**УДК 539.3**

**Рудаков К.М. д.т.н., Яковлєв А.І.**
**НТУУ «Київський політехнічний інститут» м. Київ, Україна**

# МОДЕЛЮВАННЯ ВЕЛИКИХ ДЕФОРМАЦІЙ. ПОВІДОМЛЕННЯ 5. ТЕРМОПРУЖНІСТЬ

**Rudakov K., Iakovliev A.**
**National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine (mmi@kpi.ua)**

# MODELLING OF LARGE STRAINS. MESSAGE 5. THERMOELASTICITY

*У Повідомленнях 1, 2, 3 й 4 було розглянуто, як ідею мультиплікативного розкладання Лі градієнта пружних-пластичних деформацій Коші-Гріна можна застосувати для узагальненого розкладання на випадок одночасної присутності чотирьох типів деформацій: температурної, пружної, пластичних і повзучості, а також встановлені допустимі форми рівнянь стану.*
*У даному Повідомленні проаналізована проблема правильного вибору відлікової конфігурації для пружних деформацій у випадку термопружності: "розвантаженої" або "початкової".*
*З метою одержання коректних рівнянь стану використано другий закон термодинаміки. Визначено параметри функціонала, що описує питому вільну енергію системи, що деформується, для обох випадків. Показано, що варіант "початкової" відлікової конфігурації приводить до появи у зв'язку між напруженнями й пружними деформаціями додаткової функції температури, яка не видаляється, а це суперечить загальноприйнятим постулатам. Варіант "розвантаженої" конфігурації вільний від протиріч. Теоретичні висновки підкріплено тестовим прикладом.*
*Ключові слова: великі деформації, мультиплікативне розкладання, температурні деформації, термопружність.*

**Вступ**

Моделювання значних деформацій матеріалу, які одночасно містять деформації різного типу (температурні, пружні, пластичні, повзучості), є складною проблемою. Такий комплекс деформацій може виникати, зокрема, в околі вершини в’язкої тріщини в аварійних режимах роботи енергетичного агрегату з невиявленою заздалегідь тріщиною.

У серії Повідомлень [1 – 4] розглядалися проблеми, характерні для моделювання великих деформацій.

Зокрема, в Повідомленні 1 [1] розглянуто, яким чином ідею мультиплікативного розкладу Лі [5] градієнта пружно-пластичних деформацій Коші-Гріна можна застосувати для узагальненого розкладу на випадок одночасної наявності чотирьох типів деформацій: температурних, пружних, пластичних та повзучості.

А в Повідомленні 2 [2] наведені теоретичні основи відокремлення температурних деформацій від повних деформацій та визначення напружень при моделюванні процесу деформування з великими деформаціями різного типу при застосуванні міри деформацій Гріна-Лагранжа.

**Мета** цього Повідомлення – з’ясувати, який з двох можливих варіантів визначення пружних деформацій та напружень при моделюванні процесу деформування з великими деформаціями двох типів: температурних та пружних, є більш прийнятним із загально прийнятих уявлень.

Буде застосовуватися тільки декартова система координат. Матеріал – ізотропний метал. За принципом зручності будемо застосовувати записи в індексній та матричній формі.

**Модифіковані тензори Гріна-Лагранжа різних типів деформацій**

У випадку наявності тільки пружних та температурних деформацій мультиплікативний розклад градієнта руху $[X]$, а саме $[X]=[X^e][X^p][X^c][X^\theta]$ (див. [1], формулу (19)), скорочується до

$$[X]=[X^e][X^\theta]\,. \tag{1}$$

Індексом $e$ відмічаються пружні, а $\theta$ – температурні компоненти. Матриця $[X^\theta]$ з властивостями

$$[X^\theta]=\vartheta[I]\,;\quad \vartheta=\vartheta(\theta)=1+\overline{\alpha}_\theta(\theta-\theta_0)\,;\quad J^\theta=\det[X^\theta]=\vartheta^3>0 \tag{2}$$

описує тільки температурний градієнт і містить просторові похідні від температурних переміщень [2]. Тут $\theta$ й $\theta_0$ – температури: поточна та початкова; $\overline{\alpha}_\theta$ – коефіцієнт температурного подовження, $[I]$ – одинична матриця. Тому для ізотропного матеріалу можемо записати, що матриця $[\in^\theta]$ із компонент $\in^\theta_{mn}$ правого тензора температурних деформацій Гріна-Лагранжа $\in^\theta$ може бути обчислена як

$$[\in^{\theta}] = 0.5([X^{\theta}]^T [X^{\theta}] - [I]) = 0.5([C^{\theta}] - [I]) = 0.5(\vartheta^2 - 1)[I], \quad (3)$$

де введена матриця $[C^{\theta}] = [X^{\theta}]^T [X^{\theta}]$.

Згідно з груповими властивостями операторів відображення процес трансформації елементарного об'єму матеріалу тіла, що деформується, в часі може бути описаний операторами неперервних відображень, які розглядаються (записуються) справа-наліво. Саме так побудоване мультиплікативне представлення процесу деформування (1): як би спочатку відбувається температурне деформування, потім – пружне. Щодо введення мір деформації в послідовно розглядуваних процесах деформування, в публікаціях використовують два підходи.

В *першому* підході, в кожному з підпросторів мультиплікативного представлення процесу деформування аналогічно $[\in^{\theta}]$ вводяться деформації Гріна-Лагранжа за їх типами, в даному випадку, окрім (3), ще й

$$[\in^{e}] = 0.5([X]^T [X] - [X^{\theta}]^T [X^{\theta}]) = 0.5([C] - [C^{\theta}]), \quad (4)$$

а також повні деформації Гріна-Лагранжа:

$$[\in] = 0.5([X]^T [X] - [I]) = 0.5([C] - [I]). \quad (5)$$

Подібний підхід використовував, зокрема, Л.І. Сєдов в своїх публікаціях з механіки суцільних середовищ, наприклад, в Главі II на стор. 66 книг [6, 7]. Правда, тоді ще не було мультиплікативного розкладу Лі, але він теж розглядав процес деформування як сукупність послідовних трансформацій. Там же Л.І. Сєдов відмічав, що так званий "початковий стан" можна обирати довільним. Згідно з (3) і (5) в якості "початкового стану" температурної та повної деформації обирається недеформований стан, а для пружних деформацій (4) – проміжний модифікований ("розвантажений") стан, в якому реалізовані тільки температурні деформації. Дві формули (3) й (4) відповідають ідеології мультиплікативного представлення процесу деформування, а формули (5) цей розклад не стосується.

