УДК 539.3

Рудаков К.М. д.т.н., Добронравов О.А.
НТУУ «Київський політехнічний інститут» м. Київ, Україна

МОДЕЛЮВАННЯ ВЕЛИКИХ ДЕФОРМАЦІЙ. ПОВІДОМЛЕННЯ 1. МУЛЬТИПЛІКАТИВНИЙ РОЗКЛАД ПРИ НАЯВНОСТІ ЧОТИРЬОХ ТИПІВ ДЕФОРМАЦІЙ

Rudakov K., Dobronravov A.
The National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine (mmi@kpi.ua)

MODELLING OF THE LARGE STRAINS. THE MESSAGE 1. MULTIPLICATE DECOMPOSITION IN THE PRESENCE OF FOUR TYPES OF STRAINS

Проведено узагальнення ідеї мультиплікативного розкладу Лі на випадок одночасної наявності чотирьох типів деформації: температурних, пружних, пластичних і повзучості. Цей розклад використовує групові властивості операторів відображення з абстрактної алгебри.

В результаті трьохкратного мультиплікативного розкладу матриці градієнта деформації Коші-Гріна отримано, що вона дорівнює добутку чотирьох матриць градієнтів, окремо від кожного типу деформацій. Це дозволило записати тензори Гріна-Лагранжа для різних типів деформацій, а також провести точний адитивний розклад матриці просторового градієнта швидкості деформацій по кожному типу деформацій

Для застосування у подальшому енергетично спряженого другого тензора напружень Піола-Кірхгофа, матриця просторового градієнта деформацій швидкості помножена з лівої та правої сторони на транспоновану та звичайну матрицю градієнта пружних деформацій відповідно.

Отримані вирази, за допомогою другого закону термодинаміки, записаного у вигляді нерівності Клаузіуса-Дюгема, будуть використані при встановленні рівнянь теорії термопружно-пластичності та повзучості при великих деформаціях.

Ключові слова: великі деформації, мультиплікативний розклад, термопружність, пластичність, повзучість.

Вступ

Моделювання значних деформацій матеріалу, які одночасно містять деформації різного типу (температурні, пружні, пластичні, повзучості), є складною проблемою. Такий комплекс деформацій може виникати, зокрема, в околу вершини в'язкої тріщини в аварійних режимах роботи енергетичного агрегату з невиявленою заздалегідь тріщиною. Оскільки при цьому елементарні об'єми матеріалу зазнають ще й значні повороти, при чисельному моделюванні таких та аналогічних ситуацій застосування моделі нескінченно малих деформацій абсолютно недоречно.

Можна використати адитивний розклад тензора *швидкостей* деформацій на складові, тобто $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^{e} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{p} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{c} + \dot{\varepsilon}_{ij}^{\theta}$, а також одночасно похідні напружень (зокрема, похідні Яуманна) [1, 2]: "швидкісний" ("rate-type") варіант. Але виявилося [3], що такий алгоритм при моделюванні замкнених циклічних траєкторій навіть пружного деформування (чистий зсув) моделює неприродні осциляції напружень, не приводить до замкненості цих траєкторій, оскільки накопичує завеликі погрішності, пов'язані з наявністю наближення в часових похідних Яуманна (від напружень) та обов'язкового процесу інтегрування в часі, який теж проводиться наближено.

У 1990 р. для пружно-пластичних середовищ запропоновано використовувати адитивну властивість частин переміщень різного типу (варіант "повного формулювання" – "a total formulation Lagrange; TL") [4, 5]. Були застосовані: ідея мультиплікативного розкладу Лі [6] градієнта пружно-пластичних деформацій, швидкості просторових градієнтів цих деформацій та міра логарифмічних деформацій Генкі [4 … 8]. Такий підхід, як виявилося, є вільним від недоліків "швідкостного" підходу, тобто є точнішим.

В роботах [9, 10] та обзорі [11] мультиплікативний розклад використано для термопружних моделей матеріалу. Однак не вдалося виявити робіт, в яких проблема розглядалася би в повному обсязі. Звичайно обмежуються одним мультиплікативним розкладом, зрідка – двома. Наприклад, у роботі [12] розглядалася модель з термопружно-пластичними деформаціями, у [13] – з пружно-пластичними деформаціями та пошкоджуваністю, а у [14] – з термомеханічними та хімічними градієнтами.

Мета циклу Повідомлень: на основі ідеї мультиплікативного розкладу деформацій різної природи створити замкнену систему рівнянь, які дозволять моделювати напружено-деформований стан тіла при одночасної наявності чотирьох типів деформацій: температурних, пружних, пластичних і повзучості.

Мета Повідомлення 1 – застосувати ідею мультиплікативного розкладу Лі на випадок одночасної наявності вказаних вище чотирьох типів деформації; виписати вирази для обчислення компонент тензорів Гріна-Лагранжа різних типів деформацій, а також компонент швидкісних і просторових градієнтів.

Мультиплікативний розклад градієнтів великих деформацій різного типу

Завжди можна записати, що в поточній ситуації положення точки тіла може бути описано вектором $\vec{r} = \vec{r}^{(0)} + \vec{u}^{e} + \vec{u}^{p} + \vec{u}^{c} + \vec{u}^{\theta}$ з компонентами

$$r^{m} = (r^{m})^{(0)} + (u^{m})^{e} + (u^{m})^{p} + (u^{m})^{c} + (u^{m})^{\theta}, \tag{1}$$

де $m = 1,2,3$, а верхні індекси e, p, c, θ визначають тип деформації: пружна, пластична, повзучості, температурна. Уведемо ще такі позначення:

$$\vec{u}^{epc} = \vec{u}^{e} + \vec{u}^{p} + \vec{u}^{c}; \quad \vec{r}^{epc} = \vec{r}^{(0)} + \vec{u}^{epc}; \quad \vec{u}^{pc} = \vec{u}^{p} + \vec{u}^{c}; \quad \vec{r}^{pc} = \vec{r}^{(0)} + \vec{u}^{pc}, \tag{2}$$

тоді вектор $\vec{r} = \vec{r}^{epc} + \vec{u}^{\theta} = \vec{r}^{pc} + \vec{u}^{e} + \vec{u}^{\theta}$ буде мати компоненти

$$r^{m} = (r^{m})^{epc} + (u^{m})^{\theta} = (r^{m})^{pc} + (u^{m})^{e} + (u^{m})^{\theta}. \tag{3}$$

