цих деформацій різні (див. рис.1): в їх положенні жорсткий поворот врахований (ліве розкладання) або не врахований (праве розкладання). Крім того, використовувалися різні міри деформацій.

Таблиця 2

Головні деформації, матриці компонент тензорів деформацій	
Ліве розкладання	Праве розкладання
$(\Delta_{11})_H = 0.444698$; $(\Delta_{22})_H = 0.235066$; $(\Delta_{33})_H = -0.139769$	
$\underline{\epsilon}_1 = 0.716831$; $\underline{\epsilon}_2 = 0.300102$; $\underline{\epsilon}_3 = -0.121933$	
$([\epsilon])_L = \begin{bmatrix} 0.345 & 0.260 & 0.325 \\ & 0.300 & -0.020 \\ Sym & & 0.250 \end{bmatrix}$	$[\epsilon] = \begin{bmatrix} 0.550 & 0.190 & 0.275 \\ & 0.240 & -0.110 \\ Sym & & 0.105 \end{bmatrix}$
$([\epsilon]_H)_L = \begin{bmatrix} 0.185781 & 0.178176 & 0.228839 \\ & 0.203773 & -0.053146 \\ Sym & & 0.150442 \end{bmatrix}$	$([\epsilon]_H)_R = \begin{bmatrix} 0.328619 & 0.129265 & 0.193633 \\ & 0.169542 & -0.113262 \\ Sym & & 0.041834 \end{bmatrix}$

На завершення, на рис.2 приведені графіки деформацій: "умовної" $\epsilon = \Delta s / s_0$, Гріна-Лагранжа $\epsilon = \epsilon + 0.5\epsilon^2$ та логарифмічної $\epsilon_H = \ln(1 + \epsilon)$, як функції величини "умовної" деформації ϵ , а також графіки відхилень перших двох деформацій по відношенню до логарифмічної, оскільки саме логарифмічну деформацію зазвичай вважають "дійсною".

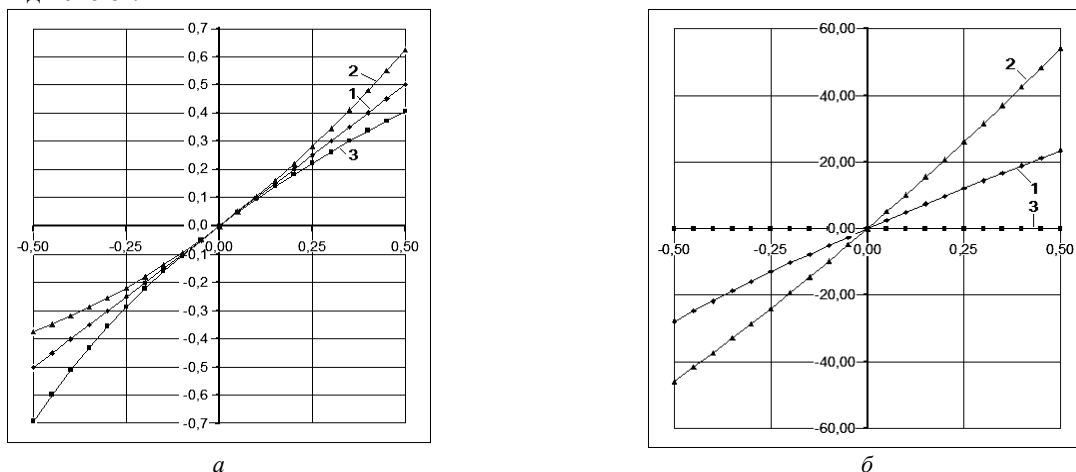


Рис. 2. Графіки: *a* – деформацій "умовної" ϵ (1), Гріна-Лагранжа ϵ (2) та логарифмічної ϵ_H (3);
б – відхилень відносно ϵ_H

Графіки показують, наскільки сильно відрізняються "умовні" деформації і деформації Гріна-Лагранжа від логарифмічних, особливо деформації Гріна-Лагранжа. Однак саме останні зазвичай використовуються в розрахунках при великих деформаціях, і для цього є вагомі причини. При цьому важливо мати на увазі, що їм відповідає другий тензор напружень Піола-Кірхгофа $[\sigma]_0$, тобто тензор напружень Ейлера-Коші, перерахований до початкової конфігурації за формулою (16). А логарифмічним деформаціям відповідає тензор напружень Нолла: тензор "напружень Кірхгофа з виключеним поворотом".

Висновки

Використання логарифмічних деформацій Генкі при розв'язуванні крайових задач з моделюванням великих деформацій потребує проведення додаткових розрахунків, які пов'язані з визначенням головних напрямків деформацій та полягає у визначенні власних чисел і векторів не виродженої симетричної матриці розміром 3×3 . Такий підхід може бути виправданий лише у випадку побудови високоточних алгоритмів.

При використанні логарифмічних деформацій важливо одночасно використовувати відповідну міру напружень: тензор напружень Нолла, який представляє собою тензор "напружень Кірхгофа з виключеним поворотом".

Багато рівнянь теорії пошкоджуваності побудовані саме для головних напрямків деформації. Тому застосування логарифмічних деформацій Генкі буде легко сполучатися з такими теоріями. Це буде темою наступного Повідомлення.

