УДК 539.3

О.М.Чемерис, канд.техн.наук, доц.
НТУ України "Київський політехнічний інститут ", м.Київ, Україна

КОЛИВАННЯ І СТІЙКІСТЬ КРУГЛИХ ПЛАСТИН З ПРОМІЖНИМИ ОПОРАМИ

Определены высшие частоты и формы симметрических колебаний круглой пластинки с точечной центральной опорой при защемлении, шарнирном и скользящем закреплении края. Для пластинки с упругим защемлением края относительно поворота и с промежуточной круговой опорой определены частоты симметричных колебаний и величины критических сжимающих напряжений. Частоты симметричных колебаний круглой пластинки при упругой заделки внешней опоры вычислены для случаев различных вариантов положения промежуточной опоры (ξ=0.1,0.2…0.8). Коэффициент жесткости по отношению к повороту внешней опоры изменяется в широком диапазоне(δ=0-5000).В этом же диапазоне изменения параметров ξ,δ определены и критические напряжения сжатых симметрически деформируемых круглых пластин.

The highest frequencies and vibrations of symmetrical fluctuation of a circular plate with a dot central support for a jamming, hinge-support with a sliding jamming of edge were determined. The frequencies of symmetrical vibrations and the magnitude of the critical compressive stresses for a plate with an elastic jamming of edge relatively a turn and with an intermediate circular support were determined Frequency of symmetrical oscillation of circular plate in the case elastic fixing its external bearing were calculated for different variants of intermediate support (ξ = 0.1,0.2 ... 0.8). The coefficient of hardness relative to the rotation of the external bearing varies in a wide range (δ = 0-5000). In the same range of parameters ξ, δ are defined the critical stresses compressed and symmetrically deformable circular plates.

Вступ.

Круглі пластинки використовують в різного типу конструкціях в вигляді діафрагм, днищ, пружин. Для підвищення їх жорсткості в центрі пластинки ставлять проміжну зосереджену або кільцеву опору. Досить часто схему з проміжною опорою кріплення використовують в конструкціях навігаційних буїв [1] .Для раціонального проектування таких пластин необхідно знати такі динамічні характеристики як частоти і форми коливань. Перші дві перші частоти симетричних коливань для защемлених та шарнірно закріплених пластинок з проміжною опорою визначені в роботі [2] ,але положення вузлових діаметрів залишились невизначеними. Залишились невизначеними [3],[4] частоти коливань і положення вузлових діаметрів для пластинки з проміжною опорою в випадку ковзної защемленої опори, що типово для поршнів приладів та машин. В випадку кругової проміжної опори, яка розміщена на довільній відстані від центра методика визначення частот і форм приведена в роботі [5].Тут же визначені і частоти коливань ,але тільки для першої форми. В практиці часто виникає необхідність в визначені частот і форм вищих форм коливань. Задача по визначенню частот і форм при власних симетричних коливаннях круглої пластинки з пружною зовнішньою опорою при довільному положенні проміжної не розглядалася. Задача по визначенню критичних навантажень круглої стиснутої пластинки з проміжними опорами розглядалась в роботі [5] в випадку шарнірного та жорсткого закріплення зовнішньої опори. Задача по визначенню критичних навантажень круглої стиснутої пластинки з проміжними опорами розглядалась в випадку пружного закріплення зовнішньої опори. Не розглядалася.

Мета досліджень.

Визначити вищі частоти і форми власних симетричних коливань круглих шарнірно і жорстко закріплених по зовнішньому контуру пластинки при довільному положенні проміжної опори. . Визначити вищі частоти і форми власних симетричних коливань круглих пластин ,у яких зовнішній контур ковзний, при довільному положенні проміжної опори. Знайти критичні напруження стиснутої круглої пластинки при довільному положенні проміжної опори в випадку, коли зовнішнє закріплення опори пружнє.

Основна частина.

Рівняння коливань стиснутої круглої пластинки матиме такий вигляд [4]

$$D(\frac{\partial^2}{\partial^2\rho}+\frac{\partial}{\rho\partial\rho}+\frac{\partial^2}{\rho^2\partial\theta^2})^2 w+b^4 m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

де $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$, ∇^2 – оператор Лапласа,Е-модуль Юнга, μ-коефіцієнт , μ-коефіцієнт Пуассона,

b - зовнішній радіус пластинки, r – змінний радіус пластинки ,

$\rho = r/b$ - відносний змінний радіус пластинки ($0 \le \rho \le 1$).

w-нормальні переміщення точок пластинки,

m - маса пластинки на одиницю площі,

θ - кутова координата,

t - час.