Ще потрібно уяснити, що, наприклад, у просторі $\vec{r}^{pc} = \vec{r}^{(0)} + \vec{u}^{pc}$ немає напружень, оскільки в ньому є тільки необоротні переміщення (деформації). У разі поповнення цього простору температурними та пружними переміщеннями (деформаціями та відповідними пружним деформаціям напруженнями) він буде переходити у простір $\vec{r} = \vec{r}^{epc\theta} = \vec{r}^{pc} + \vec{u}^{e} + \vec{u}^{\theta}$. Інший простір, а саме простір $\vec{r}^{e\theta} = \vec{r}^{(0)} + \vec{u}^{e} + \vec{u}^{\theta}$ є вільним від необоротних переміщень (деформацій), в ньому є температурні та пружні переміщення (деформації та напруження від пружних деформацій). У разі поповнення цього простору необоротними переміщеннями (при незмінних напруженнях та температурах) він буде переходити у простір $\vec{r} = \vec{r}^{epc\theta} = \vec{r}^{e\theta} + \vec{u}^{p} + \vec{u}^{c}$.

У зв'язку з цими обставинами говорять про проміжні конфігурації (intermediate configurations) елементарного об'єму тіла.

Взаємозалежність типів переміщень не відкидається, просто вона враховується в інший спосіб.

Далі всюди для спрощення будемо застосовувати декартову систему координат. Уведемо матрицю градієнтів деформації Коші-Гріна $[X]$ з компонентами $X_{mi} = \nabla_i x^{m} = \delta_{mi} + \partial u^{m} / \partial a^{i}$, де ∇_i – оператор просторової похідної; a^{i} визначають вихідний базис.

Задача про температурний стан завжди передує задаче про напружено-деформований стан, навіть тоді, коли ці дві задачі (ітеративне) розглядаються як зв'язані. Крім того, в земних умовах ніщо не може завадити реалізації температурних деформацій; вони реалізуються практично миттєво (за декілька циклів коливань атомів); в ізотропному матеріалі описуються рівнянням $\varepsilon_{ij}^{\theta} = \delta_{ij}\bar{\alpha}_{\theta}(\theta - \theta_0)$. Тому для задачі про напружено-деформований стан матрицю температурного градієнта $[X^{\theta}]$ з компонентами

$$(X_{mj})^{\theta} = \partial((r^{m})^{(0)} + (u^{m})^{\theta}) / \partial a^{j} = \delta_{mj} + \partial(u^{m})^{\theta} / \partial a^{j} = \delta_{mj}(1 + \bar{\alpha}_{\theta}(\theta - \theta_0)) = \delta_{mj}\vartheta(\theta) \tag{4}$$

можна завжди вважати відомою. Позначено [10]: $\vartheta(\theta) = 1 + \bar{\alpha}_{\theta}(\theta - \theta_0)$.

Тепер проведемо перший мультиплікативний розклад, в якому виділимо температурний градієнт (4) з повного градієнта деформації.

З урахуванням (1) ... (3) отримаємо, що:

$$X_{mi} = \frac{\partial r^{m}}{\partial a^{i}} = \frac{\partial[(r^{m})^{(0)} + (u^{m})^{epc} + (u^{m})^{\theta}]}{\partial a^{i}} = \delta_{mi} + \frac{\partial (u^{m})^{epc}}{\partial a^{i}} + \frac{\partial (u^{m})^{\theta}}{\partial a^{i}} =$$

$$= \delta_{mi} + \frac{\partial (u^{m})^{epc}}{\partial (r^{n})^{\theta}} \frac{\partial (r^{n})^{\theta}}{\partial a^{i}} + \frac{\partial (u^{m})^{\theta}}{\partial a^{i}} = \delta_{mi} + \frac{\partial (u^{m})^{epc}}{\partial (r^{n})^{\theta}} \frac{\partial[(r^{n})^{(0)} + (u^{n})^{\theta}]}{\partial a^{i}} + \frac{\partial (u^{m})^{\theta}}{\partial a^{i}} =$$

$$= \delta_{mi} + \frac{\partial (u^{m})^{epc}}{\partial (r^{n})^{\theta}} \left(\delta_{ni} + \frac{\partial (u^{n})^{\theta}}{\partial a^{i}} \right) + \frac{\partial (u^{m})^{\theta}}{\partial a^{i}} = \delta_{mi} + \frac{\partial (u^{m})^{epc}}{\partial (r^{i})^{\theta}} + \frac{\partial (u^{m})^{epc}}{\partial (r^{n})^{\theta}} \frac{\partial (u^{n})^{\theta}}{\partial a^{i}} + \frac{\partial (u^{m})^{\theta}}{\partial a^{i}} =$$

$$= \left(\delta_{mn} + \frac{\partial (u^{m})^{epc}}{\partial (r^{n})^{\theta}} \right) \left(\delta_{ni} + \frac{\partial (u^{n})^{\theta}}{\partial a^{i}} \right) = \left(\delta_{mn} + \frac{\partial (u^{m})^{epc}}{\partial (r^{n})^{\theta}} \right) (X_{ni})^{\theta}. \tag{5}$$

Аналогічно до $[X]$ введемо матрицю $[X^{epc}]$ з компонентами

$$(X_{mn})^{epc} = \delta_{mn} + \frac{\partial (u^{m})^{epc}}{(\partial r^{n})^{\theta}}. \tag{6}$$

Тоді перший мультиплікативний розклад градієнта деформацій Коші-Гріна (5) запишемо у вигляді

$$X_{mi} = (X_{mn})^{epc} (X_{ni})^{\theta} \quad \text{або} \quad [X] = [X^{epc}][X^{\theta}]. \tag{7}$$

Далі всі подібні (7) записи будемо писати без прийменника "або".

З (7) очевидно, що

$$0 < \det(X_{mi}) = \det(X_{mn})^{epc} \det(X_{ni})^{\theta} = J^{epc} J^{\theta} = J \,. \tag{8}$$

Оскільки в (6) $\partial(u^m)^{epc} / \partial(r^n)^{\theta}$ є похідною в штучно створеному просторі, то для знаходження $(X_{mn})^{epc}$ потрібно використовувати не вираз (6), а перетворену формулу (7):

$$(X_{mn})^{epc} = X_{mi}((X_{ni})^{\theta})^{-1}; \quad [X^{epc}] = [X][X^{\theta}]^{-1} \tag{9}$$

після того, як будуть знайдені компоненти $(X_{ni})^{\theta}$ згідно з (4), а також X_{mi}. Оскільки матриця $[X^{\theta}]$ є діагональною, то обернена матриця $[X^{\theta}]^{-1}$ для (9) знаходиться з $[X^{\theta}]$ лише трьома діями.