При такому підході маємо адитивну властивість модифікованих деформацій різних типів, а також їх швидкостей:

$$[\in] = [\in^{e}] + [\in^{\theta}] = 0.5([X]^T [X] - [I]) = 0.5([C] - [I]); \quad (6)$$

$$[\dot{\in}] = [\dot{\in}^{e}] + [\dot{\in}^{\theta}] = 0.5[\dot{C}]. \quad (7)$$

Природно, що із використанням матриць $[X^{e}]$, $[X^{\theta}]$ і $[X]$ аналогічно можна записати вирази для відповідних деформацій в інших мірах, зокрема Альмансі, Генкі тощо.

Згідно з *другим* підходом, в кожному з підпросторів мультиплікативного представлення процесу деформування аналогічно $[\in^{\theta}]$ вводяться модифіковані деформації Гріна-Лагранжа за їх типами [8-10, 1], тут

$$[\tilde{\in}^{e}] = 0.5([X^{e}]^T [X^{e}] - [I]) = 0.5([\tilde{C}^{e}] - [I]); \quad (8)$$

а також повні деформації Гріна-Лагранжа (5). Тут початковим базисом для всіх типів деформацій вважається вихідний базис.

Очевидно, що, по-перше, при використанні (8) вже не виконуються адитивні властивості деформацій та їх швидкостей, як це було в першому підході (формули (6) та (7)). По-друге, значення компонент матриць пружних деформацій $[\in^{e}]$ та $[\tilde{\in}^{e}]$, отримані з виразів (4) та (8), не будуть однаковими.

Але можна перейти від $[\in^{e}]$ до $[\tilde{\in}^{e}]$: достатньо помножити вираз (4) зліва на $[X^{\theta}]^{-T}$, а справа – на $[X^{\theta}]^{-1}$:

$$[X^{\theta}]^{-T}[\in^{e}][X^{\theta}]^{-1} = 0.5([X^{\theta}]^{-T}[X]^T[X][X^{\theta}]^{-1} - [X^{\theta}]^{-T}[X^{\theta}]^T[X^{\theta}][X^{\theta}]^{-1}) = 0.5([X^{e}]^T[X^{e}] - [I]) = 0.5([C^{e}] - [I]) = [\tilde{\in}^{e}].$$

Отже, при $\det[X^{\theta}] > 0$ можемо записати взаємно однозначні формули переходу

$$[\tilde{\in}^{e}] = [X^{\theta}]^{-T}[\in^{e}][X^{\theta}]^{-1}; \quad [\in^{e}] = [X^{\theta}]^{T}[\tilde{\in}^{e}][X^{\theta}]. \quad (9)$$

Виходить, що в залежності від призначення, можемо застосовувати необхідний вираз (4) або (8), а потім, при необхідності, перераховувати в інший базис. Але який з них є більш прийнятним із загальних правил, уявлень? Які деформації є вірними, а які можуть застосовуватися тільки як розрахункові? Щоб це безпомилково з'ясувати, потрібно ще знайти зв'язки між деформаціями та напруженнями, проаналізувати їх.

**Визначення напружень при великих термопружних деформаціях**

Застосуємо **TL** (Total Lagrange) формулювання, теорію гіперпружного матеріалу та мультиплікативний розклад градієнта руху, а також другий закон термодинаміки для ізотропного матеріалу у вигляді нерівності Клаузіуса-Дюгема [11, 12, 2]:

$$\Phi_1 = \sigma^{mn} d_{mn} - \overline{\rho\varpi}; \quad \Phi_2 = -\frac{q_m}{\theta}\nabla_m \theta; \quad \Phi_1 + \Phi_2 = \Phi \geq 0, \quad (10)$$

де $\Phi_1$ називають власною об'ємною дисипацією; $\Phi_2$ – об'ємною тепловою дисипацією. Питома потужність, отримана елементарним об'ємом, визначається виразом

$$\overline{\omega} = \dot{\psi} + s\dot{\theta}\,. \tag{11}$$

Тут $s$ є ентропією, а $\overline{\omega}$ можна подати як скалярний добуток двох векторів: $\overline{\omega} = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \dot{\chi}_k$ [12]. Вважається, що задачі теплопровідності та термопружного деформування не є зв'язаними, оскільки при пружному деформуванні відсутня дисипація енергії, тому (10) змінюється на:

$$\Phi_2 = 0\,; \quad \Phi = \Phi_1 = \sigma^{mn} d_{mn} - \overline{\rho}\overline{\omega} \geq 0\,. \tag{12}$$

Застосуємо для питомої вільної енергії системи вираз [8-10, 2]

$$\psi = \psi^e(\theta, \epsilon_{ij}^e) + \psi^\theta(\theta)\,. \tag{13}$$

**Примітка**. За міру пружної деформації, окрім $\epsilon_{ij}^e$, для питомої вільної енергії системи $\psi$ можна застосовувати будь-яку іншу прийнятну міру або їх модифікацію, навіть необ'єктивну [13]. ●

Для (11) з (13) маємо, що

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{mn}^e} \dot{\epsilon}_{mn}^e + \left( \frac{\partial \psi^e}{\partial \theta} + \frac{d\psi^\theta}{d\theta} \right) \dot{\theta}\,. \tag{14}$$

Оскільки є два варіанти формул для визначення пружних деформацій Гріна-Лагранжа, що застосовують мультиплікативний розклад, то далі розглядаємо питання визначення напружень двічі.

