

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ПАРАМЕТРИ ПОЛЯ ПРОСТОРОВОГО ПРЕЦЕСІЙНОГО ПЕРЕМІЩЕННЯ ПРУЖНОЇ ОСІ ШПИНДЕЛЯ

В статье рассмотрены вопросы математического описания поля пространственных динамических перемещений шпинделя на гидростатических опорах. Для аппроксимации дискретных математических моделей пространственных перемещений шпинделя предложено применение полиномиальных зависимостей. Приведены дифференциальные характеристики кривизны, кручения упругой оси шпинделя станка УТ16А. Предложен подход к определению угловых координат характеристического вектора шпинделя.

In the article the questions of mathematical description of the spatial dynamic moving field of spindle on hydrostatical supports are considered. For approximation of discrete mathematical models of the spindle spatial moving application of polynomial dependences is offered. Differential descriptions of curvature, twisting of resilient axis of spindle of UT16A machine-tool are resulted. Offered approach to determination angular co-ordinates of spindle characteristic vector.

Вступ.

На сьогоднішній день в умовах жорсткої конкуренції на ринках збуту продукції актуальною проблемою є підвищення якості машинобудівних виробів, продуктивності машинобудівного виробництва та скорочення термінів його технічного підготовлення. Проблема якості та продуктивності безперервно пов'язана з точністю та продуктивністю механічної обробки, і, передусім, з точністю та робочими швидкостями шпиндельних вузлів, як однієї з основних формуютьовуючих ланок динамічної системи верстата.

Одними з найбільш перспективних типів шпиндельних опор для забезпечення прецизійної високошвидкісної обробки є гідростатичні підшипники, які поряд з високою жорсткістю та демпфіруючою здатністю дозволяють керувати вихідними параметрами точності обертання шпинделя [1].

В роботі [2] запропонований науковий підхід до аналізу точності шпиндельних вузлів на основі аналітичного визначення поля характеристичного вектора шпинделя, початок якого знаходиться в перетині осі шпинделя з поверхнею його допоміжної бази, що, в свою чергу, визначає положення інструменту (пристрою) в напрямку поздовжньої координати. Як зазначається в роботі [3], ансамблі реалізації траєкторій просторового руху вектора R містять практично всі похибки, пов'язані зі зміщенням шпинделя у власних опорах, його пружними та тепловими деформаціями.

Основні складності в процесі знаходження поля вектора R , координата точки прикладання якого є невизначеною в просторі, виникають при аналітичному обчисленні двох його кутових координат α_R , β_R , що визначають положення вектора по відношенню до ортогональних координатних площин XOZ та YOZ . В даній роботі пропонується підхід до визначення координат α_R , β_R на основі знаходження диференціальних характеристик просторового положення осі шпинделя за дискретною математичною моделлю поля динамічних переміщень його пружної осі.

Задачею даної роботи є розробка математичної моделі поля просторових переміщень осі шпинделя на основі аналітичного визначення диференціальних характеристик його пружної осі в прецесійному русі.

Результати досліджень.

Із існуючих способів математичного опису кривих у просторі найбільш зручним з точки зору подальшого аналітичного дослідження форм викривленої осі шпинделя є спосіб параметричного задавання кривої. Наприклад, застосування параметричного опису кривих істотно спрощує програмування траєкторій руху різального інструменту в задачах числового керування верстатами [4].

В загальному випадку просторове положення пружної осі шпинделя в декартовій правій системі координат може бути параметрично задане у векторній формі

$$r(z) = x(z)i + y(z)j + zk, \quad (1)$$

або в координатній формі

$$\begin{cases} x = x(z) \\ y = y(z) \\ z = z \end{cases}, \quad (2)$$

де параметр z приймає значення в межах $0 \leq z \leq z_m$;

i, j, k – орти прямокутної системи координат (рис. 1).

Додатній напрямком на кривій відповідає зростанню параметра z .