Пружні деформації будемо визначати в останню чергу. Тому представимо другий мультиплікативний розклад, в якому виділимо градієнт від деформацій повзучості, оскільки ці деформації можуть з'являтися у матеріалі при напруженнях, менших границі плинності матеріалу. Отже:

$$(X_{mn})^{epc} = \delta_{mn} + \frac{\partial(u^m)^{epc}}{(\partial r^n)^{\theta}} = \delta_{mn} + \frac{\partial(u^m)^{ep}}{(\partial r^n)^{\theta}} + \frac{\partial(u^m)^{c}}{(\partial r^n)^{\theta}} = \delta_{mn} + \frac{\partial(u^m)^{ep}}{\partial(r^j)^{c\theta}}\frac{\partial(r^j)^{c\theta}}{\partial(r^n)^{\theta}} + \frac{\partial(u^m)^{c}}{\partial(r^n)^{\theta}} =$$

$$= \delta_{mn} + \frac{\partial(u^m)^{ep}}{\partial(r^j)^{c\theta}}\frac{\partial[(r^j)^{\theta} + (u^j)^{c}]}{\partial(r^n)^{\theta}} + \frac{\partial(u^m)^{c}}{\partial(r^n)^{\theta}} = \delta_{mn} + \frac{\partial(u^m)^{ep}}{\partial(r^j)^{c\theta}}\left(\delta_{jn} + \frac{\partial(u^j)^{c}}{\partial(r^n)^{\theta}}\right) + \frac{\partial(u^m)^{\theta}}{\partial(r^n)^{\theta}} =$$

$$= \delta_{mn} + \frac{\partial(u^m)^{ep}}{\partial(r^n)^{c\theta}} + \frac{\partial(u^m)^{ep}}{\partial(r^j)^{c\theta}}\frac{\partial(u^j)^{c}}{\partial(r^n)^{\theta}} + \frac{\partial(u^m)^{c}}{\partial(r^n)^{\theta}} = \left(\delta_{mj} + \frac{\partial(u^m)^{ep}}{\partial(r^j)^{c\theta}}\right)\left(\delta_{jn} + \frac{\partial(u^j)^{c}}{\partial(r^n)^{\theta}}\right). \tag{10}$$

Аналогічно $[X^{epc}]$ та $[X^{\theta}]$ введемо матриці $[X^{ep}]$ та $[X^{c}]$ з компонентами

$$(X_{mj})^{ep} = \delta_{mj} + \frac{\partial(u^m)^{ep}}{\partial(r^j)^{c\theta}}; \quad (X_{jn})^{c} = \delta_{jn} + \frac{\partial(u^j)^{c}}{\partial(r^n)^{\theta}}. \tag{11}$$

Тоді другий мультиплікативний розклад градієнта деформацій Коші-Гріна (10) запишемо у вигляді

$$(X_{mn})^{epc} = (X_{mj})^{ep}(X_{jn})^{c}; \quad [X^{epc}] = [X^{ep}][X^{c}], \tag{12}$$

а повний градієнт деформацій Коші-Гріна

$$X_{mi} = (X_{mj})^{ep}(X_{jn})^{c}(X_{ni})^{\theta}; \; [X] = [X^{ep}][X^{c}][X^{\theta}]. \tag{13}$$

З (13) очевидно, що

$$0 < J = \det(X_{mj})^{ep} \det(X_{jn})^{c} \det(X_{ni})^{\theta} = J^{ep} J^{c} J^{\theta}. \tag{14}$$

Оскільки в (11) $\partial(u^m)^{ep} / \partial(r^j)^{c\theta}$ є похідною в штучно створеному просторі, то для знаходження $(X_{mj})^{ep}$ потрібно використовувати не перший вираз із (11), а перетворену формулу (12):

$$(X_{mj})^{ep} = (X_{mn})^{epc}((X_{jn})^{c})^{-1}; \quad [X^{ep}] = [X^{epc}][X^{c}]^{-1} \tag{15}$$

після того, як будуть знайдені компоненти $(X_{jn})^{c}$ з фізичних рівнянь теорії повзучості.

Аналогічно представимо третій (і останній в нашому розгляді) мультиплікативний розклад, в якому виділимо градієнт від деформацій пластичності:

$$(X_{mj})^{ep} = \delta_{mj} + \frac{\partial(u^m)^{ep}}{\partial(r^j)^{c\theta}} = \delta_{mj} + \frac{\partial(u^m)^{e}}{(\partial r^j)^{c\theta}} + \frac{\partial(u^m)^{p}}{(\partial r^j)^{c\theta}} = \delta_{mj} + \frac{\partial(u^m)^{e}}{\partial(r^k)^{pc\theta}}\frac{\partial(r^k)^{pc\theta}}{\partial(r^j)^{c\theta}} + \frac{\partial(u^m)^{p}}{\partial(r^j)^{c\theta}} =$$

$$= \delta_{mj} + \frac{\partial(u^m)^{e}}{\partial(r^k)^{pc\theta}}\frac{\partial[(r^k)^{c\theta} + (u^k)^{p}]}{\partial(r^j)^{c\theta}} + \frac{\partial(u^m)^{p}}{\partial(r^j)^{c\theta}} = \delta_{mj} + \frac{\partial(u^m)^{e}}{\partial(r^k)^{pc\theta}}\left(\delta_{kj} + \frac{\partial(u^k)^{p}}{\partial(r^j)^{c\theta}}\right) + \frac{\partial(u^m)^{p}}{\partial(r^j)^{c\theta}} =$$

$$= \delta_{mj} + \frac{\partial(u^m)^{e}}{\partial(r^j)^{pc\theta}} + \frac{\partial(u^m)^{e}}{\partial(r^k)^{pc\theta}}\frac{\partial(u^k)^{p}}{\partial(r^j)^{c\theta}} + \frac{\partial(u^m)^{p}}{\partial(r^j)^{c\theta}} = \left(\delta_{mk} + \frac{\partial(u^m)^{e}}{\partial(r^k)^{pc\theta}}\right)\left(\delta_{kj} + \frac{\partial(u^k)^{p}}{\partial(r^j)^{c\theta}}\right). \tag{16}$$