**Застосування деформацій Гріна-Лагранжа за формулами (3) … (5)**

Використаємо вираз (14). Спочатку з нього приберемо $\dot{\epsilon}_{mn}^e$. З формули (6) отримаємо, що

$$[\epsilon^e] = [\epsilon] - [\epsilon^\theta]\,. \tag{15}$$

Далі у (15) підставимо формулу (3), отримаємо, що $[\epsilon^e] = [\epsilon] - 0.5(\vartheta^2 - 1)[I]$. Звідси часова похідна

$$[\dot{\epsilon}^e] = [\dot{\epsilon}] - 0.5 \cdot 2\vartheta \frac{d\vartheta}{d\theta}[I]\dot{\theta} = [\dot{\epsilon}] - \gamma[I]\dot{\theta}\,, \tag{16-а}$$

або в індексній формі запису:

$$\dot{\epsilon}_{mn}^e = \dot{\epsilon}_{mn} - \gamma\,\delta_{mn}\,\dot{\theta}\,, \tag{16-б}$$

де функція $\gamma = \gamma(\theta)$ введена формулою

$$\gamma(\theta) = \vartheta(\theta)\frac{d\vartheta(\theta)}{d\theta}\,. \tag{17}$$

Для (16) врахуємо (формула (17) з [2]), що $\dot{\epsilon}_{mn} = X_{im} d_{ij} X_{jn}$, де симетричний "тензор деформації швидкості" $d_{ij} = 0.5(\partial \dot{u}^i / \partial x^j + \partial \dot{u}^j / \partial x^i)$. Тоді з (16-б)

$$\dot{\epsilon}_{mn}^e = X_{im} d_{ij} X_{jn} - \gamma\,\delta_{mn}\,\dot{\theta}\,. \tag{18}$$

Підставимо (18) у вираз (14), який при цьому змінюється на

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{mn}^e} X_{im} d_{ij} X_{jn} - \left( \gamma \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{mn}^e} \delta_{mn} - \frac{\partial \psi^e}{\partial \theta} - \frac{d\psi^\theta}{d\theta} \right) \dot{\theta}\,. \tag{19}$$

Тепер отримана питома потужність $\overline{\omega} = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \dot{\chi}_k$ та ентропія $s$ для виразу $\dot{\psi} = \overline{\omega} - s\dot{\theta}$ (див. формулу (11)), записуються як

$$\overline{\omega} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{mn}^e} X_{im} d_{ij} X_{jn}\,; \quad s = \gamma \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{mn}^e} \delta_{mn} - \frac{\partial \psi^e}{\partial \theta} - \frac{d\psi^\theta}{d\theta}\,. \tag{20}$$

Далі потрібно задовольнити нерівність Клаузіуса-Дюгема (12). Для неї за дисипативну функцію $\Phi_1$ отримали вираз

$$\Phi_1 = \sigma^{mn} d_{mn} - \overline{\rho} \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{mn}^e} X_{im} d_{ij} X_{jn} = \left( \sigma^{mn} - \overline{\rho} X_{mi} \frac{\partial \psi^e}{\partial \epsilon_{ij}^e} X_{nj} \right) d_{mn}\,, \tag{21}$$

який для оборотних (тобто термопружних) процесів дорівнює нулю при будь-яких значеннях $d_{mn}$, оскільки для них ентропія $s$ (див. другий вираз у (20)) дорівнює нулю. Тому з (21) маємо право записати, що компоненти тензора напружень Ейлера-Коші

$$\sigma^{mn} = \bar{\rho} X_{mi} \frac{\partial \psi^e}{\partial \in_{ij}^e} X_{nj} . \tag{22}$$

Відповідно до співвідношення між компонентами тензора напружень Ейлера-Коші $\sigma^{mn}$ та другого тензора Піола-Кірхгофа $(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0$ [12], з (22) маємо, що $J\sigma^{mn} = X_{mi}(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0 X_{nj} = J\bar{\rho} X_{mi} \frac{\partial \tilde{\psi}^e}{\partial \in_{ij}^e} X_{nj}$ (тут позначено $J = \det[X] > 0$); а також, після звільнення від однакових градієнтів та врахування, що між початковою $\bar{\rho}_0$ та поточною $\bar{\rho}$ щільністю матеріалу є зв'язок $J\bar{\rho} = \bar{\rho}_0$ :

$$(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0 = \bar{\rho}_0 \frac{\partial \psi^e}{\partial \in_{ij}^e} . \tag{23}$$

Щодо виразу для $\psi^\theta(\theta)$, то його можна обрати у вигляді квадратичного функціонала від $(\theta - \theta_0)$, а саме, як $\psi^\theta(\theta) = -0.5A \cdot (\theta - \theta_0)^2$, де величину $A$ можна визначити на основі експериментальних результатів, а також із використанням другої формули з (20), у яку потрібно підставити необхідні похідні $\partial\psi^e / \partial \in_{mn}^e$, $\partial\psi^e / \partial\theta$ та $d\psi^\theta / d\theta$ від прийнятих виразів $\psi^e$ та $\psi^\theta$.

**Застосування деформацій Гріна-Лагранжа за формулами (3), (5) і (8)**

Дії ідентичні попереднім, з деякими відмінностями в формулах. Цей варіант розглядався в [8, 9], також докладно виписаний у [10, 2]. Але для наочності тут випишемо всі формули.

Використаємо вираз (13) з заміною $\in_{mn}^e$ на $\tilde{\in}_{mn}^e$ (дивись формулу (8) та Примітку), а також $\psi^e$ на $\tilde{\psi}^e$ :

$$\dot{\tilde{\psi}} = \frac{\partial \tilde{\psi}^e}{\partial \tilde{\in}_{mn}^e} \dot{\tilde{\in}}_{mn}^e + \left( \frac{\partial \tilde{\psi}^e}{\partial \theta} + \frac{d\psi^\theta}{d\theta} \right) \dot{\theta} . \tag{24}$$

Знайдемо заміну $\dot{\tilde{\in}}_{mn}^e$ для (24). З формули (8), а саме $[\tilde{\in}^e] = 0.5([X^e]^T[X^e] - [I])$, із врахуванням виразів (1) … (3), послідовно отримуємо, що для ізотропного матеріалу:

$$[\tilde{\in}^e] = 0.5([X^e]^T[X^e] - [I]) = 0.5\Big(([X][X^\theta]^{-1})^T [X][X^\theta]^{-1} - [I]\Big) =$$

$$= 0.5\Big(([X]\vartheta^{-1})^T [X]\vartheta^{-1} - [I]\Big) = 0.5\Big([X]^T[X]\vartheta^{-2} - [I]\Big) =$$

$$= 0.5\Big([X]^T[X] - \vartheta^2[I] - [I] + [I]\Big)\vartheta^{-2} = \Big([\in] - 0.5(\vartheta^2[I] - [I])\Big)\vartheta^{-2} =$$

$$= \Big([\in] - 0.5([X^\theta]^T[X^\theta] - [I])\Big)\vartheta^{-2} = ([\in] - [\in^\theta])\vartheta^{-2} . \tag{25}$$

Нагадаємо, що вираз для $\vartheta = \vartheta(\theta)$ дано формулою (2): $\vartheta(\theta) = 1 + \bar{\alpha}_0(\theta - \theta_0)$.