По методу розділення змінних рішення даного рівняння можна записати в вигляді

$$w(\rho,\theta,t) = (C_1 I_n(k\rho) + C_2 J_n(k\rho) + C_3 K_n(k\rho) + C_4 Y_n(k\rho) \cos n\theta \cos \omega t$$

де C_i –сталі величини, I_n, J_n, K_n, Y_n – функції Бесселя, ω- кругова частота коливань, (n=1,2,3…), k - невідоме число (частотний параметр)

$$k^4 = \left(\frac{m\omega^2 b^2}{D}\right)$$

При симетричних коливаннях (n=0) для переміщень пластинки з опорою в центрі формулу для переміщень можна записати [5] в такій спрощеній формі

$$w(\rho,\theta,t) = w(\rho)\cos\omega t$$

де
$$w(\rho) = C_5[Y_0(k\rho) + \frac{2}{\pi}K_0(k\rho)] + C_6[I_0(k\rho) - J_0(k\rho)] \tag{1}$$

Похідні функцій Бесселя визначаються по формулам

$$J_0(x)' = -J_1(x);$$

$$J_0(x)'' = \frac{J_1(x)}{x} - J_0(x)$$

$$J_0(x)''' = (1 - \frac{2}{x^2})J_1(x) + \frac{J_0(x)}{x};$$

$$I_0(x)' = I_1(x);$$

$$I_0(x)'' = -\frac{I_1(x)}{x} + I_0(x);$$

$$I_0(x)''' = (1 + \frac{2}{x^2})I_1(x) - \frac{I_0(x)}{x}$$

$$(K_0(x))' = -K_1(x)$$

$$(K_0(x))'' = K_0(x) + \frac{K_1(x)}{x} \;;$$

$$(K_0(x))''' = -\frac{1}{x}K_0(x) - (1 + \frac{2}{x^2})K_1(x)$$

$$Y_0(x)' = -Y_1(x);$$

$$Y_0(x)'' = \frac{Y_1(x)}{x} - Y_0(x)$$

$$Y_0(x)''' = (1 - \frac{2}{x^2})Y_1(x) + \frac{Y_0(x)}{x}.$$

Рішення в даній спрощеній формі задовольняє умові відсутності переміщень в центрі пластинки

$$w(0)=0$$

При защемленому контурі пластинки маємо

$$w(1) = 0, w'(1) = 0 .$$

Підставляємо в ці рівняння значення функції переміщень (1) і одержуємо однорідну систему рівнянь відносно

$$[Y_0(k) + \frac{2}{\pi}K_0(k)]C_5 + [I_0(k) - J_0(k)]C_6 = 0 ,$$

$$-[Y_1(k) + \frac{2}{\pi}K_0^1(k)]C_5 + [I_1(k) - J_1(k)]C_6 = 0 .$$

Прирівнюємо до нуля визначник даної системи і знаходимо частотне рівняння для визначення параметра k

$$[Y_0(k) + \frac{2}{\pi}K_0(k)][Y_1(k) + J_1(k)] + [Y_1(k) + \frac{2}{\pi}K_1(k)][I_0(k) - J_0(k)] = 0 .$$

Параметр к для різних форм (i=1,2…9) приведено в таблиці 1.Частоту коливань знаходимо із формули

$$\omega = \frac{k^2}{b^2}\sqrt{\frac{D}{m}} .$$

Сталу C_6 виражаємо через C_6 із рівняння

$$C_5[Y_0(k_i\rho)+\frac{2}{\pi}K_0(k_i\rho)]+C_6[I_0(k_i\rho)-J_0(k_i\rho)]=0\,.$$

Із (1) знаходимо функцію переміщень

$$f(\rho)=[Y_0(k_i\rho)+\frac{2}{\pi}K_0(k_i\rho)]-\frac{Y_0(k_i)+\frac{2}{\pi}K_0(k_i)}{I_0(k_i)-J_0(k_i)}[I_0(k_i\rho)-J_0(k_i\rho)]\,.$$

Значення корнів останнього рівняння знаходимо з допомогою оператора в системі MATKAD $[root, f(\rho), \rho, 0,1]=0$

Положення вузлових кілець визначається відносним параметром $\rho=r/b$,який для різних форм (i=1,2…9) приведено в таблиці 1.