За аналогією з $[X^{\theta}]$ та $[X^{c}]$ введемо матриці $[X^{e}]$ та $[X^{p}]$ з компонентами

$$(X_{mk})^{e} = \delta_{mk} + \frac{\partial(u^m)^{e}}{\partial(r^k)^{pc\theta}}; \quad (X_{kj})^{p} = \delta_{kj} + \frac{\partial(u^k)^{p}}{\partial(r^j)^{c\theta}}. \tag{17}$$

Тоді *третій* мультиплікативний розклад градієнта деформацій Коші-Гріна (16) запишемо у вигляді

$$(X_{mj})^{ep} = (X_{mk})^{e}(X_{kj})^{p}; \quad [X^{ep}] = [X^{e}][X^{p}], \tag{18}$$

а повний градієнт деформацій Коші-Гріна

$$X_{mi} = (X_{mk})^{e}(X_{kj})^{p}(X_{jn})^{c}(X_{ni})^{\theta}; \quad [X] = [X^{e}][X^{p}][X^{c}][X^{\theta}]. \tag{19}$$

З (19) очевидно, що

$$0 < J = \det(X_{mk})^e \det(X_{kj})^p \det(X_{jn})^c \det(X_{ni})^\theta = J^e J^p J^c J^\theta . \quad (20)$$

Оскільки у (17) $\partial(u^m)^e / \partial(r^k)^{pc\theta}$ є похідною в штучно створеному просторі, то для знаходження $(X_{mk})^e$ потрібно використовувати не перший вираз із (17), а перетворену формулу (18):

$$(X_{mk})^e = (X_{mj})^{ep}((X_{kj})^p)^{-1}; \quad [X^e] = [X^{ep}][X^p]^{-1} \quad (21)$$

після того, як будуть знайдені компоненти $(X_{kj})^p$ з фізичних рівнянь теорії пластичності.

Якщо деформації якогось типу відсутні, то відповідна матриця градієнтів є одиничною матрицею $[I]$ з одиничним детермінантом, а з формул (5) … (21) видаляються непотрібні розклади, а також символи позначення відповідних типів деформацій.

Тензори Гріна-Лагранжа різних типів деформацій (декартові координати)

Матриця $[X^\theta]$, що уведена виразом (4), містить просторові похідні від температурних переміщень, тобто презентує тільки температурний градієнт. Тому можемо записати, що матриця $[\in^\theta]$ із компонент правого тензора температурних деформацій $\in^\theta_{mn}$ може бути обчислена, із застосуванням виразу (4), як

$$[\in^\theta] = 0.5([X^\theta]^T[X^\theta] - [I]) = 0.5([C^\theta] - [I]) = 0.5(\vartheta^2(\theta) - 1)[I] . \quad (22)$$

Аналогічно (22) можемо записати, що

$$[\in^c] = 0.5([X^c]^T[X^c] - [I]) = 0.5([C^c] - [I]); \quad [\in^p] = 0.5([X^p]^T[X^p] - [I]) = 0.5([C^p] - [I]); \quad (23)$$

$$[\in^e] = 0.5([X^e]^T[X^e] - [I]) = 0.5([C^e] - [I]); \quad [\in] = 0.5([X]^T[X] - [I]) = 0.5([C] - [I]) . \quad (24)$$

Швидкісні та просторові градієнти

Виразом

$$\dot{X}_{mi} = \partial X_{mi} / \partial t , \quad (25)$$

уведемо матрицю швидкості градієнтів деформацій. Підставимо вираз третього мультиплікативного розкладу (19), тобто $X_{mi} = (X_{mk})^e (X_{kj})^p (X_{jn})^c (X_{ni})^\theta$, у (25):

$$\dot{X}_{mi} = \partial((X_{mk})^e(X_{kj})^p(X_{jn})^c(X_{ni})^\theta)/\partial t = (\dot{X}_{mk})^e(X_{kj})^p(X_{jn})^c(X_{ni})^\theta + (X_{mk})^e(\dot{X}_{kj})^p(X_{jn})^c(X_{ni})^\theta +$$

$$+(X_{mk})^e(X_{kj})^p(\dot{X}_{jn})^c(X_{ni})^\theta + (X_{mk})^e(X_{kj})^p(X_{jn})^c(\dot{X}_{ni})^\theta ;$$

$$[\dot{X}] = [\dot{X}^e][X^p][X^c][X^\theta] + [X^e][\dot{X}^p][X^c][X^\theta] + [X^e][X^p][\dot{X}^c][X^\theta] + [X^e][X^p][X^c][\dot{X}^\theta] . \quad (26)$$

Уведемо матрицю "просторового градієнта швидкості деформацій"

$$L_{mn} = \partial\dot{r}^m / \partial r^n = \partial\dot{u}^m / \partial r^n = \dot{X}_{mi}(X_{ni})^{-1}; \quad [L] = [\dot{X}][X]^{-1} . \quad (27)$$

Дійсно, оскільки $dr^m = X_{mi} da^i$ та $d(da^i)/dt \equiv 0$, то $d\dot{r}^m = dr^m / dt = d(X_{mi} da^i)/dt = (d(X_{mi})/dt) da^i +$ $+ X_{mi} d(da^i)/dt = \dot{X}_{mi} da^i = \dot{X}_{mi}(X_{ni})^{-1} dr^n$.

