

КРИТЕРІЙ ГРАНИЧНОГО СТАНУ ПЛАСТИЧНИХ АНІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ

С использованием метода моделирования механического поведения анизотропного тела некоторым эквивалентным изотропным разработан критерий текучести и прочности ортотропных материалов при сложном напряженном состоянии. Результаты расчетов согласуются с данными испытаний алюминиевых сплавов при двухосном нагружении в условиях комнатной и низких температур.

Using the method of modelling the mechanical behaviour of an anisotropic body by some equivalent isotropic one, yield and strength criterion of orthotropic materials under complex stress state was developed. Calculation results correspond with test data of aluminium alloys under biaxial stress at room and low temperature conditions.

Вступ.

Розвиток сучасної техніки характеризується широким використанням конструкційних матеріалів з різко вираженими анізотропними властивостями. Розрахунок елементів конструкцій з таких матеріалів вимагає розробки достовірних критеріїв текучості і міцності анізотропних середовищ.

Для оцінки граничного стану анізотропних матеріалів в умовах складного напруженого стану запропоновано ряд феноменологічних критеріїв, яким в просторі напружень відповідають як регулярні, так і сингулярні граничні поверхні [1, 2]. При цьому анізотропні матеріали зазвичай розглядаються як однорідне середовище, властивості якого описуються тензорними величинами певного виду.

Більшість теорій граничного стану пластичних анізотропних середовищ з однаковими властивостями на розтяг і стиск одержано шляхом узагальнення класичних теорій міцності і пластичності ізотропних тіл. До таких критеріїв відносяться критерії Мізеса–Хілла, Норіса–Мак–Кінена, Маріна–Ху, Фішера тощо. Критерії мають вигляд поліномів другої степені і описуються регулярними поверхнями.

Критеріям текучості і міцності, одержаним шляхом узагальнення умови Кулона на анізотропні матеріали, відповідають кусочно-лінійні поверхні.

В роботі [3] розроблено критерій міцності анізотропних пластичних матеріалів, окремими випадками якого є умови Мізеса–Хілла і Кулона для анізотропних тіл.

Експериментальні дослідження показують, що відомі критерії граничного стану, як правило, добре узгоджуються з дослідними даними в певній області напружених станів і тільки для певної групи матеріалів. Тому питання експериментального і теоретичного дослідження граничних станів анізотропних матеріалів при довільній схемі напружень не втратили свою актуальність.

В роботі [4] запропоновано метод моделювання механічної поведінки анізотропного матеріалу за складного напруженого стану за допомогою деякого ізотропного еквівалентного тіла. В представленій статті цей метод використано для розробки критеріїв текучості і міцності анізотропних матеріалів з однаковим опором на розтяг і стиск.

Розробка критерію.

Розглянемо елемент ортотропного тіла, пов'язаний з ортогональною системою координат 1, 2, 3, яка збігається з головними осями анізотропії матеріалу. Відомими є залежності між напруженнями і пластичними деформаціями

$$\sigma'_1 = \sigma'_1(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3); \quad \sigma''_2 = \sigma''_2(\varepsilon''_1, \varepsilon''_2, \varepsilon''_3); \quad \sigma'''_3 = \sigma'''_3(\varepsilon'''_1, \varepsilon'''_2, \varepsilon'''_3); \quad (1)$$

а також границі текучості $\sigma_{T1}; \sigma_{T2}; \sigma_{T3}$ і границі міцності $\sigma_{B1}; \sigma_{B2}; \sigma_{B3}$ при одновісному розтягуванні в напрямках 1, 2, 3.

