

Ал.Г. Куценко<sup>1</sup>, канд.физ.-мат.наук, доц., Ан.Г. Куценко<sup>2</sup>, канд.физ.-мат.наук, доц.

1 - Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, г. Киев, Украина

2 - Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины, г. Киев, Украина

## СРАВНЕНИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ С ДИСКРЕТНЫМ И НЕПРЕРЫВНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ПАРАМЕТРОВ

*Вивчається процес поширення гармонічних хвиль вздовж незакріплених балок періодичної будови. Розглянуті дві конфігурації балок: з кусково-постійним поперечним перерізом та неперервною змінною переріза вздовж осі балки. Знайдені частотні смуги пропускання для обох типів балок та проведено порівняльний аналіз їх розподілів.*

*A phenomenon of the harmonic wave propagation through an unsupported beams of periodic structures is investigated. Two beam configurations are considered: with partially constant cross-section and with cross-section that continually varied along the beam center line. Frequency passbands for both beam configurations are determined and comparative analysis of its distribution is performed.*

### Введение.

Широкое применение элементов периодической конфигурации в динамически нагружаемых конструкциях стимулирует исследование явления распространения гармонических волн в механических системах периодической структуры. Результаты этих исследований используются при разработке систем шумоизоляции летательных аппаратов [1], зеркал адаптивной оптики [2], разнообразных механических устройств [3].

Большинство исследований закономерностей распространения волн в системах периодического строения основано на теории Флоке [4], согласно которой все кинематические и динамические характеристики в подобных точках любых двух соседних периодов системы отличаются в  $S$  раз. Параметр  $S$ , который принято называть мультипликатором, в общем случае является комплексной величиной:  $S = |S|e^{i \arg S}$ . Модуль мультипликатора указывает на степень убывания амплитуды волны от периода к периоду, а аргумент — на сдвиг фазы. Очевидно, что частотным интервалам прохождения волн, которые будем называть “окнами прозрачности”, соответствует  $|S| = 1$ . Нахождение “окон прозрачности” составляет основную цель при изучении колебаний периодических структур.

Следует отметить, что абсолютное большинство исследований явления распространения волн в периодических структурах касается одномерных и квазиодномерных систем. При этом неоднородность в этих системах носит дискретный, т.е. пороговый тип. Примером периодических систем порогового типа могут служить периодически закрепленные в отдельных точках однородные балки или балки кусочно-постоянного поперечного сечения [5]. Поэтому представляет определенный интерес изучение закономерностей распределения “окон прозрачности” механической системы периодической структуры с непрерывным изменением параметров, которая может быть получена путем предельного перехода из соответствующей системы с неоднородностями порогового типа. В данной работе подобные исследования проведены на примере балки переменного сечения.

### Постановка задачи.

Поскольку представляет интерес сравнение распределение “окон прозрачности” для системы с пороговой неоднородностью и для системы, которую можно получить из первой путем предельного перехода, фактически, необходимо рассмотреть две задачи. Рассмотрение обеих задач проведем, основываясь на теории Флоке.

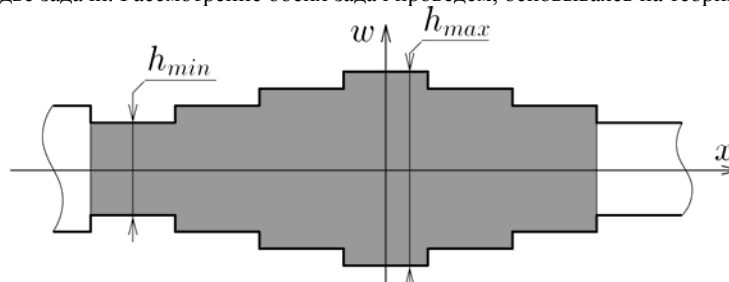


Рис. 1. Период балки кусочно-постоянного поперечного сечения (вид сбоку)

Первая задача состоит в определении “окон прозрачности” балки каждый полупериод которой состоит из  $N$  однородных частей. Один период такой балки при  $N = 3$  выделен серым цветом на рисунке 1. Будем предполагать,

что ширина балки  $b$  не изменяется вдоль оси балки  $x$ , а длина каждого участка, на котором высота балки постоянная, составляет  $a_0 = a/2N$ , где  $a$  - длина периода балки.