З використанням (26) та (19) вираз для компонент L_{mn} з (27) можна записати у вигляді

$$L_{mn} = \dot{X}_{mi}(X_{ni})^{-1} = ((\dot{X}_{mk})^e(X_{kj})^p(X_{jn})^c(X_{ni})^\theta + (X_{mk})^e(\dot{X}_{kj})^p(X_{jn})^c(X_{ni})^\theta + (X_{mk})^e(X_{kj})^p(\dot{X}_{jn})^c(X_{ni})^\theta +$$

$$+(X_{mk})^e(X_{kj})^p(X_{jn})^c(\dot{X}_{ni})^\theta)((X_{nq})^e(X_{qr})^p(X_{rs})^c(X_{si})^\theta)^{-1} =$$

$$= (\dot{X}_{mk})^e(X_{kj})^p(X_{jn})^c(X_{ni})^\theta((X_{si})^\theta)^{-1}((X_{rs})^c)^{-1}((X_{qr})^p)^{-1}((X_{nq})^e)^{-1} +$$

$$+(X_{mk})^e(\dot{X}_{kj})^p(X_{jn})^c(X_{ni})^\theta((X_{si})^\theta)^{-1}(X_{rs})^{c-1}((X_{qr})^p)^{-1}((X_{nq})^e)^{-1} +$$

$$+(X_{mk})^e(X_{kj})^p(\dot{X}_{jn})^c(X_{ni})^\theta((X_{si})^\theta)^{-1}((X_{rs})^c)^{-1}((X_{qr})^p)^{-1}((X_{nq})^e)^{-1} +$$

$$+(X_{mk})^e(X_{kj})^p(X_{jn})^c(\dot{X}_{ni})^\theta((X_{si})^\theta)^{-1}((X_{rs})^c)^{-1}((X_{qr})^p)^{-1}((X_{nq})^e)^{-1} =$$

$$= (\dot{X}_{mk})^e((X_{nk})^e)^{-1} + (X_{mk})^e[(\dot{X}_{kj})^p((X_{qj})^p)^{-1}]((X_{nq})^e)^{-1} + (X_{mk})^e[(X_{kj})^p(\dot{X}_{jn})^c((X_{rn})^c)^{-1}((X_{qr})^p)^{-1}]((X_{nq})^e)^{-1} +$$

$$+(X_{mk})^e[(X_{kj})^p(X_{jn})^c(\dot{X}_{ni})^\theta((X_{si})^\theta)^{-1}((X_{rs})^c)^{-1}((X_{qr})^p)^{-1}((X_{nq})^e)^{-1} . \quad (28)$$

Тут використано правило: для квадратних матриць $\left([A][B]\right)^{-1} = [B]^{-1}[A]^{-1}$, а також, що, наприклад, спочатку маємо $(X_{ni})^\theta((X_{si})^\theta)^{-1} = \delta_{ns}$, а потім $\delta_{ns}((X_{rs})^c)^{-1} = ((X_{nr})^c)^{-1}$.

Уведемо позначення для частин (28):

$$(\underset{\sim}{L}_{kq})^p = (\dot{X}_{kj})^p((X_{qj})^p)^{-1}; \quad [\underset{\sim}{L}^p] = [\dot{X}^p][X^p]^{-1}; \quad (29)$$

$$(\underset{\sim}{L}_{kq})^c = (X_{kj})^p(\dot{X}_{jn})^c((X_{rn})^c)^{-1}((X_{qr})^p)^{-1}; \quad [\underset{\sim}{L}^c] = [X^p][\dot{X}^c][X^c]^{-1}[X^p]^{-1}; \quad (30)$$

$$(\underset{\sim}{L}_{kq})^{\theta} = (X_{kj})^{p}(X_{jn})^{c}(\dot{X}_{ni})^{\theta}((X_{si})^{\theta})^{-1}((X_{rs})^{c})^{-1}((X_{qr})^{p})^{-1}; \quad [\underset{\sim}{L}^{\theta}] = [X^{p}][X^{c}][\dot{X}^{\theta}][X^{\theta}]^{-1}[X^{c}]^{-1}[X^{p}]^{-1}; \tag{31}$$

$$(L_{mn})^{e} = (\dot{X}_{mk})^{e}((X_{nk})^{e})^{-1}; \quad [L^{e}] = [\dot{X}^{e}][X^{e}]^{-1}; \tag{32}$$

$$(L_{mn})^{p} = (X_{mk})^{e}(\underset{\sim}{L}_{kq})^{p}((X_{nq})^{e})^{-1}; \quad [L^{p}] = [X^{e}][\underset{\sim}{L}^{p}][X^{e}]^{-1}; \tag{33}$$

$$(L_{mn})^{c} = (X_{mk})^{e}(\underset{\sim}{L}_{kq})^{c}((X_{nq})^{e})^{-1}; \quad [L^{c}] = [X^{e}][\underset{\sim}{L}^{c}][X^{e}]^{-1}; \tag{34}$$

$$(L_{mn})^{\theta} = (X_{mk})^{e}(\underset{\sim}{L}_{kq})^{\theta}((X_{nq})^{e})^{-1}; \quad [L^{\theta}] = [X^{e}][\underset{\sim}{L}^{\theta}][X^{e}]^{-1}. \tag{35}$$

Тоді остаточно одержали (точний) адитивний розклад матриці "просторового градієнта швидкості деформацій":

$$L_{mn} = (L_{mn})^{e} + (L_{mn})^{p} + (L_{mn})^{c} + (L_{mn})^{\theta}; \quad [L] = [L^{e}] + [L^{p}] + [L^{c}] + [L^{\theta}]. \tag{36}$$

Оскільки в загальному випадку матриця $[X]$ з компонент X_{mi} не є симетричною, то й матриці з компонентами $(L_{mn})^{e}$, $(\underset{\sim}{L}_{kq})^{p}$, $(L_{mn})^{p}$, … можуть бути не симетричними. Із вказаних матриць можна виділити їх симетричні

$$(\underset{\sim}{d}_{kq})^{p} = ((\underset{\sim}{L}_{kq})^{p} + (\underset{\sim}{L}_{qk})^{p})/2; \quad [\underset{\sim}{d}^{p}] = ([\underset{\sim}{L}^{p}] + [\underset{\sim}{L}^{p}]^{T})/2; \tag{37}$$

$$(\underset{\sim}{d}_{kq})^{c} = ((\underset{\sim}{L}_{kq})^{c} + (\underset{\sim}{L}_{qk})^{c})/2; \quad [\underset{\sim}{d}^{c}] = ([\underset{\sim}{L}^{c}] + [\underset{\sim}{L}^{c}]^{T})/2; \tag{38}$$

$$(\underset{\sim}{d}_{kq})^{\theta} = ((\underset{\sim}{L}_{kq})^{\theta} + (\underset{\sim}{L}_{qk})^{\theta})/2; \quad [\underset{\sim}{d}^{\theta}] = ([\underset{\sim}{L}^{\theta}] + [\underset{\sim}{L}^{\theta}]^{T})/2; \tag{39}$$

$$(d_{mn})^{e} = ((L_{mn})^{e} + (L_{nm})^{e})/2; \quad [d^{e}] = ([L^{e}] + [L^{e}]^{T})/2; \tag{40}$$

$$(d_{mn})^{p} = ((L_{mn})^{p} + (L_{nm})^{p})/2; \quad [d^{p}] = ([L^{p}] + [L^{p}]^{T})/2; \tag{41}$$

$$(d_{mn})^{c} = ((L_{mn})^{c} + (L_{nm})^{c})/2; \quad [d^{c}] = ([L^{c}] + [L^{c}]^{T})/2; \tag{42}$$

$$(d_{mn})^{\theta} = ((L_{mn})^{\theta} + (L_{nm})^{\theta})/2; \quad [d^{\theta}] = ([L^{\theta}] + [L^{\theta}]^{T})/2 \tag{43}$$