Вважаємо, що існує таке ізотропне тіло, еквівалентне анізотропному, яке під дією компонент девіаторів напружень $\bar{\sigma}'_j, \bar{\sigma}''_j, \bar{\sigma}'''_j, j = (1, 2, 3)$, приймає такі ж самі пластичні деформації, як анізотропне тіло під дією напружень $\sigma'_1, \sigma''_2, \sigma'''_3$ відповідно за одновісного розтягування. Причому компоненти девіаторів $\bar{\sigma}'_j, \bar{\sigma}''_j, \bar{\sigma}'''_j$ пропорційні відповідним напруженням $\sigma'_1, \sigma''_2, \sigma'''_3$:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}'_1 &= \lambda'_1 \sigma'_1; & \bar{\sigma}''_1 &= \lambda''_1 \sigma''_2; & \bar{\sigma}'''_1 &= \lambda'''_1 \sigma'''_3; \\ \bar{\sigma}'_2 &= \lambda'_2 \sigma'_1; & \bar{\sigma}''_2 &= \lambda''_2 \sigma''_2; & \bar{\sigma}'''_2 &= \lambda'''_2 \sigma'''_3; \\ \bar{\sigma}'_3 &= \lambda'_3 \sigma'_1; & \bar{\sigma}''_3 &= \lambda''_3 \sigma''_2; & \bar{\sigma}'''_3 &= \lambda'''_3 \sigma'''_3, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\lambda'_j, \lambda''_j, \lambda'''_j$ - коефіцієнти пропорційності, які будемо називати коефіцієнтами анізотропії.

Приймаємо, що у випадку об'ємного напруженого стану анізотропного тіла сумарна дія трьох головних напружень $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ на анізотропне тіло буде еквівалентна сумарній дії трьох девіаторів $\bar{\sigma}'_j, \bar{\sigma}''_j, \bar{\sigma}'''_j$ на модельне ізотропне тіло (співвідношення між головними напруженнями $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ в роботі не використовується)

Компоненти девіатора $\bar{\sigma}_j = \bar{\sigma}'_j + \bar{\sigma}''_j + \bar{\sigma}'''_j$ з врахуванням (2) будуть пов'язані з компонентами тензора σ_j , що діє на анізотропне тіло, співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_1 &= \bar{\sigma}'_1 + \bar{\sigma}''_1 + \bar{\sigma}'''_1 = \lambda'_1 \sigma_1 + \lambda''_1 \sigma_2 + \lambda'''_1 \sigma_3; \\ \bar{\sigma}_2 &= \bar{\sigma}'_2 + \bar{\sigma}''_2 + \bar{\sigma}'''_2 = \lambda'_2 \sigma_1 + \lambda''_2 \sigma_2 + \lambda'''_2 \sigma_3; \\ \bar{\sigma}_3 &= \bar{\sigma}'_3 + \bar{\sigma}''_3 + \bar{\sigma}'''_3 = \lambda'_3 \sigma_1 + \lambda''_3 \sigma_2 + \lambda'''_3 \sigma_3.\end{aligned}\quad (3)$$

Згідно з роботою [4] коефіцієнти анізотропії визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}\lambda'_1 &= 2/3; \quad \lambda'_2 = \frac{2 \varepsilon'_2}{3 \varepsilon'_1}; \quad \lambda'_3 = \frac{2 \varepsilon'_3}{3 \varepsilon'_1}; \\ \lambda''_1 &= \frac{2 \sigma'_1 \varepsilon''_1}{3 \sigma''_2 \varepsilon''_1}; \quad \lambda''_2 = \frac{2 \sigma'_1 \varepsilon''_2}{3 \sigma''_2 \varepsilon''_1}; \quad \lambda''_3 = \frac{2 \sigma'_1 \varepsilon''_3}{3 \sigma''_2 \varepsilon''_1}; \\ \lambda'''_1 &= \frac{2 \sigma'_1 \varepsilon'''_1}{3 \sigma'''_3 \varepsilon'''_1}; \quad \lambda'''_2 = \frac{2 \sigma'_1 \varepsilon'''_2}{3 \sigma'''_3 \varepsilon'''_1}; \quad \lambda'''_3 = \frac{2 \sigma'_1 \varepsilon'''_3}{3 \sigma'''_3 \varepsilon'''_1}.\end{aligned}\quad (4)$$

Напруження і деформації в формулах (4) відповідають одному рівню інтенсивності пластичної деформації $\varepsilon'_i = \varepsilon''_i = \varepsilon'''_i = \varepsilon_i$ при одновісному розтягу анізотропного тіла в напрямках 1, 2, 3.