Далі, у вираз (25) знов підставимо формулу (3), а саме $[\in^\theta] = 0.5(\vartheta^2 - 1)[I]$. Отримаємо, що $[I] + 2[\tilde{\in}^e] = ([I] + 2[\in])\,\vartheta^{-2}$. Звідсіля часова похідна

$$[\dot{\tilde{\in}}^e] = ([\dot{\in}] - \beta \cdot ([I] + 2[\in])\,\dot{\theta})\,\vartheta^{-2} , \tag{26-а}$$

або в індексній формі запису:

$$\dot{\tilde{\in}}_{mn}^e = (\dot{\in}_{mn} - \beta \cdot (\delta_{mn} + 2 \in_{mn})\dot{\theta})\,\vartheta^{-2} , \tag{26-б}$$

де введена функція

$$\beta = \beta(\theta) = \frac{1}{\vartheta(\theta)} \frac{d\vartheta(\theta)}{d\theta} . \tag{27}$$

Для (26) врахуємо, що $\dot{\in}_{mn} = X_{im} d_{ij} X_{jn}$. Тоді з (26-б)

$$\dot{\tilde{\in}}_{mn}^e = (X_{im} d_{ij} X_{jn} - \beta \cdot (\delta_{mn} + 2 \in_{mn})\,\dot{\theta})\,\vartheta^{-2} . \tag{28}$$

Підставимо (28) у вираз (24), який при цьому змінюється на

$$\dot{\tilde{\psi}} = \frac{1}{\vartheta^2} \frac{\partial \tilde{\psi}^e}{\partial \tilde{\in}_{mn}^e} X_{im} d_{ij} X_{jn} - \left( \frac{\beta}{\vartheta^2} \frac{\partial \tilde{\psi}^e}{\partial \tilde{\in}_{mn}^e} (\delta_{mn} + 2 \in_{mn}) - \frac{\partial \tilde{\psi}^e}{\partial \theta} - \frac{d\psi^\theta}{d\theta} \right) \dot{\theta} . \tag{29}$$

Тепер отримана питома потужність $\bar{\omega} = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \dot{\chi}_k$ та ентропія $s$ для виразу $\dot{\tilde{\psi}} = \bar{\omega} - s\dot{\theta}$ (див. формулу (11)), записуються як

$$\overline{\omega} = \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial\tilde{\psi}^e}{\partial\,\tilde{\in}^e_{mn}}X_{im}d_{ij}X_{jn}\,; \quad s = \frac{\beta}{\vartheta^2}\frac{\partial\tilde{\psi}^e}{\partial\,\tilde{\in}^e_{mn}}(\delta_{mn} + 2\in_{mn}) - \frac{\partial\tilde{\psi}^e}{\partial\theta} - \frac{d\psi^\theta}{d\theta}\,. \tag{30}$$

Далі потрібно задовольнити нерівність Клаузіуса-Дюгема (12). Для нього за дисипативну функцію $\Phi_1$ отримали вираз

$$\Phi_1 = \sigma^{mn}d_{mn} - \overline{\rho}\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial\tilde{\psi}^e}{\partial\,\tilde{\in}^e_{mn}}X_{im}d_{ij}X_{jn} = \left(\sigma^{mn} - \overline{\rho}\frac{1}{\vartheta^2}X_{mi}\frac{\partial\tilde{\psi}^e}{\partial\,\tilde{\in}^e_{ij}}X_{nj}\right)d_{mn}\,, \tag{31}$$

який для оборотних (тобто термопружних) процесів дорівнює нулю при будь-яких значеннях $d_{mn}$, оскільки для них ентропія $s$ (див. другий вираз у (30)) дорівнює нулю. Тому з (31) маємо право записати, що компоненти тензора напружень Ейлера-Коші

$$\sigma^{mn} = \overline{\rho}X_{mi}\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial\tilde{\psi}^e}{\partial\,\tilde{\in}^e_{ij}}X_{nj}\,. \tag{32}$$

Відповідно до співвідношень між компонентами тензора напружень Ейлера-Коші $\sigma^{mn}$ та другого тензора Піола-Кірхгофа $(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0$, з (32) маємо, що $J\sigma^{mn} = X_{mi}(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0X_{nj} = J\overline{\rho}X_{mi}\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial\tilde{\psi}^e}{\partial\,\tilde{\in}^e_{ij}}X_{nj}$; а також, після звільнення від однакових градієнтів та врахування, що $J\overline{\rho} = \overline{\rho}_0$:

$$(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})_0 = \overline{\rho}_0\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial\tilde{\psi}^e}{\partial\,\tilde{\in}^e_{ij}}\,. \tag{33}$$

Щодо виразу для $\psi^\theta(\theta)$, то його можна обрати у вигляді квадратичного функціонала від $(\theta - \theta_0)$, а саме, як $\psi^\theta(\theta) = -0.5\tilde{A}\cdot(\theta-\theta_0)^2$, де величину $\tilde{A}$ можна визначити на основі експериментальних результатів, а також із використанням другої формули з (30), в яку потрібно підставити необхідні похідні $\partial\tilde{\psi}^e/\partial\,\tilde{\in}^e_{mn}$, $\partial\tilde{\psi}^e/\partial\theta$ та $d\psi^\theta/d\theta$ від прийнятих виразів $\tilde{\psi}^e$ та $\psi^\theta$.