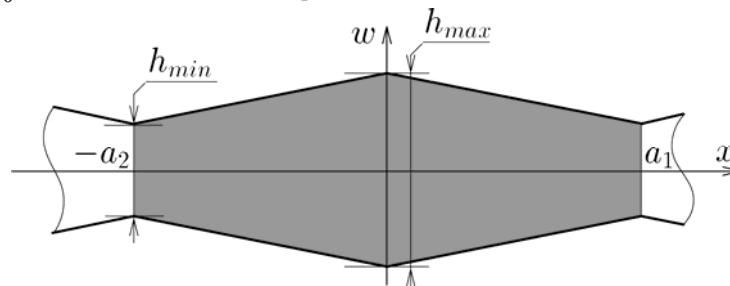


Рис. 2. Период балки с непрерывным изменением поперечного сечения (вид сбоку)

Вторая задача состоит в определении “окон прозрачности” балки, которую можно получить из первой путем предельного перехода  $N \rightarrow \infty$ . Период второй балки изображен серым цветом на рисунке 2. Также будем предполагать, что ширина балки  $b$  не изменяется вдоль оси балки  $x$ , и  $a_1 = a_2 = a/2$  - длина полупериода балки.

#### Метод решения задачи.

Поскольку сформулированные задачи являются одномерными, а зависимость всех характеристик от времени  $t$  - гармонической, при решении будем основываться на аналитических методах. Предполагая, что прогиб каждой из балок  $w(x,t)$  можно представить в виде  $w(x,t) = w(x)e^{i\omega t}$ , относительно амплитудной функции прогибов  $w(x)$  на одном периоде получаем линейное уравнение [6]

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ j(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] - p^4 w(x) = 0, \quad |x| < a/2, \quad (1)$$

где  $j(x) = J(x)/J_{\min}$ ,  $J(x) = bh^3(x)/12$  - момент инерции поперечного сечения балки,  $J_{\min}$  - минимальное значение момент инерции,  $h(x)$  - высота балки,  $p = \sqrt{\omega \sqrt{\rho F(x)}/EJ_{\min}}$ ,  $F(x) = bh(x)$  - площадь поперечного сечения балки,  $\rho$ ,  $E$  - плотность и модуль упругости материала балки,  $\omega$  - круговая частота колебаний. Отметим также [6] дифференциальную связь между амплитудными функциями прогибов, углов поворота поперечного сечения  $\vartheta(x)$ , изгибающих моментов  $M(x)$  и перерезывающих усилий  $Q(x)$ :

$$\vartheta(x) = \frac{dw(x)}{dx}, \quad M(x) = EJ(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, \quad Q(x) = \frac{d}{dx} \left[ EJ(x) \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right]. \quad (2)$$

Для получения решения задачи, т.е. зависимости мультипликатора от безразмерной частоты  $pa$  необходимо общее решение уравнения (1) подчинить условиям квазипериодического продолжения

$$w(a/2) = Sw(-a/2), \quad \vartheta(a/2) = S\vartheta(-a/2), \quad M(a/2) = SM(-a/2), \quad Q(a/2) = SQ(-a/2) \quad (3)$$

и приравнять к нулю определитель полученной однородной системы.

Предложенная схема является универсальной и может быть использована при решении задачи для балки произвольной вариации поперечного сечения. Однако для балки кусочно-постоянного поперечного сечения, которая соответствует первой задаче, более рационально определить решение отдельно на каждом интервале однородности. При этом уравнение (1) трансформируется в дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^4 w_n(x)}{dx^4} - p_n^4 w_n(x) = 0, \quad x < a_0, \quad n = \overline{1, 2N}, \quad (4)$$

где  $w_n(x)$  - амплитудная функция прогибов на интервале  $n$ ,  $p_n = \sqrt{\omega \sqrt{\rho F_n}/EJ_n} = const$ . Общее решение уравнения (4) имеет простой вид:

$$w_n(x) = A_n \cos(p_n x) + B_n \sin(p_n x) + C_n \operatorname{ch}(p_n x) + D_n \operatorname{sh}(p_n x), \quad (5)$$

где  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  и  $D_n$  - постоянные интегрирования. Решение (5) с учетом дифференциальных соотношений (3) необходимо подчинить условиям непрерывного продолжения в точках сочленения участков

$$w_n(a_0) = w_{n+1}(0), \quad \vartheta_n(a_0) = \vartheta_{n+1}(0), \quad M_n(a_0) = M_{n+1}(0), \quad Q_n(a_0) = Q_{n+1}(0), \quad n = \overline{1, 2N-1}. \quad (6)$$

При этом условия квазипериодического продолжения (3) приобретают вид

$$w_{2N}(a_0) = S w_1(0), \quad \vartheta_{2N}(a_0) = S \vartheta_1(0), \quad M_{2N}(a_0) = S M_1(0), \quad Q_{2N}(a_0) = S Q_1(0). \quad (7)$$

Таким образом, на основании соотношений (2) и (5)-(7) получаем систему однородных уравнений, приравняв определитель которой к нулю, получаем алгебраическое уравнение 4-й степени относительно мультипликатора. Решение последнего не представляет собой принципиальных сложностей, поскольку, исходя из физических соображений, можно утверждать, что одновременно с некоторым корнем этого уравнения  $S$  его корнем будет и обратная величина  $1/S$ .