Анотація. *Предлагается цикл сообщений про алгоритмы МКЭ для решения краевых задач с учетом больших деформаций и поврежденности материала. В данном сообщении рассмотрены некоторые практические вопросы, связанные с применением логарифмических деформаций: левое и правое разложения матрицы градиентов деформаций Коши-Грина,*

определение главных направлений и значений деформаций, сопряженные тензоры напряжений. Подробно изложен алгоритм нахождения собственных чисел и векторов матрицы с компонентами тензора деформаций Коши-Грина (алгоритм полярной декомпозиции). На численном примере проиллюстрированы матрицы левого и правого разложения. Приведена схема начального, промежуточного и текущего состояния элементарного объема материала при левом и правом разложении.

Ключевые слова: большие деформации, логарифмические деформации, полярная декомпозиция, тензоры напряжений.

Abstract. The cycle of messages about algorithms FEM for the decision of problems with boundary conditions taking into account the large strains and damage a material is offered. In the given message some practical questions connected with application of logarithmic deformations are considered: the left and right decomposition of a matrix of gradients of strains of Koshi-Green, definition of mainstreams and values of the strains, interfaced tensors stresses. The algorithm of a finding of own numbers and vectors of a matrix with components of strains tensors of Koshi-Green (algorithm of polar decomposition) is in detail stated. On a numerical example matrixes of the left and right decomposition are illustrated. The scheme of an initial, intermediate and current condition of elementary volume of a material is resulted at the left and right decomposition.

Conclusion. Using the Hencky logarithmic strain in the solution of boundary value problems with large deformations requires additional calculations. These calculations are the main directions of strain by determining the eigenvalues and eigenvectors of a nonsingular symmetric matrix of size 3×3 . Such an approach should be used in the construction of high-precision algorithms. When using the logarithmic strain is necessary to use the proper measure of stress - the Noll's stress tensor, which is a tensor of the "Kirchhoff's stress excepted rotation." Most theory of the damage equations is constructed for the main directions of strain. Therefore, the use of logarithmic Hencky strain is easily combined with such theories.

Keywords: large strains, logarithmic strains, polar decomposition, stress tensors.

1. Eterović A.L., Bathe K.J. A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990. – 30. – P.1099–1114.
2. Bathe K.J. Finite Element Procedures. – New-York: Prentice Hall, 1996. – 1037 p.
3. Montáns F.J., Bathe K.J. Computational issues in large strain elasto-plasticity: an algorithm for mixed hardening and plastic spin // Int. J. Numer. Meth. Enging, 2005. – 63. – P. 159–196.
4. Weber G., Anand L. Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic hyperelastic-viscoplastic solids // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1990. – 79. – P. 173–202.
5. Cleja-Tigoiu S., Soo's E. Elastoplastic models with relaxed configurations and internal state variables // Applied Mechanics Reviews, 1990. – 43. – P. 131-151.
6. Жермен П. Курс механики сплошных сред. Общая теория: Пер. с фр. В.В. Федулова. – М.: Высш. шк., 1983. – 399 с.
7. Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отделение, 1986. – 336 с.
8. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 211 с.
9. Hoger, A. The stress conjugate to logarithmic strain // International Journal of Solids and Structures, 1987. – 23. – P. 1645-1656.
10. Сокольников И.С. Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред: Пер. с англ. В.И. Ковтова; Под ред. В.В. Лохина – М.: Наука, 1971. – 374 с.
11. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості: Підручник. – К.: Вища шк., 2002. – 308 с.
12. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск: СО РАН, 2000. – 261 с.

REFERENCES

1. Eterović A.L., Bathe K.J., A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990, no 30, pp. 1099-1114.
2. Bathe K.J. Finite Element Procedures. New-York: Prentice Hall, 1996, 1037 p.
3. Montáns F.J., Bathe K.J. Computational issues in large strain elasto-plasticity: an algorithm for mixed hardening and plastic spin, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005, no 63, pp. 159-196.
4. Weber G., Anand L. Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic hyperelastic-viscoplastic solids, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1990, no. 79, pp. 173-202.
5. Cleja-Tigoiu S., Soo's E. Elastoplastic models with relaxed configurations and internal state variables, Applied Mechanics Reviews, 1990, no. 43, pp. 131-151.
6. Germen P. Kurs mehaniki sploshnyh sred. [Obshchaya teoriya]: Per. s fr. V.V. Fedulova. Moscow: Vyshaya shkola, 1983, 399 p.
7. Chernych K.F. Nelineynaya teoriya uprugosti v mashinostroitel'nykh rasetach. Leningrad: Mashinostroenie, 1986, 336 p.
8. Novogilov V.V. Osnovy nelineynoy teorii uprugosti. Moscow-Leningrad: OGIz, 1948, 211 p.
9. Hoger, A. The stress conjugate to logarithmic strain, International Journal of Solids and Structures, 1987, no. 23, pp. 1645-1656.
10. Sokol'nikov I.S. Tenzorny analiz. [Teoriya i primeneniye v geometrii i v mehanike sploshnyh sred]: Per. s angl. V.S. Kovtova; Pod red. V.V. Lochina. Moscow: Nauka, 1971, 374 p.
11. Mogarovsky M.S. Teoriya prugnosti, plastychnosti i povzuchosti (Pidruchnyk). Kyiv: Vyshcha shkola, 2002, 308 p.
12. Korobeynikov S.N. Nelineynoye deformirovaniye tverdykh tel. Novosibirsk: SO RAN, 2000, 261 p.