Ще вводять такі величини:

$$\overline{\rho}^\theta = \overline{\rho}_0/J^\theta = J^e\overline{\rho}\,; \quad (\underset{\sim}{\sigma}^{ij})^e_0 = \overline{\rho}^\theta\frac{\partial\tilde{\psi}^e}{\partial\,\tilde{\in}^e_{ij}}\,, \tag{34}$$

тоді з (33) та (34)

$$(\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 = \vartheta\cdot(\underset{\sim}{\sigma}^{mn})^e_0\,. \tag{35}$$

Початкові значення приведених густин $\overline{\rho}^\theta_0 = \overline{\rho}^e_0 = \overline{\rho}_0$, оскільки $J^\theta_0 = J^e_0 \equiv 1$. Згідно з (1) при відсутності необоротних деформацій $J = J^eJ^\theta$, причому величина $J^\theta$ відповідає (2): $J^\theta = \det[X^\theta] = \vartheta^3 > 0$. Компоненти $(\underset{\sim}{\sigma}^{ij})^e_0$ називають компонентами "приведеного пружного" другого тензора напружень Піола-Кірхгофа.

**Аналіз**

Аналіз ситуації проведемо, розглядаючи зв'язки між деформаціями $[\tilde{\in}^e]$ та $[\in^e]$, функціоналами $\tilde{\psi}^e$ та $\psi^e$, лінійний закон Гука при термопружності ізотропних матеріалів.

Для ізотропного матеріалу $[X^\theta] = \vartheta[I]$ (див. першу формулу (2)), тому з (9) маємо, що

$$[\tilde{\in}^e] = \vartheta^{-2}[\in^e]\,; \quad [\in^e] = \vartheta^2[\tilde{\in}^e]\,. \tag{36}$$

Порівняння формул (23) та (32), а саме $\sigma^{mn} = \overline{\rho}X_{mi}\left(\partial\psi^e/\partial\in^e_{ij}\right)X_{nj}$ та $\sigma^{mn} = \overline{\rho}X_{mi}\left(\vartheta^{-2}\partial\tilde{\psi}^e/\partial\,\tilde{\in}^e_{ij}\right)X_{nj}$ дає зв'язок між пружними потенціалами $\tilde{\psi}^e$ та $\psi^e$ через вираз

$$\frac{\partial\psi^e}{\partial\in^e_{ij}} = \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial\tilde{\psi}^e}{\partial\,\tilde{\in}^e_{ij}}\,. \tag{37}$$

З (37), з точністю до константи

$$\psi^e = \vartheta^{-2}\tilde{\psi}^e\,. \tag{38}$$

Той факт, що у взаємно-однозначний (пружний) зв'язок в формулі (33) між напруженнями $(\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0$ та градієнтом $\overline{\rho}\partial\tilde{\psi}^e/\partial\,\tilde{\in}^e_{ij}$ питомої вільної пружної енергії $\overline{\rho}\tilde{\psi}^e$ втрутилася функція температури $\vartheta = \vartheta(\theta)$, вказує на те, що одна з цих величин (тут – це $\overline{\rho}\partial\tilde{\psi}^e / \partial\,\tilde{\in}_{ij}^e$) має додаткову й приховану залежність від цієї функції. Введення величини приведеної щільності матеріалу $\overline{\rho}^\theta$, як показує формула (35), ситуацію не змінює.

При застосуванні формули (4) такого втручання немає. На це вказує формула (23).

Розбіжності є наслідком різних базисів для пружних деформацій, а саме початкового стану згідно з формулами (4) та (8).

Оскільки весь вплив температури на питому вільну пружну енергію повинен бути тільки за рахунок параметрів цієї функції, то вираз $\tilde{\psi}^e$, а значить, і $[\tilde{\in}^e]$, суперечить загальним правилам їх призначення.

Ще розглянемо аналогічний випадок, коли присутні тільки пружні та пластичні деформації. Загально визнано, що пластичні деформації – це *залишкові* деформації після повного зняття навантаження на елементарний об’єм матеріалу, тобто після розвантаження. А пружна (незалежно від наявності пластичних) – це різниця між повною та залишковою деформацією. В нашому випадку саме формула (4) застосовує аналогічний підхід, а формула (8) йому суперечить. Тим самим вона суперечить ідеології мультиплікативного представлення процесу деформування.

Якщо напруження *лінійно* залежать від пружних деформацій (характерно для металів), то для ізотропних матеріалів зазвичай припускають, що $\psi^e$ є квадратичним функціоналом від пружних деформацій [6, 7, 12]:

$$\overline{\rho}_0\psi^e = 0.5\lambda\,(3\in_V^e)^2 + G\in_{mn}^e\in_{mn}^e\,, \tag{39}$$

де $\lambda = \mu E / [(1-2\mu)(1+\mu)] = 2G\mu/(1-2\mu)$ та $G = E/[2(1+\mu)]$ є параметрами Ламе, значення яких залежать від температури ($E = E(\theta)$ – модуль Юнга; $\mu = \mu(\theta)$ – коефіцієнт Пуассона); $\in_V^e = (\in_1^e + \in_2^e + \in_3^e)/3$ є середньою пружною деформацією. З (23) та (39) отримуємо закон Гука, який діє в проміжній конфігурації:

$$(\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 = \lambda\delta^{mn}(3\in_V^e) + 2G\delta^{mnij}\in_{ij}^e = E^{mnij}\in_{ij}^e\,, \tag{40}$$

причому в (40) позначено (декартова система координат)

$$E^{mnij} = \lambda\underline{\delta}^{mnij} + 2G\underline{\underline{\delta}}^{mnij}\,;\quad \underline{\delta}^{mnij} = \delta^{mn}\delta^{ij}\,;\quad \underline{\underline{\delta}}^{mnij} = 0.5(\delta^{mi}\delta^{nj} + \delta^{mj}\delta^{ni})\,. \tag{41}$$

В [8-10] замість (39) запропоновано такий варіант:

$$\overline{\rho}^\theta\tilde{\psi}^e = (0.5\tilde{\lambda}(3\,\tilde{\in}_V^e)^2 + \tilde{G}\,\tilde{\in}_{mn}^e\tilde{\in}_{mn}^e)\,, \tag{42}$$

де $\tilde{\in}_V^e = (\tilde{\in}_1^e + \tilde{\in}_2^e + \tilde{\in}_3^e)/3$ є середньою пружною деформацією. Отримали такий закон Гука:

$$(\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 = \vartheta\cdot(\tilde{\lambda}\delta^{mn}(3\,\tilde{\in}_V^e) + 2\tilde{G}\delta^{mnij}\,\tilde{\in}_{ij}^e) = \vartheta\tilde{E}^{mnij}\,\tilde{\in}_{ij}^e = \tilde{\tilde{E}}^{mnij}\,\tilde{\in}_{ij}^e\,. \tag{43}$$

В ньому параметри Ламе повинні бути іншими, ніж в (40), причому компоненти $\tilde{\tilde{E}}^{mnij}$ залежать від функції температури $\vartheta = \vartheta(\theta)$.