Таблиця 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
i	4.76	7.871	11.08	14.14	17.286	20.427	23.567	26.567	29.849
		ρ=0.5033	0.359	0.281	0.23	0.1945	0.1687	0.1489	0.1332
		1	0.638	0.500	0.4099	0.3469	0.3006	0.2653	0.2374
			1	0.721	0.5914	0.5004	0.4337	0.3827	0.3425
				1	0.7721	0.6541	0.5669	0.5003	0.4477
					1	0.8041	0.7062	0.6178	0.5529
						1	0.8328	0.7354	0.6582
							1	0.8225	0.7639
								1	0.8662
									1

При шарнірній опорі маємо такі умови

$$w(1)=0,$$

$$w''(1)+\mu\frac{w'(1)}{k}=0.$$

Частотне рівняння має вигляд

$$(1-\mu)\{[I_0(k)-J_0(k)][Y_1(k)+\frac{2}{\pi}K_1(k)]+[I_1(k)+J_1(k)][Y_0(k)+$$

$$+\frac{2}{\pi}K_0(k)]\}-2k[Y_0(k)I_0(k)+\frac{2}{\pi}J_0(k)K_0(k)]=0.$$

Параметр к для різних форм (i=1,2…9) приведено в таблиці 2. Частоту коливань знаходимо із формули
Із (1) знаходимо функцію переміщень

$$f(\rho)=[Y_0(k_i\rho)+\frac{2}{\pi}K_0(k_i\rho)]-\frac{Y_0(k_i)+\frac{2}{\pi}K_0(k_i)}{I_0(k_i)-J_0(k_i)}[I_0(k_i\rho)-J_0(k_i\rho)]\ .$$

Значення корнів останнього рівняння знаходимо з допомогою оператора в системі MATKAD

$$[root, f(\rho), \rho, 0,1]=0\ .$$

Положення вузлових кілець визначається відносним параметром $\rho=r/b$,який для різних форм (i=1,2…9) приведено в таблиці 2.

Таблиця 2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_i	3.8	7.034	10.18	13.334	16.479	19.633	22.766	25.91	29.052
		ρ=0.5656	0.3903	0.2982	0.2413	0.2025	0.1746	0.1535	0.1369
		1	0.6957	0.5314	0.4229	0.3609	0.3112	0.2735	0.2374
			1	0.7667	0.6203	0.5207	0.449	0.3945	0.3425
				1	0.8101	0.6805	0.5869	0.5157	0.4477
					1	0.8405	0.7248	0.6369	0.5529
						1	0.8628	0.7581	0.6582
							1	0.8793	0.7634
								1	0.8662
									1

В випадку защемленої ковзної опори маємо такі граничні умови

$$w(1)=0;$$
$$w'''(1)+\frac{w''(1)}{k}-\frac{w'(1)}{k^2}=0.$$

Частотне рівняння

$$I_1(k)Y_1(k)-\frac{2}{\pi}J_1(k)K_1(k)=0$$

Сталу C_6 виражаємо через C_6 із рівняння

$$C_5[Y_0(k_i\rho)+\frac{2}{\pi}K_0(k_i\rho)]+C_6[I_0(k_i\rho)-J_0(k_i\rho)]=0\,.$$

Із (1) знаходимо функцію переміщень

$$f(\rho)=Y_0(k_i\rho)+\frac{2}{\pi}K_0(k_i\rho)+\frac{Y_1(k_i)+\dfrac{2}{\pi}K_1(k_i)}{I_1(k_i)+J_1(k_i)}[I_0(k_i\rho)-J_0(k_i\rho)]\ .$$

Значення корнів останнього рівняння знаходимо з допомогою оператора в системі MATKAD $[root, f(\rho),\rho,0,1]=0$.