та несиметричні

$$(\underset{\sim}{w}_{kq})^{p} = ((\underset{\sim}{L}_{kq})^{p} - (\underset{\sim}{L}_{qk})^{p})/2; \quad [\underset{\sim}{w}^{p}] = ([\underset{\sim}{L}^{p}] - [\underset{\sim}{L}^{p}]^{T})/2; \tag{44}$$

$$(\underset{\sim}{w}_{kq})^{c} = ((\underset{\sim}{L}_{kq})^{c} - (\underset{\sim}{L}_{qk})^{c})/2; \quad [\underset{\sim}{w}^{c}] = ([\underset{\sim}{L}^{c}] - [\underset{\sim}{L}^{c}]^{T})/2; \tag{45}$$

$$(\underset{\sim}{w}_{kq})^{\theta} = ((\underset{\sim}{L}_{kq})^{\theta} - (\underset{\sim}{L}_{qk})^{\theta})/2; \quad [\underset{\sim}{w}^{\theta}] = ([\underset{\sim}{L}^{\theta}] - [\underset{\sim}{L}^{\theta}]^{T})/2; \tag{46}$$

$$(w_{mn})^{e} = ((L_{mn})^{e} - (L_{nm})^{e})/2; \quad [w^{e}] = ([L^{e}] - [L^{e}]^{T})/2; \tag{47}$$

$$(w_{mn})^{p} = ((L_{mn})^{p} - (L_{nm})^{p})/2; \quad [w^{p}] = ([L^{p}] - [L^{p}]^{T})/2; \tag{48}$$

$$(w_{mn})^{c} = ((L_{mn})^{c} - (L_{nm})^{c})/2; \quad [w^{c}] = ([L^{c}] - [L^{c}]^{T})/2; \tag{49}$$

$$(w_{mn})^{\theta} = ((L_{mn})^{\theta} - (L_{nm})^{\theta})/2; \quad [w^{\theta}] = ([L^{\theta}] - [L^{\theta}]^{T})/2 \tag{50}$$

частини, які в сумі дають матриці $[L^{e}]$, $[\underset{\sim}{L}^{p}]$, $[L^{p}]$ … відповідно, зокрема:

$$[L^{e}] = [d^{e}] + [w^{e}]; \ [L^{p}] = [d^{p}] + [w^{p}]; \ [L^{c}] = [d^{c}] + [w^{c}]; \ [L^{\theta}] = [d^{\theta}] + [w^{\theta}], \tag{51}$$

Вираз (36) тепер може бути записаним як

$$[L] = [d^{e}] + [w^{e}] + [d^{p}] + [w^{p}] + [d^{c}] + [w^{c}] + [d^{\theta}] + [w^{\theta}]. \tag{52}$$

Пояснимо, що, зокрема, матриця $[\underset{\sim}{d}^{p}]$ містить компоненти $(\underset{\sim}{d}_{kq})^{p}$ модифікованого швидкісного тензора пластичних деформацій, а $[\underset{\sim}{w}^{p}]$ – його вихору $(\underset{\sim}{w}_{kq})^{p}$. Модифікація полягає у тому, що простір, в якому визначаються ці матриці, є проміжним (*intermediate configuration*), в якому відсутні напруження.

Якщо помножити L_{mn} з лівої та з правої сторони на $(X_{m\mu})^{e} = ((X_{\mu m})^{e})^{T}$ та $(X_{n\nu})^{e}$ відповідно, отримаємо нову матрицю:

$$\bar{L}_{\mu\nu} = (X_{m\mu})^{e} L_{mn} \ (X_{n\nu})^{e}; \quad [\bar{L}] = [X^{e}]^{T}[L][X^{e}], \tag{53}$$

Матриця $[\bar{L}]$ має чотири складові, як і $[L]$ у (36), тобто

$$\bar{L}_{\mu\nu} = (\bar{L}_{\mu\nu})^{e} + (\bar{L}_{\mu\nu})^{p} + (\bar{L}_{\mu\nu})^{c} + (\bar{L}_{\mu\nu})^{\theta}; \quad [\bar{L}] = [\bar{L}^{e}] + [\bar{L}^{p}] + [\bar{L}^{c}] + [\bar{L}^{\theta}], \tag{54}$$

де з урахуванням виразу (32) для $(L_{mn})^{e}$ перша складова:

$$(\bar{L}_{\mu\nu})^{e} = (X_{m\mu})^{e}(L_{mn})^{e}(X_{n\nu})^{e} = (X_{m\mu})^{e}(\dot{X}_{mi})^{e}((X_{ni})^{e})^{-1}(X_{n\nu})^{e} = (X_{m\mu})^{e}(\dot{X}_{m\nu})^{e}; \ [\bar{L}^{e}] = [X^{e}]^{T}[\dot{X}^{e}]. \tag{55}$$

Друга складова, з урахуванням виразу (33) для $(L_{mn})^{p}$:

$$(\bar{L}_{\mu\nu})^p = (X_{m\mu})^e (L_{mn})^p (X_{n\nu})^e = (X_{m\mu})^e (X_{mj})^e (\underset{\sim}{L}_{ji})^p ((X_{ni})^e)^{-1} (X_{n\nu})^e = (X_{m\mu})^e (X_{mj})^e (\underset{\sim}{L}_{j\nu})^p = (C_{\mu j})^e (\underset{\sim}{L}_{j\nu})^p ;$$

$$[\bar{L}^p] = [X^e]^T [L^p][X^e] = [X^e]^T \left([X^e][\underset{\sim}{L}^p][X^e]^{-1}\right)[X^e] = ([X^e]^T [X^e])[\underset{\sim}{L}^p]([X^e]^{-1}[X^e]) = [C^e][\underset{\sim}{L}^p] , \qquad (56)$$

де уведена симетрична матриця

$$(C_{\mu j})^e = (X_{m\mu})^e (X_{mj})^e ; \quad [C^e] = [X^e]^T [X^e] , \qquad (57)$$

яка містить компоненти правого "пружного" тензора Коші-Гріна, а матриця $[\underset{\sim}{L}^p]$ з компонентами $(\underset{\sim}{L}_{j\nu})^p$ відповідає (29).