Можна розглядати й інші варіанти, але нічого принципово не зміниться.

Якщо в (40) підставити $[\in^e] = [\in] - [\in^\theta]$ (див. формулу (6)), із врахуванням формули (2), тобто $[\in^\theta] = 0.5(\vartheta^2 - 1)[I]$, то буде отримано вираз $(\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0$ через повні деформації $\in_{ij}$ та функцію $\vartheta = \vartheta(\theta)$:

$$\begin{aligned}(\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 &= E^{mnij}(\tilde{\in}_{ij} - \in_{ij}^\theta) = E^{mnij}(\in_{ij} - 0.5(\vartheta^2-1)\delta_{ij}) = \\ &= E^{mnij}\in_{ij} - 0.5(\vartheta^2-1)(\lambda\underline{\delta}^{mnij} + 2G\underline{\underline{\delta}}^{mnij})\delta_{ij} = E^{mnij}\in_{ij} - 0.5(\vartheta^2-1)3k\delta^{mn}\,,\end{aligned} \tag{44}$$

де позначено модуль об’ємного стискання $3k = E(\theta)/(1-2\mu(\theta)) = 3k(\theta)$.

При відносно невеликих змінах температур значення $\vartheta(\theta)$ наближується до одиниці. Про характер та рівень впливу функції $\vartheta = \vartheta(\theta)$ на температурну складову деформацій йшлося в статті [2].

Для випадку нескінченно малих деформацій $\tilde{\in}_{ij} \to \varepsilon_{ij}$; $(\underset{\sim}{\sigma}^{mn})_0 \to \sigma^{mn}$; $\vartheta^2 - 1 = (\vartheta-1)(\vartheta+1) \to 2(\vartheta-1) = = 2\overline{\alpha}_\theta(\theta-\theta_0)$, а рівняння (44) переходять у рівняння Дюамеля-Неймана лінійної термопружності [11, 12]:

$$\sigma^{mn} = E^{mnij}\in_{ij} - 3k\,\overline{\alpha}_\theta(\theta-\theta_0)\delta^{mn}\,. \tag{45}$$

**Числовий приклад**

Розглянемо задачу про напружено-деформований стан поміщеного між жорсткими стінками стрижня довжиною $L$ та довільного перерізу площею $A$, який з початкової температури $\theta_0$ рівномірно прогрітий до температури $\theta$. Вихідні дані поміщено в Таблицю 1.

Таблиця 1

**Вихідні дані**

| $\theta_0$, К | $\theta$, К | $\overline{\alpha}_\theta$, 1/К | $E$, МПа | $\mu$ | $L$, мм |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1000 | $10^{-5}$ | $2\cdot10^5$ | 0.25 | 100 |

З точки зору опору матеріалів [14] температурне подовження стрижня мало б бути $\Delta L^{\theta} = \bar{\alpha}_{\theta}(\theta-\theta_0)\cdot L = 1$ мм. Жорсткі стінки не дають це зробити, тому виникає осьова сила $N$, що стискає стрижень. Він "скорочується" на $\Delta L^{N} = NL/EA = \sigma^{11}L/E = -\Delta L^{\theta} = -\bar{\alpha}_{\theta}(\theta-\theta_0)\cdot L$. Тому маємо осьове напруження

$$\sigma^{11} = -\bar{\alpha}_{\theta}(\theta-\theta_0)E = -10^{-5}(1000-0)\cdot 2\cdot 10^{5} = -2000 \text{ МПа}.$$

Ще застосували мультиплікативний розклад (МР). Згідно з (2), $[X^{\theta}] = \vartheta[I]$, де $\vartheta = \vartheta(\theta) = 1+\bar{\alpha}_{\theta}(\theta-\theta_0)$. Завжди обчислення компонент матриці $[X]$ передує обчисленню компонент матриці $[X^{e}]$, тому з (1) $[X^{e}] = [X][X^{\theta}]^{-1}$. У нашому прикладі в матрице $[X]$ повинно бути $X_{11}=1$, всі $X_{ij}=0$ при $i \neq j$. Щодо $X_{22}=X_{33}$ (відображають зміни розмірів стрижня в поперечних напрямках), то їх значення можемо обчислити лише наближено, як в опорі матеріалів: $X_{22}=X_{33} \approx 1+\in_{22}^{\theta} - \mu \in_{11}^{e} = 1+(1+\mu)\bar{\alpha}_{\theta}(\theta-\theta_0)$. Враховано, що всі температурні деформації $\in_{11}^{\theta} = \in_{22}^{\theta} = \in_{33}^{\theta} = \bar{\alpha}_{\theta}(\theta-\theta_0)$; компонента повної деформації $\in_{11}=0$, тому пружна її частина $\in_{11}^{e} = -\in_{11}^{\theta}$. Отримані розрахункові дані поміщено в таблицях 2 і 3.

Також застосували МР та метод скінченних елементів (МСЕ), реалізовані в авторській програмі ОКА-3D. Використали гексагональні ізопараметричні СЕ другого порядку наближення (Parabolic Solid Hex20). При цьому для набуття встановленої точності в 0.1% по квадратичній нормі зміни деформацій знадобилося три ітерації. Отримали результати, дуже близькі до аналітичних (див. табл.2 та табл.3).