Значення параметрів k_i, ρ_i для даного випадку приведені в таблиці 3

При симетричних коливаннях (п=0) переміщення для пластинки з проміжною опорою при $r=a$ можна записати [5] в такій формі

$$w(\rho,\theta,t)=w(k\rho)\cos\omega t\ .$$

де $$w(\rho)=-w_o(k\rho)+AJ_0(k\rho)+BI_o(k\rho)\,.\ (2)$$

$$w_o(k\rho)=[J_0(k\rho)Y_o(k\varsigma)+\frac{2}{\pi}I_o(k\rho)K_0(k\varsigma)\ \text{при}\ \rho\le\varsigma$$

де $\varsigma=a_1/b$, a_1 - радіус проміжної опори

$$w_o(x\rho)=[J_0(k\rho)Y_o(x\varsigma)+\frac{2}{\pi}I_o(k\varsigma)K_0(k\rho)\ \text{при}\ \rho\ge\varsigma$$

Таблиця 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k_i	2.23	5.43	8.6	11.742	14.897	18.048	21.188	24.332	27.47	30.62
		ρ=0.76	0.462	0.3384	0.2629	0.2203	0.1876	0.1634	0.1447	0.1299
			0.824	0.603	0.4756	0.3927	0.3344	0.2912	0.2579	0.2314
				0.87	0.6882	0.5465	0.4825	0.4201	0.3721	0.3339
					0.8969	0.7405	0.6306	0.5491	0.4863	0.4364
						0.9145	0.7788	0.6782	0.6006	0.5389
							0.927	0.8072	0.7149.	0.6415
								0.9363	0.8292.	0.7441
									0.9435	0.8466
										0.9492

$$w_o(x\rho)=[J_0(k\rho)Y_o(x\varsigma)+\frac{2}{\pi}I_o(k\varsigma)K_0(k\rho)\ \text{при}\ \rho\ge\varsigma$$

$$w_o(k\rho)=[J_0(k\rho)Y_o(k\varsigma)+\frac{2}{\pi}I_o(k\varsigma)K_0(k\rho)\ \text{при}\ \rho\ge\varsigma$$

При защемленому контурі пластинки маємо

$$w(1)=0,\ w'(1)=0$$

Підставляємо в ці рівняння (2) і одержимо

$$A=\frac{J_0(\varsigma\cdot k)[I_1(k)Y_0(k)+I_0(k)Y_1(k)]+\dfrac{2I_0(\varsigma\cdot k)}{\pi k}}{I_0(k)J_1(k)+I_1(k)J_0(k)}$$

$$B=\frac{I_0(\varsigma\cdot k)[J_1(k)K_0(k)-J_0(k)K_1(k)]+\dfrac{J_0(\varsigma\cdot k)}{k}}{I_0(k)J_1(k)+I_1(k)J_0(k)}$$

Із умови $w(k\cdot\varsigma)=0$

знаходимо частотне рівняння

$$\sum_{i=1}^{3}y_i=0$$

$$y_1=-[J_0(k\cdot\varsigma)Y_0(k\cdot\varsigma)+\frac{2}{\pi}I_0(k\cdot\varsigma)K_0(k\cdot\varsigma)][I_0(k)J_1(k)+I_1(k)J_0(k)]$$

$$y_2=J_0(k\cdot\varsigma)[I_1(k)Y_0(k)+I_0(k)Y_1(k)]+\frac{2}{\pi k}I_0(k\cdot\varsigma)$$

$$y_3=\frac{2}{\pi}[J_0(k\cdot\varsigma)[J_1(k)K_0(k)-J_0(k)K_1(k)]+\frac{1}{k}J_0(k\cdot\varsigma)].$$

Значення параметра л в залежності від параметра ς знаходимо допомогою оператора

$$[root, f(\rho),\rho,0,1]=0$$

де $$f(\rho)=\sum_{i=1}^{3}y_i\;.$$

Значення параметрів k_i, приведені в таблиці 4

Таблиця 4

ς =0	ς =0.01	0.1	0.2	0.3	0.4
к=4.77	4.77	5	5.434	6	6.271
7.87	7.88	8.347	9.139	9.044	7.918
11.01	11.03	11.76	12.55	11.06	12.24
14.15	14.18	15.17	14.2	15.08	14.84
17.29	17.33	18.58	17.42	18.82	17.77
20.43	20.49	21.94	21.11	20.5	21.96
23. 58	23.64	25.11	24.86	24.17	23.57
28.71	26.8	27.66	28.24	28.23	28.71
29.85	29.96	30	30.16	30.36	30.52