Будемо вважати, що пружна вісь має дотичну в кожній точці M кривої, причому:

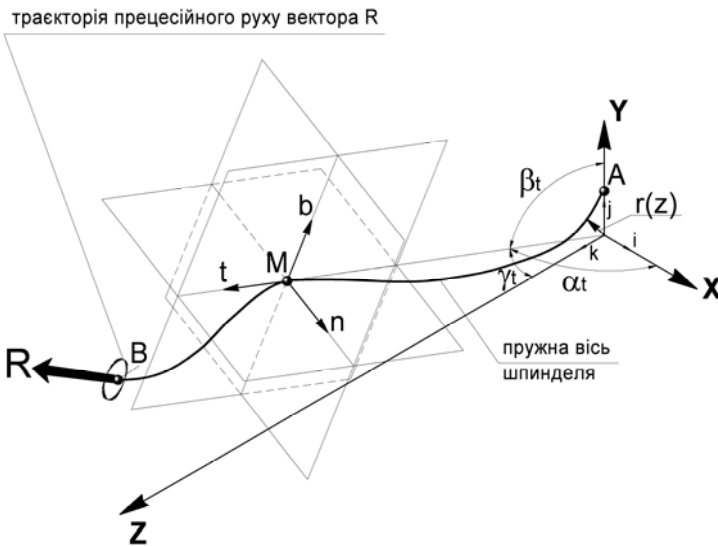


Рис. 1. До визначення поля переміщень пружної осі шпинделя

$$\frac{dr}{dz} \neq 0; \frac{d^2r}{dz^2} \neq 0; \frac{d^3r}{dz^3} \neq 0. \quad (3)$$

Тобто, пружна вісь являє собою гладку регулярну криву по всій довжині зігнутого шпинделя, для якої не характерні особливі точки. Також в кожній точці M кривої існують три одиничні взаємноортогональні вектори t , n , b , що характеризують просторовий напрямок в точці дотичної, головної нормалі та бінормалі відповідно. Зазначені вектори разом зі з'єднуючими їх площинами утворюють рухомий триєдр, пов'язаний з кривою (див. рис. 1).

Кути нахилу пружної осі шпинделя можна характеризувати напрямними косинусами одиничного вектора t дотичної по довжині кривої. Числові значення напрямних косинусів, утворених додатнім напрямком вектора t з осями координат можна обчислити як:

$$\cos \alpha_t = \frac{dx}{dz}; \quad \cos \beta_t = \frac{dy}{dz}; \quad \cos \gamma_t = \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dz}\right)^2}.$$

Положення пружної осі шпинделя в просторі може бути характеризоване скалярними функціями $K=K(z)$, $T=T(z)$, де K , T – кривизна та кручення кривої відповідно. Кривизна кривої K характеризує на диференціально малій довжині її відхилення від прямої лінії, а кручення T – від плоскої кривої.

З урахуванням [5] для параметричної форми задавання кривої функції $K=K(z)$, $T=T(z)$ знайдуться у вигляді:

$$K^2(z) = \frac{\left[\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1 \right] \left[\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dz^2}\right)^2 \right] - \left(\frac{dx}{dz} \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{dy}{dz} \frac{d^2y}{dz^2} \right)^2}{\left[\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1 \right]^3};$$

$$T(z) = \rho^2 \frac{\left(\frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} + 1 \right) \left(\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{d^2y}{dz^2} \right) \left(\frac{d^3x}{dz^3} + \frac{d^3y}{dz^3} \right)}{\left[\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1 \right]^3},$$

де ρ – радіус кривизни кривої.

При $T=0$ просторова крива вироджується в плоску. Радіуси кривизни $\rho(z)$, кручення $\tau(z)$ знаходяться як обернені величини від кривизни $K(z)$ та кручення $T(z)$ кривої відповідно [5]:

$$\rho(z) = \frac{1}{K(z)}; \quad \tau(z) = \frac{1}{T(z)}.$$

Положення крайових точок кривої A , B визначаються відповідними радіус-векторами \vec{r}_A , \vec{r}_B та скалярними характеристиками кривизни (K_A , K_B , ρ_A , ρ_B) і кручення (T_A , T_B , τ_A , τ_B).

В загальному випадку функції $x=x(z)$, $y=y(z)$ одержують в результаті розв'язання диференціальних рівнянь, що характеризують поперечні коливання шпинделя в площинах XOZ та YOZ відповідно [6]:

$$EJ(z) \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} + m(z) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + h_x(z) \frac{\partial x}{\partial t} + c_x(z)x = \sum_{k=1}^n (P_{k1x}(z) \cos \omega t + P_{k2x}(z) \sin \omega t);$$

$$EJ(z) \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} + m(z) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + h_y(z) \frac{\partial y}{\partial t} + c_y(z)y = \sum_{k=1}^n (P_{k1y}(z) \cos \omega t + P_{k2y}(z) \sin \omega t),$$

де E – модуль пружності матеріалу Юнга;

J – осьовий моменти інерції;

m – погонна маса шпинделя;

c_x, c_y, h_x, h_y – коефіцієнти жорсткості та демпфірування шпинделя на „вінклеровській” основі за відповідними осями; $P_{k1x}(z), P_{k2x}(z), P_{k1y}(z), P_{k2y}(z)$ – амплітуди k -тих гармонік ряду по координаті z , що відповідають зовнішнім зусиллям за відповідними осями;

ω – частота вимушених поперечних коливань шпинделя.