Таблиця 2

**Загальні розрахункові дані**

| Метод | | $[X^{\theta}]$ | $[X]$ | $[X^{e}]$ | $[\in^{\theta}]$ | $\lambda$, МПа | $2G$, МПа |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| МР | 1.01 | $1.01\cdot[I]$ | $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1.0125&0\\0&0&1.0125\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}\kappa&0&0\\0&\eta&0\\0&0&\eta\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}\in_{11}^{\theta}&0&0\\0&\in_{22}^{\theta}&0\\0&0&\in_{33}^{\theta}\end{bmatrix}$ | $0.8\cdot10^{5}$ | $1.6\cdot10^{5}$ |
| МР, МСЕ | | | $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\alpha&0\\0&0&\alpha\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}\kappa&0&0\\0&\chi&0\\0&0&\chi\end{bmatrix}$ | | | |

де $\alpha \approx 1.012484574$, $\kappa = 0.(9900)$; $\eta = 1.00(2475)$, $\chi \approx 1.002459974$, $\in_{11}^{\theta}=\in_{22}^{\theta}=\in_{33}^{\theta}=0.01005$. Значення, поміщені в дужки, періодично повторюються. Довжину виписаних чисел обмежили 9 знаками після розділового знаку.

Таблиця 3

**Варіантні розрахункові дані**

| Варіант | $[\in^{e}]$ або $[\tilde{\in}^{e}]$ | $3\in_{V}^{e}$ або $3\tilde{\in}_{V}^{e}$ | $[\underset{\sim}{\sigma}]_0$, МПа | $[\sigma]$, МПа |
|---|---|---|---|---|
| 1, МР | $\begin{bmatrix}-0.01005&0&0\\0&0.002528125&0\\0&0&0.002528125\end{bmatrix}$ | -0.004993750 | $\begin{bmatrix}-2008&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}-1958&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ |
| 2, МР | $\begin{bmatrix}-0.00985&0&0\\0&0.002478311&0\\0&0&0.002478311\end{bmatrix}$ | -0.004895353 | $\begin{bmatrix}-2008&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}-1958&0&0\\0&5&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ |
| 1, МР, МСЕ | $\begin{bmatrix}-0.01005&0&0\\0&0.002512506&0\\0&0&0.002512506\end{bmatrix}$ | -0.005024987 | $\begin{bmatrix}-2010&0&0\\0&\approx 0&0\\0&0&\approx 0\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}-1960.7&0&0\\0&\approx 0&0\\0&0&\approx 0\end{bmatrix}$ |

Відзначимо, що в першому варіанті повздовжня пружна деформація обчислена вірно: $\in_{11}^{e} = -\in_{11}^{\theta}$, а в другому (за формулою (8)) – ні.

Щодо напружень. Щоб використати однакові пружні характеристики матеріалу, деформації $[\tilde{\in}^{e}]$ перерахували в деформації $[\in^{e}]$ за другою формулою (9), тому напруження в обох варіантах отримали фактично однаковими (з точністю до похибок обчислень). Якщо таку поправку не зробити, то будемо мати $\underset{\sim}{\sigma}_0^{11} = -1968$ МПа та $\sigma^{11} = -1920$ МПа.

Відомо, що формули великих деформацій Гріна-Лагранжа дають дещо збільшені значення, ніж формули малих деформацій, тобто дають меншу жорсткість конструкції, що відображається в зменшених величинах напружень. Саме це ми маємо з компонентою $\sigma^{11}$ (з формул опору матеріалів мали $\sigma^{11} = -2000$ МПа). Щодо появи напружень в поперечних напрямках, то вони відносно малі, викликані наближеним обчисленням компонент $X_{22} = X_{33}$ при МР, а при застосуванні МР з МСЕ майже зникли ( $\sigma^{22} = \sigma^{33} \approx 0.002$ МПа).

**Висновки**

Докладний аналіз ситуації довів, що:

- формула (8) для визначення пружних деформацій суперечить ідеї групових властивостей операторів відображення та ідеї мультиплікативного розкладу, а також принципам побудови функціонала для питомої вільної пружної енергії $\bar{\rho}\psi^e$ і принципу визначення пружної деформації;
- для проведення розрахунків задач термопружності із застосуванням **TL** (Total Lagrange) формулювання, теорії ізотропного гіперпружного матеріалу та мультиплікативного розкладу градієнта руху, потрібно використовувати формули (2) … (4) та (23), а при лінійній залежності між напруженнями та великими пружними деформаціями – закон Гука (40);
- інші варіанти, побудовані на основі формули (8), можна застосовувати як деякі проміжні розрахункові величини, оскільки є формули (9) взаємно-однозначного перерахунку з (8) до (4) та навпаки.

***Аннотация.*** *В Сообщениях 1, 2, 3 и 4 было рассмотрено, каким образом идею мультипликативного разложения Ли градиента упруго-пластичных деформаций Коши-Грина можно применить для обобщенного разложения на случай одновременного присутствия четырех типов деформаций: температурных, упругих, пластичных и ползучести, а также установлены допустимые формы уравнений состояния.*

*В данном Сообщении проанализирована проблема правильного выбора отсчетной конфигурации для упругих деформаций в случае термоупругости: "разгруженной" или "начальной".*

*С целью получения корректных уравнений состояния использован второй закон термодинамики. Определены параметры функционала, описывающего удельную свободную энергию деформируемой системы для обоих случаев. Показано, что вариант "начальной" отсчетной конфигурации приводит к появлению в связи между напряжениями и упругими деформациями дополнительной и неустранимой функции температуры, что противоречит общепринятым постулатам. Вариант "разгруженной" конфигурации свободен от противоречий. Теоретические выводы подкреплены тестовым примером.*

*Ключевые слова:* *большие деформации, мультипликативное разложение, температурные деформации, термоупругость.*

***Abstract.*** *It was considered in previous articles (reports 1,2,3 and 4) how the idea of Lee's multiplicative decomposition of the elastic-plastic Cauchy-Green deformation gradient can be implemented to a generalized decomposition of thermal, elastic, plastic and creep deformation gradient and the admissible forms of the constitutive state equations were established. The objective of the 5-th report is to determine which type of the reference configuration 'unloaded' or 'initial' is more suitable in case of thermal-elasticity with respect to general hyper-elastic postulates.*

*Group properties of reflection operators, the idea of multiplicative decomposition, Second Thermodynamics Law and principle of construction of a functional for a unit elastic free energy as well as a principle of elastic strain determination were used.*

*It was established that in case of thermal-elasticity the 'unloaded' reference configuration satisfies the general postulates of hyper-elasticity for elastic deformations. However, the 'initial' configuration can be used for calculations because definite transition between two states exists.*

*Consideration of presented study will help avoid mistakes during calculations of thermal-elastic processes occurring with big deformations.*