Розглянемо круглу пластинку з проміжною опорою($r_1=a_1$) і з зовнішньою опорою пружно затиснутою опорою при $r_2=b$ з коефіцієнтом жорсткості δ . Нехай

$$\alpha=ka_1,\beta=kb,\xi=a_1/b$$

Рішення беремо в формі

$$w(\rho)=-w_o(k\rho)+AJ_0(k\rho)+BI_o(k\rho) \tag{3}$$

$$w_o(x\rho)=[J_0(k\rho)Y_o(x\varsigma)+\frac{2}{\pi}I_o(k\varsigma)K_0(k\rho)\ \text{ при }\ \rho\ge\varsigma$$

$$w_o(k\rho)=[J_0(k\rho)Y_o(k\varsigma)+\frac{2}{\pi}I_o(k\varsigma)K_0(k\rho)\ \text{ при }\ \rho\ge\varsigma\ .$$

Граничні умови

$$w(\beta)=0\ ,\ D\lambda^2[\mu\cdot\nabla^2w(\beta)+(1-\mu)\cdot\frac{\partial^2w(\beta)}{\partial\xi^2}]+\delta\frac{\partial w(\beta)}{\partial\xi}=0\ .$$

Підставляємо(3) в останні рівняння і звідси знаходимо коефіцієнти A і B.

Із умови $w(ka_1)=0$

знаходимо частотне рівняння

$$J0(\xi\cdot k)\cdot Y0(\xi\cdot k)-Y0(k)+\frac{2}{\pi}\ln(\frac{1}{\xi})-J0(k)\cdot a(k)/b(k)=0\ ,$$

$$a(k)=J0(k\cdot\xi)[\frac{2}{3}Y1(k)-x\cdot Y0(k))+\frac{4}{3\pi k}]-\delta[J0(k\cdot\xi)\cdot Y1(k)+\frac{2}{\pi k}]\ ,$$

$$b(k) = J0(k)\cdot k - \frac{2}{3}J1(k) + \delta \cdot J1(k) \ .$$

Із рішення даного трансцендентного рівняння знаходимо частотний параметр k. Параметр k приведено в таблиці 5 при різному розміщенні проміжної опори (параметр ξ) і при різній жорсткості кінцевої опори відносно її повороту (параметр δ).

Таблиця 5

	ξ =0.01	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
δ=5000	к=6.649	6.765	6.954	6.994	6.663	6.075	5.475	4.952	4.512
500	6.637	6.752	6.941	6.982	6.653	6.069	5.471	4.955	4.51
200	6.617	6.732	6.92	6.972	6.64	6.06	5.465	4.945	4.509
150	6.606	6.72	6.908	6.951	6.632	6.055	5.462	4.943	4.507
100	6.583	6.697	6.884	6.929	6.617	6.046	5.456	4.938	4.501
80	6.567	6.68	6.866	6.913	6.606	6.039	5.451	4.935	4.449
60	6.539	6.65	6.836	6.887	6.588	6.028	5.444	4.93	4.495
50	6.517	6.628	6.812	6.865	6.573	6.019	5.438	4.926	4.493
40	6.484	6.594	6.777	6.834	6.552	6.006	5.43	4.92	4.489
20	6.325	6.43	6.61	6.686	6.453	5.948	5.395	4.897	4.475
15	6.226	6.329	6.508	6.595	6.393	5.915	5.375	4.886	4.468
10	6.046	6.146	6.325	6.435	6.286	5.857	5.344	4.868	4.459
7	5.851	5.949	6.131	6.265	6.174	5.798	5.313	4.852	4.452
4	5.507	5.605	5.797	5.972	5.976	5.697	5.265	4.829	4.442
2	5.106	5.209	5.417	5.639	5.743	5.579	5.212	4.806	4.433
1	5.812	4.921	5.144	5.399	5.571	5.492	5.176	4.79	4.428
0.5	4.63	4.744	4.977	5.252	5.464	5.437	5.154	4.783	4.425
0	4.419	4.538	4.784	5.083	5.339	5.371	5.128	4.773	4.422