Третя та четверта складові записуються аналогічно (56), з урахуванням виразів (34) та (35) для $(L_{mn})^c$ та $(L_{mn})^\theta$ відповідно:

$$(\bar{L}_{\mu\nu})^c = (X_{m\mu})^e (L_{mn})^c (X_{n\nu})^e = (X_{m\mu})^e (X_{mj})^e (\underset{\sim}{L}_{ji})^c ((X_{ni})^e)^{-1} (X_{n\nu})^e = (X_{m\mu})^e (X_{mj})^e (\underset{\sim}{L}_{j\nu})^c = (C_{\mu j})^e (\underset{\sim}{L}_{j\nu})^c ;$$

$$[\bar{L}^c] = [X^e]^T [L^c][X^e] = [X^e]^T ([X^e][\underset{\sim}{L}^c][X^e]^{-1})[X^e] = ([X^e]^T [X^e])[\underset{\sim}{L}^c]([X^e]^{-1}[X^e]) = [C^e][\underset{\sim}{L}^c] ; \qquad (58)$$

$$(\bar{L}_{\mu\nu})^\theta = (X_{m\mu})^e (L_{mn})^\theta (X_{n\nu})^e = (X_{m\mu})^e (X_{mj})^e (\underset{\sim}{L}_{ji})^\theta ((X_{ni})^e)^{-1} (X_{n\nu})^e = (X_{m\mu})^e (X_{mj})^e (\underset{\sim}{L}_{j\nu})^\theta = (C_{\mu j})^e (\underset{\sim}{L}_{j\nu})^\theta ;$$

$$[\bar{L}^\theta] = [X^e]^T [L^\theta][X^e] = [X^e]^T ([X^e][\underset{\sim}{L}^\theta][X^e]^{-1})[X^e] = ([X^e]^T [X^e])[\underset{\sim}{L}^\theta]([X^e]^{-1}[X^e]) = [C^e][\underset{\sim}{L}^\theta] . \qquad (59)$$

Аналогічно (51) маємо, що, зокрема

$$(\bar{L}_{\mu\nu})^e = (\bar{d}_{\mu\nu})^e + (\bar{w}_{\mu\nu})^e ; \quad [\bar{L}^e] = [\bar{d}^e] + [\bar{w}^e] . \qquad (60)$$

Отже, замість (54) можемо записати, що

$$\bar{L}_{\mu\nu} = ((\bar{d}_{\mu\nu})^e + (\bar{w}_{\mu\nu})^e) + (C_{\mu j})^e ((\underset{\sim}{d}_{j\nu})^p + (\underset{\sim}{w}_{j\nu})^p + (\underset{\sim}{d}_{j\nu})^c + (\underset{\sim}{w}_{j\nu})^c + (\underset{\sim}{d}_{j\nu})^\theta + (\underset{\sim}{w}_{j\nu})^\theta) ;$$

$$[\bar{L}] = ([\bar{d}^e] + [\bar{w}^e]) + [C^e]([\underset{\sim}{d}^p] + [\underset{\sim}{w}^p] + [\underset{\sim}{d}^c] + [\underset{\sim}{w}^c] + [\underset{\sim}{d}^\theta] + [\underset{\sim}{w}^\theta]) . \qquad (61)$$

Вирази (52) та (61) застосовуються при моделюванні великих деформацій на заміну виразу $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^e_{ij} + \dot{\varepsilon}^p_{ij} + \dot{\varepsilon}^c_{ij} + \dot{\varepsilon}^\theta_{ij}$, що відповідає "швидкісному" ("rate-type") підходу. Зокрема, вони дозволяють встановити характер формул пластичності та повзучості при великих деформаціях.

Висновки

Отримані результати свідчать, що ідея мультиплікативного розкладу Лі може бути застосована при одночасній наявності чотирьох типів деформації: температурних, пружних, пластичних і повзучості.

Більш того, очевидно, що такий розклад можна проводити при необмеженої кількості типів деформації, якщо вводити відповідні проміжні геометричні простори. А характерна "блочна циклічність" у формулах дозволяє це робити без труднощів, особливо при використанні матричної форми запису. При відсутності деяких типів деформацій відповідні спрощені формули можна отримувати із загальних шляхом заміни відповідних матриць на одиничні.

Вирази (52), (61) та інші можна використовувати при встановленні рівнянь теорії термопружно-пластичності та повзучості при великих деформаціях.

Саме цьому будуть присвячені наступні Повідомлення. Крім того, будуть докладно розглянуті питанні про міру деформацій Генкі, відповідну їй міру напружень та про місце ефективного застосуванні цієї міри в моделюванні великих деформацій.

Аннотация. *Проведено обобщение идеи мультипликативного разложения Ли на случай одновременного наличия четырех типов деформации: температурных, упругих, пластических и ползучести. Это разложение использует групповые свойства операторов отображения из абстрактной алгебры.*

В результате трехкратного мульпликативного разложения матрицы градиента деформации Коши-Грина получено, что она равна произведению четырех матриц градиентов, отдельно от каждого типа деформаций. Это позволило записать тензоры Грина-Лагранжа для различных типов деформаций, а также провести точное аддитивное разложение матрицы пространственного градиента скорости деформации по каждому типу деформаций.

Для применения в дальнейшем энергетически сопряженного второго тензора напряжений Пиола-Кирхгофа, матрица пространственного градиента скорости деформаций умножена с левой и правой стороны на транспонированную и обычную матрицу градиента упругих деформаций соответственно.

Полученные выражения, с помощью второго закона термодинамики, записанного в виде неравенства Клаузиуса-Дюгема, будут использоваться при установлении уравнений теории термоупруго-пластичности и ползучести при больших деформациях.