Відомо, що граничний стан більшості ізотропних матеріалів добре описується критерієм Губера-Мізеса. Зважаючи на це, визначимо критерій текучості і міцності ортотропного тіла за умови, що гранична поверхня еквівалентного йому ізотропного тіла відповідає умові $\sigma_i = const$.

За об'ємного напруженого стану еквівалентного ізотропного тіла інтенсивність напружень

$$\bar{\sigma}_i = \sqrt{3} \sqrt{\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2 + \bar{\sigma}_1 \bar{\sigma}_2}$$

Виразивши компоненти девіатора напружень, що діють на ізотропне тіло, через компоненти тензора напружень, прикладених до анізотропного тіла, згідно з формулами (3), отримуємо умову граничного стану анізотропного тіла у вигляді

$$(\lambda'_1 \sigma_1 + \lambda''_1 \sigma_2 + \lambda'''_1 \sigma_3)^2 + (\lambda'_2 \sigma_1 + \lambda''_2 \sigma_2 + \lambda'''_2 \sigma_3)^2 + (\lambda'_3 \sigma_1 + \lambda''_3 \sigma_2 + \lambda'''_3 \sigma_3)(\lambda'_2 \sigma_1 + \lambda''_2 \sigma_2 + \lambda'''_2 \sigma_3) = C. \quad (5)$$

Значення константи C можна знайти, розглядаючи одновісний розтяг анізотропного тіла в напрямку головних осей анізотропії:

$$\begin{aligned}C &= \left((\lambda'_1)^2 + (\lambda'_2)^2 + \lambda'_1 \lambda'_2 \right) \sigma_{T1}^2; \\ C &= \left((\lambda''_1)^2 + (\lambda''_2)^2 + \lambda''_1 \lambda''_2 \right) \sigma_{T2}^2; \\ C &= \left((\lambda'''_1)^2 + (\lambda'''_2)^2 + \lambda'''_1 \lambda'''_2 \right) \sigma_{T3}^2.\end{aligned}\quad (6)$$

Рівняння (5) можна привести до виду

$$A_{11} \sigma_1^2 + A_{22} \sigma_2^2 + A_{33} \sigma_3^2 + A_{12} \sigma_1 \sigma_2 + A_{23} \sigma_2 \sigma_3 + A_{13} \sigma_1 \sigma_3 = A_{11} \sigma_{T1}^2, \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned}A_{11} &= (\lambda'_1)^2 + (\lambda'_2)^2 + \lambda'_1 \lambda'_2; \quad A_{12} = 2 \lambda'_1 \lambda''_1 + 2 \lambda'_2 \lambda''_2 + \lambda'_1 \lambda''_2 + \lambda'_2 \lambda''_1; \\ A_{22} &= (\lambda''_1)^2 + (\lambda''_2)^2 + \lambda''_1 \lambda''_2; \quad A_{23} = 2 \lambda''_1 \lambda'''_1 + 2 \lambda''_2 \lambda'''_2 + \lambda''_1 \lambda'''_2 + \lambda''_2 \lambda'''_1; \\ A_{33} &= (\lambda'''_1)^2 + (\lambda'''_2)^2 + \lambda'''_1 \lambda'''_2; \quad A_{13} = 2 \lambda'_1 \lambda'''_1 + 2 \lambda'_2 \lambda'''_2 + \lambda'_1 \lambda'''_2 + \lambda'_2 \lambda'''_1.\end{aligned}\quad (8)$$