Розглянемо задачу втрати стійкості пластинки з проміжною опорою з пружним закріпленням краю при повороті. Вихідне рівняння втрати стійкості стисканні по контуру радіальним тиском р

$$D\nabla^4 w + p\nabla^2 = 0 \ .$$

Рішення даного рівняння приймемо [5] в такій формі

$$w(\rho) = w_0(\rho x) + C_1 J_0(\rho x) + C_2 \; w(\rho) \;\; (3) \qquad (10)$$

$$\rho \le \varsigma \quad w_0(\rho) = J_0(x\rho)Y_0(x\varsigma) - \frac{2}{\pi}\ln x\varsigma$$

$$\rho \ge \varsigma \quad w_0(\rho) = J_0(x\varsigma)Y_0(x\rho) - \frac{2}{\pi}\ln x\rho$$

де

$$x^2 = phb^2 / D \ .$$

Граничні умови

$$w(\beta) = 0 \ , \ D\lambda^2[\mu \cdot \nabla^2 w(\beta) + (1-\mu)\cdot \frac{\partial^2 w(\beta)}{\partial \rho^2}] + \delta \frac{\partial w(\beta)}{\partial \rho} = 0$$

Підставляємо в(3) граничні умови і знаходимо C_1, C_2

Із умови рівності нулю прогинів на проміжній опорі

$$w(xa_1) = 0$$

Знаходимо характеристичне рівняння

$$J0(\xi \cdot x)[Y0(\xi \cdot x) - Y0(x)] + \frac{2}{\pi}\ln(\frac{1}{x}) + [J0(\xi \cdot x) - J0(x)] \cdot \frac{c(x)}{d(x)} = 0 \, ,$$

$$c(x) = J0(\xi \cdot x)[\frac{2}{3}Y1(x) - x \cdot Y0(x)] + \frac{4}{3\pi x} - \delta[J0(\xi \cdot x)\cdot Y1(x) + \frac{2}{\pi x} \, ,$$

$$d(x) = J0(x)\cdot x - \frac{2}{3}J1(x) + \delta J1(x) \, .$$

Значення параметра стійкості x в залежності від положення проміжної опори (параметр ξ) та жорсткості кінцевої опори (параметр δ) приведено в таблиці 6.

Таблиця 6

	ξ =0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
x	2.069	2.194	2.35	2.43	2.538	2.637	2.727	2.808	2.881	2.947
δ	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	3	4	5	6
x	3.006	3.107	3.188	3.255	3.31	3.356	3.504	3.584	5.632	3.665
δ	7	8	9	10	15	20	40	80	200	5000
x	3.689	3.707	3.72	3.732	3.765	3.782	3.807	3.819	3.827	3.832

Висновки.

1 Для пластинки з центральною опорою і жорстко защемленої по зовнішньому контуру знайдено вищі частоти власних коливань (i=1,2…9).Для даних частот визначено положення вузлових діаметрів при симетричних коливаннях (параметр ρ).

2.Для шарнірно закріпленої пластинки з центральною опорою знайдено вищі частоти власних коливань (i=1,2…9).Для даних частот визначено положення вузлових діаметрів при симетричних коливаннях (параметр ρ_i).

3.Для упруго закріпленої по контуру круглої пластинки з довільно розміщеною проміжною опорою визначені частоти першої форми власних коливань в залежності від двох параметрів δ(жорсткість), ξ(положення опори).

4. Для упруго закріпленої по контуру круглої пластинки з довільно розміщеною проміжною опорою визначені критичні напруження в залежності від двох параметрів δ(жорсткість), ξ(положення опори).

Список літератури.

1. Правила гидрографической службы №26. Морские плавучие предохранительные знаки. –Л. Главное управление навигации и океанографии СССР. 1984.- 89с.
2. Сахаров И. Е. Динамические жёсткости в теории осесимметричных колебаний круглых и кольцевых пластинок, Известия АН СССР, Механика, №5, 1959.
3. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок. Справочное пособие.-К: Наукова думка, 1964.- 287с.
4. Справочник по динамике сооружений. Под ред.Б. Г.Коренева, И.М.Рабиновича.- М: Стройиздат, 1972,-511с.
5. Коренев В. Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности ,решаемые в бесселевых функциях. - М: Физматгиз, 1969, - 358с.