При рассмотрении задачи для второй балки, каждый период которой состоит из двух клиновидных частей, будем исходить непосредственно из уравнения (1), которое с учетом конкретной зависимости  $h = h(x)$  представляется в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ \left( 1 + 2\alpha \frac{|x|}{a} \right)^3 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] - \left( 1 + 2\alpha \frac{|x|}{a} \right) p^4 w(x) = 0, \quad |x| < a/2, \quad (8)$$

где  $\alpha = h_{\max}/h_{\min} - 1$  - показатель перепада толщины балки.

Поиском решения уравнения (8) занимался еще Кирхгоф [7]. Ему удалось получить несколько первых членов асимптотического разложения решения для малых углов расхождения клина. В замкнутой форме решение уравнения (8) получено А. Динником [8]. Для клина, соответствующего правой части периода ( $x > 0$ ), его можно представить в виде

$$w(x) = A \frac{J_1 \left( 2 \frac{pa}{\alpha} \sqrt{1 + 2\alpha \frac{x}{a}} \right)}{\sqrt{1 + 2\alpha x/a}} + B \frac{Y_1 \left( 2 \frac{pa}{\alpha} \sqrt{1 + 2\alpha \frac{x}{a}} \right)}{\sqrt{1 + 2\alpha x/a}} + C \frac{I_1 \left( 2 \frac{pa}{\alpha} \sqrt{1 + 2\alpha \frac{x}{a}} \right)}{\sqrt{1 + 2\alpha x/a}} + D \frac{K_1 \left( 2 \frac{pa}{\alpha} \sqrt{1 + 2\alpha \frac{x}{a}} \right)}{\sqrt{1 + 2\alpha x/a}}, \quad (9)$$

где  $J_1, Y_1$  - функции Бесселя 1-го и 2-го рода, первого порядка,  $I_1, K_1$  - модифицированные функции Бесселя 1-го и 2-го рода, первого порядка,  $A, B, C$  и  $D$  - постоянные интегрирования. Для левого клина выражение для прогиба имеет аналогичный с точностью до знака при  $x$  вид. После выполнения условий непрерывного продолжения в точке  $x = 0$  и условий квазипериодического продолжения (3) приходим к однородной системе линейных уравнений, определитель которой является полиномом 4-й степени относительно мультипликатора. Таким образом, ход дальнейшего решения второй задачи полностью совпадает с ходом решения первой задачи.

#### Результаты и их анализ.

В графическом виде результаты решения задач представлены на рисунках 3-6, на которых изображены (выделены серым цветом) “окна прозрачности” в зависимости от безразмерной частоты  $pa$  и параметра  $\alpha$  для различного числа участков постоянства поперечного сечения на полупериод  $N$ .

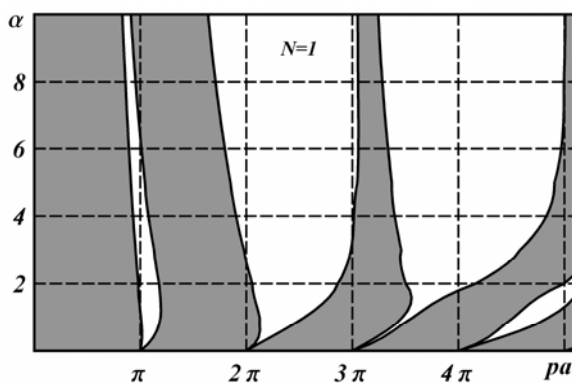


Рис. 3. “Окна прозрачности” балки с одним однородным участком на полупериод

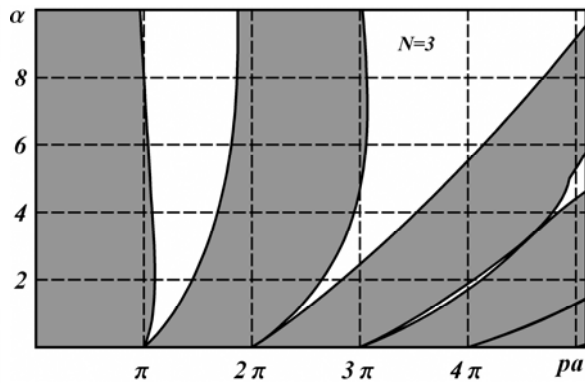


Рис. 4. “Окна прозрачности” балки с тремя однородными участками на полупериод

Первые три распределения “окон прозрачности” (рис. 3-5.) получены в результате решения первой задачи, а последнее распределение (рис. 6) — в результате решения второй задачи. Анализируя представленные распределения, прежде всего, следует отметить наличие предельного перехода при  $N \rightarrow \infty$ .

Также общим для всех диаграмм является монотонное увеличение длин интервалов непроходимости с нулевого значения при  $\alpha = 0$  в точка  $n\pi$ . Причем, чем меньше  $N$ , тем стремительней происходит увеличение длин

интервалов непроходимости с ростом  $\alpha$ , что вполне соответствует физическим основам теории распространения волн.

