

УДК 621.961.2.073.001.8

В.М. Яворовський, к.т.н., доц., М.М. Татарчук, студент, І.А.Рошина, асистент
НТУ України „Київський політехнічний інститут”

ЗАЛУЧЕННЯ ТЕОРІЇ ГНУЧКИХ ПЛАСТИН І ОБОЛОНОК ДО АНАЛІЗУ ПРУЖНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ НА ПЕРШІЙ СТАДІЇ ВИРУБУВАННЯ ДЕТАЛЕЙ ПРЯМОКУТНОЇ ФОРМИ

В статье предлагается использовать теорию гибких пластин и оболочек для объяснения поведения тонколистовых полос в процессе вырубki-пробивки. В настоящее время по умолчанию результаты вырубki деталей круглой формы из толстолистового материала переносятся на тонколистовые детали сложной конфигурации. Между тем, судя по износу рабочих деталей штампа, картина нагружения для них изменится в конце первой стадии вырубki – упругой деформации. Попытки объяснить этот процесс для тонколистовых материалов связаны с перераспределением действующих усилий по контуру детали за счет податливости заготовки.

In the paper there is an attempt to use theory of flexible plates and shells to explain the behavior of the thin stripes under blanking and punching operations. Now an opinion exists that results of thick sheet blanked parts of usually round shape are applied to thin sheet ones including also intricate shapes. But judging on the wear of punches and dies, the picture of their loading is changing at the end of the first stage of blanking – the flexible deformation. Attempts to explain this process for thin sheet material are connected with redistribution of acting loads because of flexibility of sheet stock.

За усталеної теорії процесів вирубування і пробивання вони проходять у 3-и стадії: 1) за навантажень, які розвивають напруження нижче границі текучості, заготовка отримує пружну деформацію, яка виявляється у згині смуги, що оброблюється, причому матеріал, стиснутий між ріжучими краями матриці і пуансона, відходить від пуансона, утворюючи стрілу вигину. При цьому периферія смуги підіймається від периферії матриці, також створюючи вигнуту поверхню, деталь, в свою чергу, виявляє стрілу опуклості у отворі матриці; 2) за переходу напружень у матеріалі через границю текучості починається пластична деформація смуги і через зміщення матеріалу за холодної деформації вони швидко сягають границі міцності. Пуансон занурюється у поверхню смуги. Глибина занурення пуансона у деталь залежить від в'язкості матеріалу, тобто його пластичності і опору деформації контуру смуги, який прилягає до краю матриці. Для більшості традиційних матеріалів ця глибина складає третину товщини матеріалу. Після вичерпання пластичних властивостей і досягнення границі міцності починається третя стадія; 3) вона починається з роз'єднання металу, коли тиск пуансона сягає максимального напруження – опору зрізу (зсуву), у зоні ріжучих кромок штампу з'являються сколюючі тріщини, після чого виникає повне відділення деталі від смуги.