Ключевые слова: *большие деформации, мультипликативное разложение, термоупругость, пластичность, ползучесть.*

Abstract. *The authors generalizes an idea of Lee's multiplicative decomposition for the case of simultaneous presence of four types of strains: thermal, elastic, plastic and creep. This decomposition uses group properties of operators of reflection from an abstract algebra.*

Using multiplicative decomposition of matrix of Cauchy-Green strain gradient for three times, the matrix is found to be equal to the product of four matrices of gradients separately from each type of strain. This allowed writing Green's-Lagrange's tensors for the different types of strains, as well as exactly additive decomposition of the matrix of the spatial gradient of the strain rate for each type of strain.

The matrix of the spatial gradient of strain rate is multiplied on the transpose matrix of the gradient of the elastic strain on the left side and on the normal matrix of the gradient of the elastic strain on the right side for use of the energetically integrated second stress tensor of Piola-Kirhgof.

The resulting expressions will be used for an establishment of the equations of thermoelasto-plasticity and creep in the case of large strains by means of the second law of the thermodynamics that is written down in the form of Clausius-Duhem's inequality.
Keywords: *large strains, multiplicate decomposition, thermoelastic, plastic, creep.*

1. *Green A.E.*, Naghdi P.M. A general theory of an elastic-plastic continuum // Arch. Rat. Mech. Analysis, 1965. – **18**. – P. 251-281.
2. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности: Пер. с англ. В.В. Кобелева и А.П. Сейраняна под ред. Н.В. Баничука. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
3. *Koji´c M.*, Bathe K-J. Studies of finite element procedures-stress solution of a closed elastic strain path with stretching and shearing using the updated Lagrangian Jaumann formulation // Comput. Struct., 1987. – **26**. – P. 175-179.
4. *Eterović A.L.*, Bathe K-J. A hyperelastic-based large strain elasto–plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures // Int. J. Num. Meth. Enging, 1990. – **30**. – P. 1099-1114.
5. *Weber G.*, Anand L. Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic hyperelastic-viscoplastic solids // Comput. Meth. App. Mech. Enging, 1990. – **79**. – P. 173–202.
6. *Lee E.H.* Elastic–plastic deformations at finite strains // J. Appl. Mech. (ASME), 1969. – **36**. – P. 1–6.
7. *Bathe K-J.* Finite Element Procedures. – New-York: Prentice Hall, 1996. – 1037 p.
8. *Montáns F.J.*, Bathe K-J. Computational issues in large strain elasto-plasticity: an algorithm for mixed hardening and plastic spin // Int. J. Num. Meth. Enging, 2005. – **63**. – P. 159-196.
9. *Stojanović R.*, Djurić S., Vujošević L. On finite thermal Deformations // Arch. Mech. Mech., 1964. – **16**. – P. 103-108.
10. *Vujošević L.*, Lubarda V.A. Finite-strain thermoelasticity based on multiplicative decomposition of deformation gradient // Theor. Appl. Mech. Enging, 2002. – **28-29**. – P. 379-399.
11. *Lubarda V.A.* Constitutive theories based on the multiplicative decomposition of deformation gradient: Thermoelasticity, elastoplasticity, and biomechanics // Appl. Mech. Rev., 2004. – **57**. – N2. – P. 95-108.
12. *Weber G.G.*, Boyce M.C. A framework for finite strain thermoelasto-plastic deformation of Solids // D. Hui, T.J. Kosik, eds., Symp. on Viscoplastic Behavior of New Materials, ASME Winter Annual Meeting Proceedings, 1989. – 1. – P. 17.
13. *Cleja-Tigoiu S.*, Soo´s E. Elastoplastic models with relaxed configurations and internal state variables // Appl. Mech. Rev., 1990. – **43**. – P. 131-151.
14. *Lion A.*, Höfer P. On the phenomenological representation of curing phenomena in continuum mechanics // Arch. Mech., 2007. – **59**. – P. 59-89.

REFERENCES

1. *Green A.E.*, Naghdi P.M. A general theory of an elastic-plastic continuum. Arch. Rat. Mech. Analysis, 1965. **18**. pp. 251-281.
2. *Vashizu K.* Variacionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti [Variational methods in elasticity and plasticity] Moscow: Mir, 1987. 542 p.
3. *Kojic M.*, Bathe K-J. Studies of finite element procedures-stress solution of a closed elastic strain path with stretching and shearing using the updated Lagrangian Jaumann formulation. Comput. Struct., 1987. **26**. pp. 175-179.
4. *Eterović A.L.*, Bathe K-J. A hyperelastic-based large strain elasto–plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures. Int. J. Num. Meth. Enging, 1990. **30**. pp. 1099-1114.
5. *Weber G.*, Anand L. Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic hyperelastic-viscoplastic solids. Comput. Meth. App. Mech. Enging, 1990. **79**. pp. 173–202.
6. *Lee E.H.* Elastic–plastic deformations at finite strains. J. Appl. Mech. (ASME), 1969. **36**. pp. 1–6.
7. *Bathe K-J.* Finite Element Procedures. New-York: Prentice Hall, 1996. 1037 p.
8. *Montáns F.J.*, Bathe K-J. Computational issues in large strain elasto-plasticity: an algorithm for mixed hardening and plastic spin. Int. J. Num. Meth. Enging, 2005. **63**. pp. 159-196.
9. *Stojanović R.*, Djurić S., Vujošević L. On finite thermal Deformations. Arch. Mech. Mech., 1964. **16**. pp. 103-108.
10. *Vujošević L.*, Lubarda V.A. Finite-strain thermoelasticity based on multiplicative decomposition of deformation gradient. Theor. Appl. Mech. Enging, 2002. **28-29**. pp. 379-399.
11. *Lubarda V.A.* Constitutive theories based on the multiplicative decomposition of deformation gradient: Thermoelasticity, elastoplasticity, and biomechanics. Appl. Mech. Rev., 2004. **57**. no 2. pp. 95-108.
12. *Weber G.G.*, Boyce M.C. A framework for finite strain thermoelasto-plastic deformation of Solids. D. Hui, T.J. Kosik, eds., Symp. on Viscoplastic Behavior of New Materials, ASME Winter Annual Meeting Proceedings, 1989. 1. pp. 17.
13. *Cleja-Tigoiu S.*, Soo´s E. Elastoplastic models with relaxed configurations and internal state variables. Appl. Mech. Rev., 1990. **43**. pp. 131-151.
14. *Lion A.*, Höfer P. On the phenomenological representation of curing phenomena in continuum mechanics. Arch. Mech., 2007. **59**. pp. 59-89.