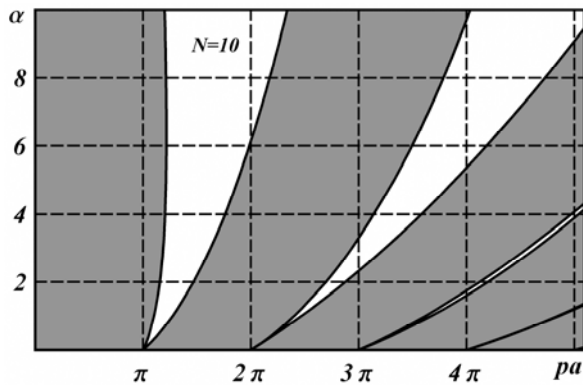


Рис. 5. «Окна прозрачности» балки с десятью однородными участками на полупериод

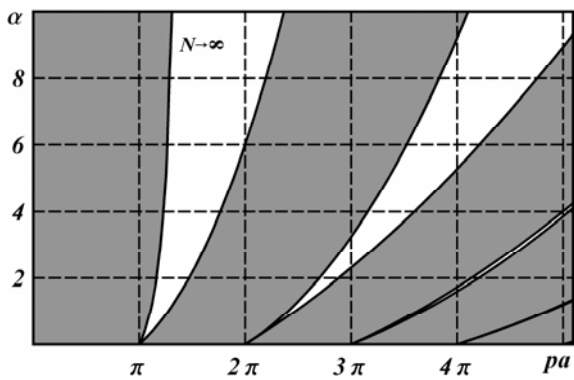


Рис. 6. «Окна прозрачности» балки с клиновидным полупериодом

Однако между последним и первыми тремя распределениями имеется принципиальное различие. Граничные линии «окон прозрачности», изображенных на рисунке 6, имеют постоянный характер наклона, т.е. являются однозначными функциями безразмерной частоты. Граничные линии «окон прозрачности», изображенных же на рисунках 3 – 4, с ростом перепада толщин  $\alpha$  загибаются, заваливаясь налево. Это свойство четко просматривается при  $N=1$  и  $N=3$ , но при тщательном рассмотрении его можно заметить и для  $N=10$ . Для этого следует обратить внимание на правую границу левого «окна» на рис. 5. Это практически единственное качественное различие между рисунками 5 и 6. Следствием загибов граничных линий является их пересечение, как это имеет место на рис. 4 для линий, выходящих с точки  $3\pi$  при  $\alpha=0$ .

Еще одно отличие между диаграммами, изображенными на рис. 3-5 и на рис. 6, является то, что на первых трех рисунках «окна» сужаются с ростом значения параметра  $\alpha$ .

#### Выводы.

По результатам проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

- «Окна прозрачности» для периодически структурированной балки кусочно-постоянного поперечного сечения демонстрируют наличие предельного перехода при  $N \rightarrow \infty$ , где  $N$  — число участков постоянства поперечного сечения на полупериод. Другими словами предельный переход имеет место при переходе к кусочно-клиновидной балке.
- Интервалы между «окнами прозрачности» увеличиваются с ростом неоднородности (увеличении  $\alpha$ ) при любой конфигурации балки.
- В отличие от случая кусочно-клиновидной балки границы «окон прозрачности» балок кусочно-постоянного сечения заваливаются влево при увеличении неоднородности балки.
- В отличие от случая кусочно-клиновидной балки «окна прозрачности» балок кусочно-постоянного сечения сужаются при увеличении неоднородности балки.

#### Список литературы.

1. Clarkson B.L., Ford R.D. The response of a typical aircraft structure to jet noise // J. Roy. Aeronaut. Soc. - 1962. - Vol. 66, N 613, P. 31-40.
2. Tyson R.K. Principles of Adaptive Optics. - Boston, Ma: Academic Press, 1998. - 345 p.
3. Mead D.J. Wave propagation in continuous periodic structures: research contributions from Southampton, 1964-1995 // J. Sound and Vibr. - 1996. - Vol. 190, N 3, P. 495-524.
4. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах: Пер. с англ. - М.: ИЛ, 1959. - 457 с.
5. Куценко А.Г. Поширення хвиль в балках, закріплених періодичним чином // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. наук. - 1997. - N 3. - С. 69-76.
6. Писаренко Г.С. и др. Сопротивление материалов. - К.: Вища шк., 1986. - 775 с.
7. Todhunter I. A history of the theory of elasticity and of the strength of materials: Vol. 2, Part 2. - Adamant Media Corporation, 2003. - 566 p.
8. Филиппов А.П. Колебания механических систем. - К.: Наук. думка, 1965. - 716 с.