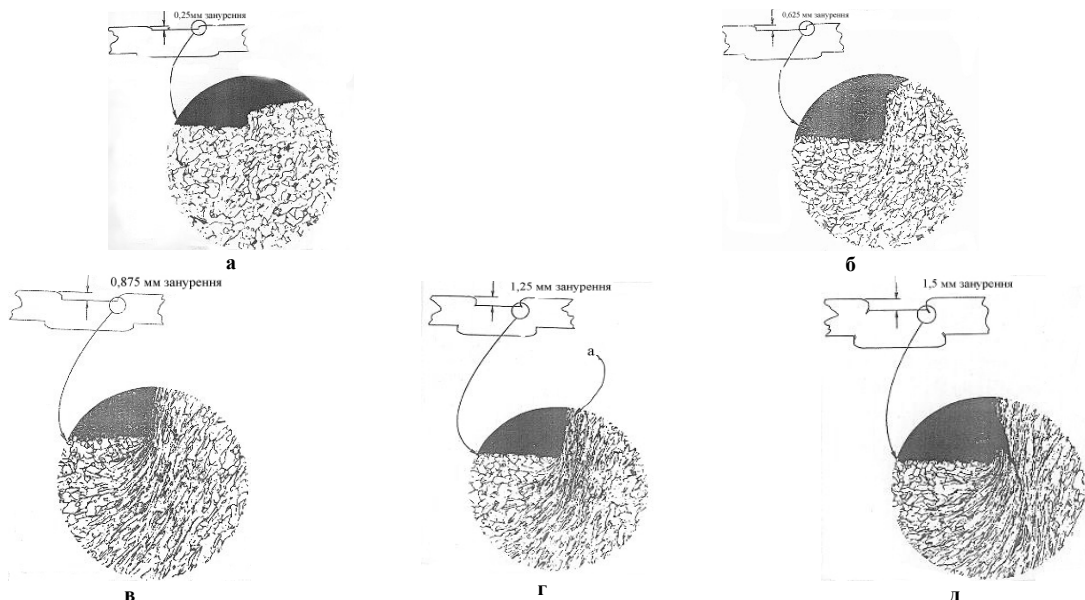


Рис.1. Стадії процесу вирубування круглої деталі діаметром 12,7мм(1/2") товщиною 4,8мм(3/16") з вуглецевої сталі за різних величин занурення пуансона. Збільшення 200^х.
а – 0,25мм; б – 0,625мм; в – 0,875мм; г – 1,25мм; д – 1,5мм

Ці стадії можна легко простежити на рис.1 для матеріалу, який відповідає сталі 20 товщиною 4,8 мм (3/16"), тобто товстолистової сталі [1].

На рис. 1а зображений початок занурення пуансона, але добре видно вигин смуги, який утворюється в кінці першої стадії вирубування, на рис. 1в можна прослідкувати, що у зоні, сусідній з гострою кромкою, зерна витягуються у напрямку деформації розтягу, утворюючи текстуру деформації. В міру занурення пуансона в точці *a* (рис. 1з) виникає мікро-тріщина, яка швидко розвивається у лінію сколу (рис. 1д). Така ідентична для всіх іспитів вирубування круглих деталей з товстостілових матеріалів картина неодмінно повторюється, змінюючись лише в кількісних деталях для різних матеріалів.

У всіх приведених прикладах розміри діаметру і товщини є одного і того ж порядку. Такий перебіг вирубування за умовчання переноситься на тонколистові матеріали навіть фольгу і деталі складного профілю. Те, що поведінка матеріалів у таких випадках відрізняється від загально визнаної, описується непевними поясненнями, щодо зв'язку опору вирубуванню з товщиною матеріалу.

Так у М.Ю. Зубцова [2] «... с увеличением его (материала) толщины, сопротивление вырубке несколько уменьшается. Это явление объясняется главным образом тем, что при вырубке толстых материалов создаются более благоприятные условия для образования сдвигов, чем при вырубке тонких материалов. Кроме того, тонкие листы более чувствительны к воздействию режущих кромок штампа во время вырубке, вследствие чего имеет место более сильное упрочнение (наклеп), чем у толстых материалов.» Виходячи з заяви автора, тонколистові матеріали піддаються більшій степені деформації. Аналогічні пояснення автор [2] дає щодо форми контуру, який вирубується. Між тим, жодних експериментів про поведінку тонкого листа за вирубування складних контурів не описано.

Але є привід сумніватись про ідентичну поведінку товстого і тонкого листа за вирубування. Зокрема, дослідження характеру зношування розділових штампів для деталі «Пластина прямокут-на» (рис. 2) проводились для різних товщин смуги і матеріалів [3,4]. Ця деталь має складніший контур ніж коло, тобто найпростіший складний

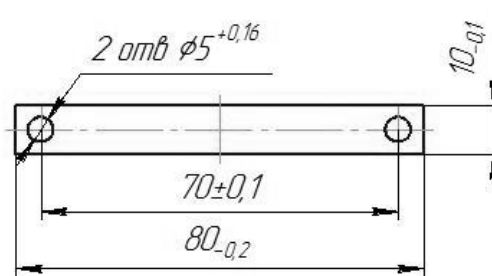


Рис.2. Деталь – пластинка магнітопроводу

контур, а головне те, що її розміри відрізняються один від одного майже на 1...2 порядки. Загальний характер зношування відповідає відомим даним, які описані для круглих деталей [5]. Так, для товщини 1мм смуги зі сталі 20 інтенсивніше зношуються лицьові поверхні (торці) пуансону і матриці, коли ж товщина смуги зменшується до 0.35...0.5мм, то торцеві площини майже не змінюються, але суттєво стираються твірні грані пуансону і матриці, особливо за вирубування електротехнічної сталі 3413.