Чисельний розв’язок зазначених рівнянь матричними методами теорії пружності призводить до формування дискретних множин амплітуд динамічних переміщень x, y по довжині шпинделя у функції частоти.

У відповідності до рівнянь (1, 2) дискретному набору даних повинні бути співставлені неперервні аналітичні функції $x=x(z), y=y(z)$ на ділянці довжини шпинделя, для яких за загального випадку просторового викривлення його осі виконуються умови (3). Таким чином, маємо задачу апроксимації дискретної математичної моделі (заданих таблично функцій $x=x(z), y=y(z)$) символьною залежністю. Поширеним способом вирішення поставленої задачі є застосування в якості апроксимуючої залежності лінійних комбінацій деяких нелінійних базисних функцій [7]. При цьому аналітична залежність має вигляд суми базисних функцій, помножених на деякі коефіцієнти, що найкращим чином апроксимують дискретну множину значень функції.

Враховуючи необхідність застосування подальшого диференціювання отриманих аналітичних залежностей пружної осі шпинделя, одним з найбільш зручних способів представлення апроксимуючої функції є поліном довільного ступеня

$$y(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n, \quad (4)$$

де a_0, a_1, \dots, a_n – постійні коефіцієнти полінома ступеня n .

У якості критерію оцінки точності апроксимації найбільш доцільним є застосування методу найменших квадратів [7]. Отже, задача апроксимації таблично заданих функцій $x=x(z), y=y(z)$ лінійними математичними моделями полягає в знаходженні коефіцієнтів a_0, a_1, \dots, a_n полінома, що забезпечують мінімум суми квадратів

$$\text{відхилень апроксимуючої функції від табличних даних } \sum_{i=0}^n [(f(z_i) - y_i)]^2 = \min.$$

Розглянемо методику знаходження аналітичної залежності на прикладі апроксимації таблично заданої функції $y=y(z)$. Процедура апроксимації можна значно спростити, якщо певним чином впорядкувати табличні дані, а саме: масив значень аргументу представити рівновіддаленим (з постійним кроком даних). Таким чином табличні дані будуть являти собою арифметичну прогресію

$$z_m = z_0 + mh,$$

де $(m+1)$ – кількість вузлів апроксимації;

h – постійний крок табличних даних.

$$\text{Значення } h \text{ може бути обчислене як } h = \frac{z_m - z_0}{m}.$$

Для нових рівновіддалених значень аргументу z_i потрібно знайти відповідні значення функції y_i . Враховуючи геометричну інтерпретацію апріорних табличних даних (рис. 2) раціональним є застосування процедури лінійної інтерполяції дискретної множини у вигляді [7]

$$y(z) = a_i + b_i z,$$

де a_i, b_i – постійні коефіцієнти, визначені для інтервалу $[z_i, z_{i+1}]$.

Коефіцієнти a_i, b_i обчислюються за залежностями:

$$a_i = \frac{z_{i+1}y_i - z_i y_{i+1}}{h}; \quad b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

де $i = 0 \dots m$.

Таким чином для вузлів інтерполяції, що відповідають інтервалу зміни аргументу $[z_i, z_{i+1}]$, визначаються коефіцієнти відрізка a_i, b_i .

Розрахунок нових рівновіддалених значень аргументу z_i та відповідних ним значень функції y_i можна спростити шляхом застосування вбудованої функції пакету MathCAD linterp, що здійснює лінійне наближення дискретної функції.

Результати інтерполяції табличної функції $y=y(z)$ засобами математичного пакету MathCAD для рівновіддалених значень аргументу наведені на рис. 2.

Визначальним з точки зору забезпечення точності апроксимації є знаходження ступеня n полінома (4).