Досліди показують, що коефіцієнти анізотропії $\lambda'_j, \lambda''_j, \lambda'''_j$ для алюмінієвих і титанових сплавів практично не залежать від рівня пластичної деформації. Але для підвищення точності розрахунків при використанні рівняння (7) як умови текучості в формулах (4) деформації слід брати при значенні ε_i , що дорівнює допуску на пластичну деформацію, за яким визначали умовні границі текучості, а напруження $\sigma'_1 = \sigma_{T1}; \sigma''_2 = \sigma_{T2}; \sigma'''_3 = \sigma_{T3}$. При використанні рівняння (7) як умови міцності в формулах (4) деформації можна розраховувати при мінімальному з трьох значень ε_i , що відповідають границям міцності матеріалу σ_{Bk} в трьох напрямках, а напруження $\sigma'_1 = \sigma_{B1}; \sigma''_2 = \sigma_{B2}; \sigma'''_3 = \sigma_{B3}$.

Аналіз критерію і його граничної поверхні.

Рівняння (7) в тривимірному просторі напружень описує поверхню 2-го порядку. Аналіз інваріантів поверхні показує, що при значеннях коефіцієнтів рівняння, що відповідають реальним анізотропним алюмінієвим, магнієвим і титановим сплавам, поверхня представляє собою еліптичний циліндр, вісь якого нахилена до гідростатичної осі простору напружень. На рис. 1 представлено переріз поверхні текучості сплаву АМГ6 при кімнатній температурі площиною, яка проходить через вісь σ_1 і бісектрису σ_* кута $\sigma_2 \sigma_3$.

Оскільки сплав виявився трансверсально ізотропним з однаковими властивостями в напрямках 2 і 3, то його поверхня текучості симетрична відносно площини $\sigma_1 - \sigma_*$, а вісь поверхні і гідростатична вісь лежать в цій площині. Як видно з рисунка, переріз представляє собою дві паралельні прямі, а вісь поверхні складає з гідростатичною віссю кут $2,93^\circ$.

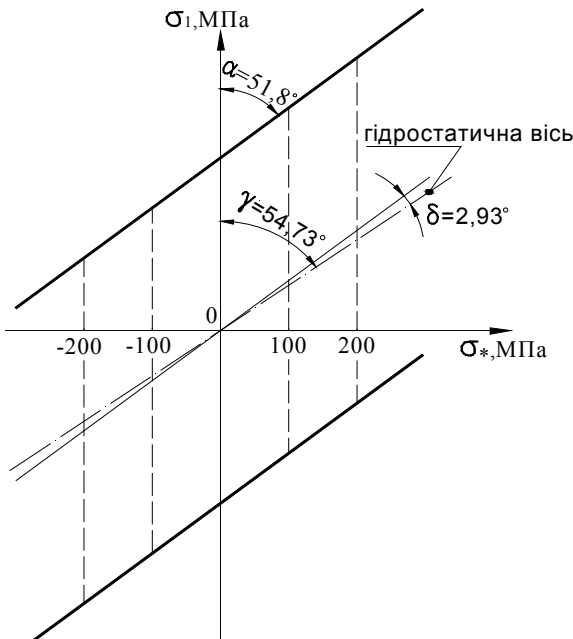


Рис. 1. Переріз поверхні текучості сплаву АМГ6 площиною, яка проходить через вісь σ_1 і бісектрису σ_* кута $\sigma_2 \sigma_3$

Рівняння (7) за своєю структурою збігається з умовою пластичності Мізеса [5] для анізотропного тіла, яка має вигляд однорідного полінома другого степеня. В основній системі координат (головні осі напружень збігаються з головними осями анізотропії) умова містить 6 коефіцієнтів, для визначення яких необхідно провести 6 дослідів.

Запропонована умова (7) містить 6 коефіцієнтів, які є функціями характеристик міцності і пластичності матеріалу і можуть бути визначені з трьох базових дослідів на одновісний розтяг ортотропного тіла в напрямку головних осей анізотропії.