*Keywords:* *large strains, multiplicative decomposition, thermoelasticity.*

**Бібліографічний список використаної літератури**

1. *Рудаков К.М.*, Добронравов О.А. Моделювання великих деформацій. Повідомлення 1. Мультиплікативний розклад при наявності чотирьох типів деформацій // Вісник НТУУ "КПІ". Сер. Машинобудування, 2012. – № 64. – С.7–12.
2. *Рудаков К.М.*, Яковлєв А.І. Моделювання великих деформацій. Повідомлення 2. Температурні деформації // Вісник НТУУ "КПІ". Сер. Машинобудування, 2012. – № 65. – С. 10–18.
3. *Рудаков К.М.*, Добронравов О.А. Моделювання великих деформацій. Повідомлення 3. Теоретичні основи застосування логарифмічної міри деформації Генкі // Наукові вісті НТУУ "КПІ", 2012. – № 6. – С. 86–93.
4. *Рудаков К.М.*, Яковлєв А.І. Моделювання великих деформацій. Повідомлення 4. Загальні співвідношення термопластичності та повзучості при застосуванні логарифмічної міри деформації Генкі // Наукові вісті НТУУ "КПІ", 2013. – №2. – С. 110–118.
5. *Lee E.H.* Elastic–plastic deformations at finite strains // J. Appl. Mech. (ASME), 1969. – 36. – P. 1–6.
6. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т.1. – М.: Наука, 1970. – 492 с.
7. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т.1. – М.: Наука, 1994. – 528 с.
8. *Stojanović R.*, Djurić S., Vujošević L. On finite thermal Deformations // Arch. Mech. Stosow, 1964. – 16. – P. 103–108.

9. *Vujošević L.*, Lubarda V.A. Finite-strain thermoelasticity based on multiplicative decomposition of deformation gradient // Theor. Appl. Mech. Enging, 2002. – 28-29. – P. 379–399.
10. *Lubarda V.A*. Constitutive theories based on the multiplicative decomposition of deformation gradient: Thermoelasticity, elastoplasticity, and biomechanics // Appl. Mech. Rev., 2004. – 57. – N2. – P. 95–108.
11. *Новацкий В*. Теория упругости: Пер. с польск. Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
12. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. Общая теория: Пер. с фр. В.В. Федулова. – М.: Высш. шк., 1983. – 399 с.
13. *Коробейников С.Н.* Строго сопряженные тензоры напряжений и деформаций // Прикладная механика и техническая физика, 2000. – Т.41, №3. – С. 149-154.
14. *Сопротивление материалов*. Учебник для вузов / Под общ. ред. акад. АН УССР Г.С. Писаренко. – 4-е изд., перераб. и доп. – Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1979. – 696 с.

**References**

1. *Rudakov K.M.*, Dobronravov O.A. Modeljuvannja velykyh deformacij. Povidomlennja 1. Mul'typlikatyvnyj rozklad pry najavnosti chotyr'oh typiv deformacij [Modelling of the large strains. The message 1. Multiplicate decomposition in the presence of four types of strains] Journal of Mechanical Engineering of NTUU «KPI», 2012. no 64. pp. 7–12.
2. *Rudakov K.M.*, Jakovlєv A.I. Modeljuvannja velykyh deformacij. Povidomlennja 2. Temperaturni deformacii [Modelling of the large strains. The message 2. The temperature strains] Journal of Mechanical Engineering of NTUU "KPI", 2012. no.65, pp.10–18.
3. *Rudakov K.M.*, Modeljuvannja velykyh deformacij. Povidomlennja 3. Teoretichni osnovy zastosuvannja logarifmichnoї miri deformacії Genki [Modelling of the large strains. The message 3. Theoretical bases of use of a logarithmic measure of strains of Hencky] Research Bulletin of NTUU "KPI", 2013. no.6, pp. 86–93.
4. *Rudakov K.M.*, Jakovlєv A.I. Modeljuvannja velikih deformacij. Povidomlennja 4. Zagal'ni spivvidnoshennja termoplas-tichnosti ta povzuchosti pri zastosuvanni logarifmichnoї miri deformacії Genki [Modelling of the large strains. The message 4. The physical equations of thermoplasticity and creep at use of a logarithmic measure of strains of Hencky] Research Bulletin of NTUU "KPI", 2013. no.2, pp. 110–118.
5. *Lee E.H*. Elastic–plastic deformations at finite strains. J. Appl. Mech. (ASME), 1969. **36**. pp. 1–6.
6. *Sedov L.I.* Mehanika sploshnoj sredy [Mechanic of continua] T.1. Moscow: Nauka, 1970. 492 p.
7. *Sedov L.I.* Mehanika sploshnoj sredy [Mechanic of continua] T.1. Moscow: Nauka, 1994. 528 p.
8. *Stojanović R*., Djurić S., Vujošević L. On finite thermal Deformations. Arch. Mech. Stosow, 1964. **16**. pp. 103–108.
9. *Vujošević L*., Lubarda V.A. Finite-strain thermoelasticity based on multiplicative decomposition of deformation gradient. Theor. Appl. Mech. Enging, 2002. **28-29**. pp. 379–399.
10. *Lubarda V.A*. Constitutive theories based on the multiplicative decomposition of deformation gradient: Thermoelasticity, elastoplasticity, and biomechanics. Appl. Mech. Rev., 2004. **57**. no 2. pp. 95–108.
11. *Novackij V*. Teorija uprugosti: Per. s pol'sk. B.E. Pobedri [Theory Elasticity] Moscow: Mir, 1975. 872 p.
12. *Germain P*. Kurs mehaniki sploshnyh sred. Obwaja teorija [Course of mechanics of continuous environments. General theory] Moskow: Vyssh. shk., 1983. 399 p.
13. *Korobejnikov S.N*. Strogo soprjazhennye tenzory naprjazhenij i deformacij. Prikladnaja mehanika i tehnicheskaja fizika, 2000. **41**. no 3. pp. 149-154.
14. Soprotivlenie materialov. Uchebnik dlja vuzov. Pod obshh. red. akad. AN USSR G.S. Pisarenko. 4-e izd., pererab. i dop. Kyiv: Vishha shkola. Golovnoe izd-vo, 1979. 696 p.

Подана до редакції 19.03.2015