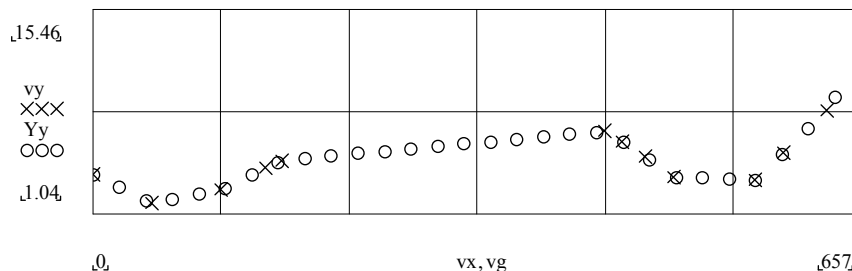


Рис. 2. Лінійна інтерполяція дискретної функції $y=y(z)$: x – апріорний масив даних; o – інтерпольований масив даних

Раціональним способом знаходження порядку апроксимуючого полінома є метод скінчених різниць, згідно до якого, якщо n -і різниці функції $y=y(z)$ для рівновіддалених значень аргументу при довільному кроці h постійні, то в цьому випадку функція являє собою поліном ступеня n .

Послідовні різниці апроксимуючої функції можуть бути представлені у вигляді [8]

$$\Delta y = a_n n h z^{n-1} + \left[a_n \frac{n(n-1)}{2!} h^2 + a_{n-1} (n-1) h \right] z^{n-2} + \dots + a_1 h. \quad (5)$$

Обчислюючи таким чином послідовні різниці Δy для значень аргументу в інтервалі $[z_0 \dots z_m]$ встановлюють порядок різниць для якого виконується умова

$$\Delta^n y \approx const. \quad (6)$$

Таким чином визначають ступінь n апроксимуючого полінома. Застосування методу скінчених різниць для обчислення ступеня апроксимуючої функції дозволяє легко автоматизувати алгоритм пошуку засобами математичних пакетів.

З метою знаходження коефіцієнтів лінійної математичної моделі a_0, a_1, \dots, a_n за методом найменших квадратів скористаємося вбудованою функцією `linfit` програмного середовища MathCAD. Задача полягає в розрахунку для дискретно заданої функції $y=y(z)$ (див. набір даних «x» на рис. 2) з урахуванням попередньо обчисленого за залежностями (5 – 6) ступеня полінома ($n=5$) вектора коефіцієнтів

$$a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix},$$

для символічного вектора

$$f = \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ z^3 \\ z^4 \\ z^5 \end{bmatrix},$$

компоненти якого визначають вибрані базисні функції.

Результати апроксимації дискретної множини значень функції $y=y(z)$ в середовищі MathCAD наведені на рис.3

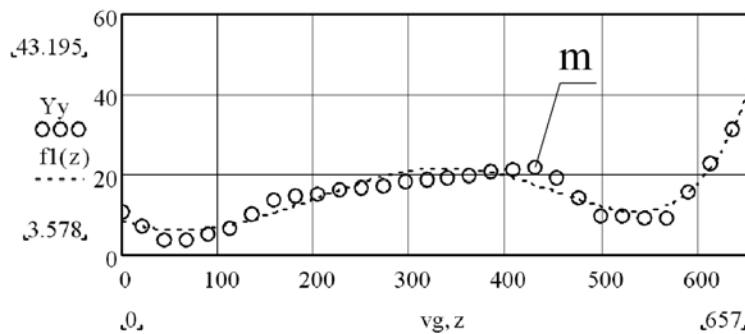


Рис. 3. Апроксимація дискретної множини значень функції $y=y(z)$ (o - апріорний масив даних; штрихова крива - графік апроксимуючої функції)

Для наочності представлення даних на графіку за осями системи координат застосовані відмінні масштабні коефіцієнти: значення за віссю абсцис відповідають довжині шпинделя в мм; значення зміщень осі шпинделя за віссю ординат наведені в масштабі ($\text{мкм} \times 10^2$).

Найбільше відхилення апроксимуючих функцій від табличних даних має місце в точці $m=20$, що складає $\approx 25\%$ для вертикальної та горизонтальної площин. Отже, отримані аналітичні поліноміальні залежності кількісно та якісно відповідають дискретним моделям $x=x(z)$ і $y=y(z)$.

На рис. 4, 5 наведені характеристики кривизни та кручення пружної осі шпинделя верстата УТ16А зі шпиндельними гідростатичними опорами при формі коливань, що відповідає максимальній робочій частоті ($f=50\text{Гц}$).

Кутове розташування проєкцій вектора R в площинах XOZ (α_R) та YOZ (β_R) визначається кутами нахилу відповідних дотичних до пружної осі шпинделя в точці В прикладання характеристичного вектора.

Кути α, β нахилу дотичної до осі OZ по довжині шпинделя в площинах XOZ та YOZ відповідно знаходяться

як:

$$\alpha = \arctg \frac{dx}{dz}; \beta = \arctg \frac{dy}{dz}.$$

Для визначення кутів нахилу вектора R α_R , β_R окремої реалізації пружної лінії шпинделя потрібно обчислити попередні вирази в точці В (див. рис. 1).