На відміну від критерію Мізеса–Хілла [6], який в основній системі координат містить 3 коефіцієнти, але не враховує вплив гідростатичного тиску на граничний стан матеріалів, запропонований критерій (7) прогнозує, що великий гідростатичний тиск або розтяг може викликати перехід анізотропного матеріалу в пластичний стан або спричинити руйнування.

У випадку плоского напруженого стану для визначення коефіцієнтів умови (7) достатньо два досліді. Це важливо, коли маємо справу з тонколистовим матеріалом, для якого визначення характеристик міцності в напрямку, перпендикулярному до площини листа, є практично неможливим.

Оцінка достовірності критерію.

Для перевірки критерію були використані результати експериментальних досліджень алюмінієвих сплавів АМГ6, АМцС, АЛ19, в умовах плоского напруженого стану [7]. Досліди виконувалися шляхом навантаження трубчастих зразків осьовою силою і внутрішнім тиском. Розраховувалися осьові σ_z і тангенціальні σ_θ напруження, що відповідають границям текучості і міцності матеріалів за різних видів напруженого стану. Границі текучості визначались по кривих $\sigma_i - \varepsilon_i$ за допуском 0,2% на пластичну деформацію.

Для випадку плоского напруженого стану критерій (7) приймає вигляд

$$A_{11}\sigma_z^2 + A_{22}\sigma_\theta^2 + A_{12}\sigma_z\sigma_\theta = C, \tag{9}$$

де $C = A_{11}\sigma_{Tz}$ для умови текучості, $C = A_{11}\sigma_{Bz}$ для умови міцності.

Значення коефіцієнтів рівняння (7) для різних сплавів і температур, розраховані за даними розтягу зразків в осьовому і тангенціальному напрямках, наведені в таблиці

Таблиця

Сплав	Температура, °С	Умова текучості			Умова міцності		
		A ₁₁	A ₂₂	A ₁₂	A ₁₁	A ₂₂	A ₁₂
АМГ6	20	0,344	0,550	-0,256	0,352	0,616	-0,271
	-100	0,340	0,560	-0,344	0,345	0,662	-0,344
	-160	0,337	0,606	-0,364	0,341	0,654	-0,384
АЛ19	20	0,337	0,410	-0,375			
	-100	0,336	0,397	-0,318			
АМцС	-100	0,337	0,494	-0,249	0,339	0,549	-0,274

На рис. 2, 3 і 4 показані криві текучості і міцності сплавів за різних температур, розраховані за умовою (9), а також, для порівняння, за критерієм Кулона, узагальненим на анізотропні матеріали.

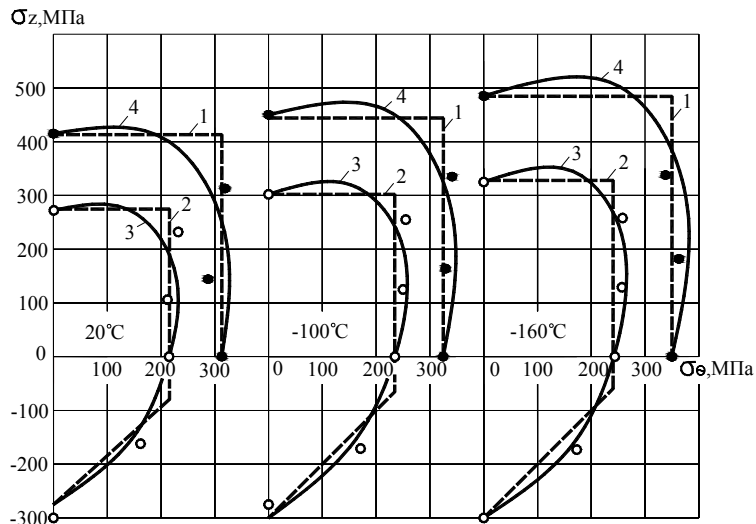


Рис. 2. Криві текучості (2,3) і міцності (1,4) сплаву АМг6 при різних температурах: 1, 2 – за критерієм Кулона для анізотропних матеріалів; 3, 4 – за критерієм (9); світлі точки – границі текучості, темні точки – границі міцності