Але ж у всіх випадках вирубування тонколистої смуги спостерігається неоднакове зношування робочих деталей вздовж довгої і короткої ріжучої кромки. Вздовж довгих сторін, зношування не однакове також, воно більше для краю, суміжного з суцільною смугою, ніж з боку перемичок та відходу смуги. Зношування для товщин 1, 0.5 і 0.35 мм не тільки неідентичне на ріжучих кромках пуансону і матриці, але, на перший погляд, не підкорюється якимось певним закономірностям. Наприклад, за вирубування тонколистої сталі товщиною 0,35 і 0,5мм спостерігається переважне зношування ріжучих кромок коротких сторін пуансону і матриці, а за штампування сталі товщиною 1 мм інтенсивніше стираються ріжучі кромки довгих сторін. Всі ці явища легко підтверджуються більшою висотою завусня вздовж найбільш зношених сторін прямокутника.

На наш погляд, з'ясування такої поведінки матеріалів різної товщини слід шукати у різних схемах навантаження вихідної смуги на першій стадії вирубування-пробивання – пружній деформації заготовки. В залежності від товщини смуга значно розрізняється своєю жорсткістю, і перед початком пластичної деформації має місце перерозподіл прикладених зусиль і утворення специфічних епюр навантажень вздовж ріжучих кромок пуансону і матриці. Для розгляду загальної картини навантаження слід звернутись до теорії гнучких пластин і оболонок [6].

Деталь, яка вирубується зі смуги, відповідає пластинці постійної товщини, яка розглядається в теорії пластин. Також прогини для тонких листів (1, 0.5 і 0.35мм) можуть бути порівняні з товщиною смуги, але вони малі у порівнянні з габаритними розмірами деталі в плані. То згідно до характеру напруженого стану розрізняють наступні три класи пластинок: 1) жорсткі; 2) гнучкі і 3) абсолютно гнучкі або мембрани.

Пластинку називають *жорсткою*, якщо без помітної похибки можна вважати серединний шар нейтральним чи, іншими словами, вільним від напружень розтягу-стиску.

Гнучкою зветься пластинка, за розрахунку якої, у межах пружних деформацій, поряд з напруженнями згину слід урахувувати напруження, рівномірно розподілені вздовж товщини пластини – це напруження в серединній поверхні

Нарешті, *абсолютно гнучкою* пластиною, або *мембраною* зветься така пластинка, за дослідження пружної деформації якої можна знехтувати, власне, напруженням згину у порівнянні з напруженням у серединній поверхні.

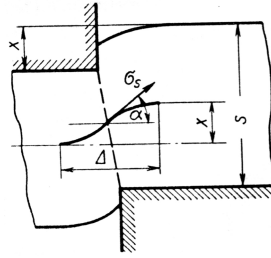


Рис.3. Напруження розтягу, які діють на границі осередку пластичної деформації на стадії пластичного занурення пуансоном у деталь [7] s -товщина деталі; Δ -ширина осередку деформації; x -глибина занурення пуансоном у смугу

Для мембран характерною є рівномірність розподілення напружень вздовж товщини. Ця класифікація достатньо умовна і залежить від прийнятної похибки розрахунків. Щодо чисельних величин, то можна вважати жорсткою деталлю пластинку, якщо її стріла прогину не перевищує приблизно $1/5$ товщини. До них слід віднести всі деталі з товстолістового матеріалу і до них відноситься приведена вище теорія розділових операцій. З другого боку, за стрілою прогину, яка перевищує товщину більше, ніж у 5 разів, пластину можна розглядати абсолютно гнучкою. Проміжні прогини разом з викривленням деталі, що вирубується, під пуансоном слід розглядати як ті, що відносяться до гнучких пластин. Наявність напружень розтягу у осередку деформації, які виникають на його границях на другій стадії вирубування, підтверджує Е.О. Попов [7]. Деякі дослідники вважають, що відділення деталі від смуги викликається не напруженнями зрізу τ_{sp} , а напруженнями розтягу.