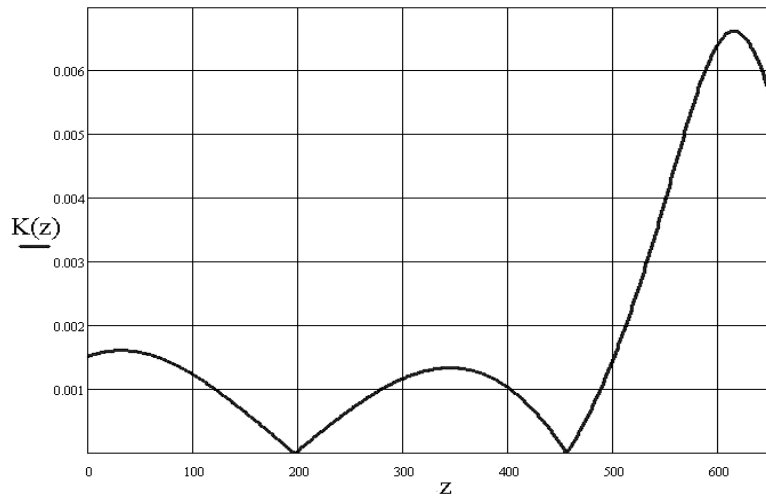


Рис. 4. Графік кривизни пружної осі шпинделя

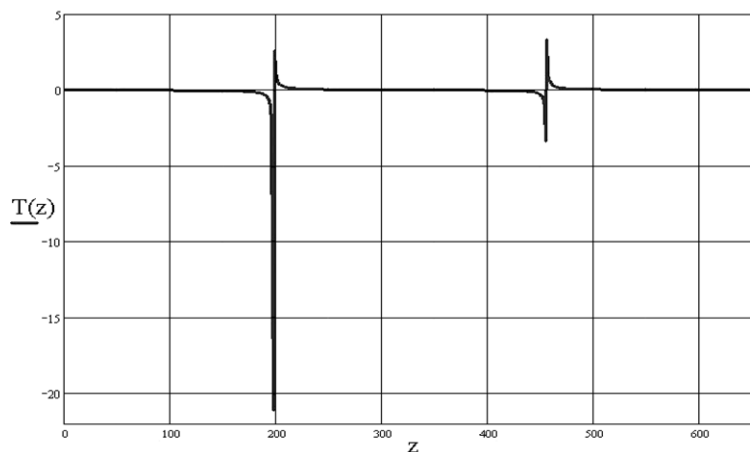


Рис. 5. Графік кручення пружної осі шпинделя

Висновки.

Запропоновані наукові підходи до визначення диференціальних характеристик поля просторових прецесійних переміщень шпинделя на основі апроксимації дискретної математичної моделі динамічних переміщень його пружної осі, які можуть бути використані для аналізу точності шпиндельних вузлів широкої номенклатури.

За наведеною методикою можна обчислити диференціальні характеристики пружної осі шпинделя на заданих динамічних формах його коливань, на основі яких визначаються кути α_R , β_R просторового розташування характеристичного вектора R .

Список літератури.

1. Регульовані гідростатичні підшипники для шпиндельних вузлів / Ю.О. Сахно, Д.Ю. Федориненко, С.В. Бойко, В.С. Волик. – Ніжин: ТОВ «Видавництво «Аспект-Поліграф», 2009. – 172 с.
2. Проников А.С. Программный метод испытания металлорежущих станков / А.С. Проников – М.: Машиностроение, 1985. – 288 с.
3. Пуш А.В. Шпиндельные узлы: качество надежность / А.В. Пуш – М.: Машиностроение, 1992. – 288 с.
4. Фокс А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / А. Фокс, М. Пратт; пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
5. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн; пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1978. – 831 с.
6. Федориненко Д.Ю. Теоретичні основи визначення точності шпиндельних вузлів на гідростатичних опорах / Д.Ю. Федориненко // Промислова гідроліка і пневматика. – 2010. – № 4(30). – С. 58 – 62.
7. Струтинський В.Б. Математичне моделювання процесів та систем механіки / В.Б. Струтинський - Житомир: ЖІТІ, 2001. – 612 с.
8. Гутер Р.С. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта / Р.С. Гутер, Б.В. Овчинский. – М.: Физматгиз, 1962. – 356 с.