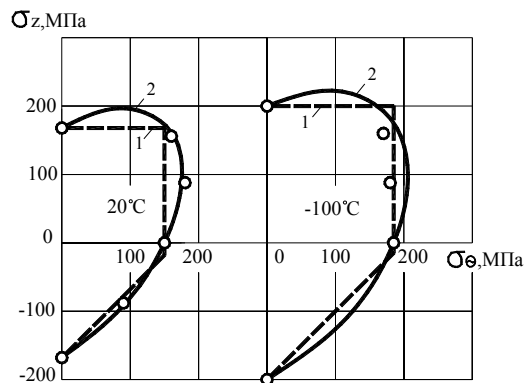


Рис. 3. Криві текучості сплаву АЛ19:
1 – за критерієм Кулона для анізотропних матеріалів (9)

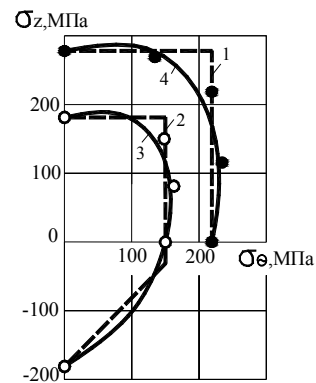


Рис. 4. Криві текучості і міцності сплаву АМцС при $T = -100^{\circ}\text{C}$. Позначення матеріалів, 2 – за такі ж, як на рис. 2

Як видно з рисунків, експериментальні точки, що відповідають границям текучості і міцності матеріалів за різних видів напруженого стану, незначно відхиляються від граничних кривих, розрахованих за умовою (9), Середньоквадратичне відхилення для всіх сплавів не перевищує 5%.

Висновок.

В роботі використано новий метод побудови критеріїв граничного стану анізотропних матеріалів за допомогою модельного ізотропного тіла. Запропонований критерій текучості і міцності ортотропних матеріалів з однаковим опором на розтяг і стиск на відміну від відомих критеріїв враховує вплив на граничний стан матеріалів гідростатичного розтягу або стиску. Параметри, що містяться в критерії, є функціями напружень і пластичних деформацій, які визначаються з трьох базових дослідів на одинісний розтяг в напрямку головних осей анізотропії. Відповідність результатів розрахунків за критерієм (7) з експериментальними даними свідчить про можливість використання запропонованого критерію для інженерних розрахунків на міцність елементів конструкцій з анізотропних матеріалів.

Список літератури.

1. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – К.: Наукова думка, 1976. – 416 с.
2. Гольденблат И.Н., Копнов В.А. Критерий прочности и пластичности конструкционных материалов. – М.: Машиностроение, 1968. – 192 с.
3. Лебедев А.А., Косарчук В.В., Ковальчук Б.И. Исследование скалярных и векторных свойств анизотропных материалов в условиях сложного напряженного состояния. Сообщение I. Об условия текучести анизотропных материалов // Пробл. прочности. – 1982. – № 3. – С. 25 – 31.
4. Ковальчук Б.И. К теории пластического деформирования анизотропных материалов // Пробл. прочности. – 1975. – №9. – С.8 – 12.
5. Mises R. Mechanik der plastischen Formänderungen von Kristallen. Zeitschrift für angew. Mat. and Mech. – 1928. – В.8. – Н.3. – S. 161 – 185.
6. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 408 с.
7. Лебедев А.А., Ковальчук Б.И., Гигиняк Ф.Ф., Ламашевский В.П. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии. – К.: Изд. Дом «Ин Юре», 2003. – 540 с.