Отже, за сумісної дії напружень згину пластини і її розтягу на 1-й стадії вирубування – пружній деформації слід враховувати перерозподіл діючих навантажень на ріжучих кромках робочих деталей штампу у відповідності до теорії пластин і оболонок.

Гнучка деталь-пластина отримує великі прогини ω – переміщення у напрямку товщини деталі. В той же час переміщення від згину у напрямку довжини – u і у напрямку ширини – v , в площині деталі-пластини слід вважати меншого порядку (вдесятеро менше), бо вони діють у масиві металу. Те ж саме справедливо і для деформацій подовження ϵ_x і ϵ_y і зсуву γ_{xy} в серединній площині.

$$\epsilon'_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon'_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1)$$

але з урахуванням значних прогинів ω повні деформації подовження і зсуву у серединному шарі дорівнюватимуть [6].

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \quad (2)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \quad (3)$$

$$\gamma_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} \quad (4)$$

Вказані деформації в гнучкій пластині викликаються подвійним напруженим станом: один відповідає напруженням, рівномірно розподіленим вздовж товщини деталі, другий – напруженням згину. Схема зовнішніх і внутрішніх сил, які діють на одиничний елемент гнучкої пластинки, представлена на рис.4, але тут елемент зображений не в zdeформованому стані.

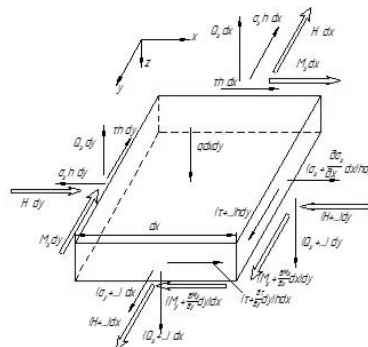


Рис.4. Схема зовнішнього навантаження і складових внутрішніх сил, які діють на одиничний елемент гнучкої пластини

На цей елемент діють напруження σ_x , σ_y , і τ у серединній площині, а також згинальні моменти M_x і M_y навколо кожної з осей від нормальних напружень згину $\sigma_{x,w}$, $\sigma_{y,w}$, крутні моменти H навколо кожної осі від дотичних напружень згину τ_w , а також поперечні сили Q_x і Q_y від дотичних напружень згину. На елемент пластини також діє зовнішнє погонне навантаження – q . З розглядання рівнянь рівноваги: суми проекцій сил на вісі x і y і моментів навколо цих осей, впливають такі співвідношення.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (8)$$

складові цих рівнянь вказані на рис.4 [6].

Ці рівняння отримані за недеформівного стану пластини – це можливе лише для *пологої* вигнутої поверхні. Коли розглядати суму проекцій всіх сил на вісь z, то слід обов’язково ураховувати деформівний стан пластини-деталі. Це дає ще одне диференціальне рівняння рівноваги, яке пов’язує напруження у серединній поверхні і зовнішні зусилля з прогинами пластини у напрямку товщини.

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \sigma_x h \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \sigma_y h \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2\tau h \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + q = 0, \quad (9)$$

де h – товщина деталі.

Жодне з рівнянь (5)...(9) не може бути використане для знаходження епюр напружень в деформівному стані наприкінці першої стадії вирубування, бо невідомі силові складові напруженого стану, тому, спираючись на співвідношення між деформаціями і напруженнями

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} \\ \gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{2\tau(1+\mu)}{E} \end{cases}, \quad (10)$$

де $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ і γ , а σ_x, σ_y , і τ відповідно деформації подовження і зсуву і нормальні і дотичні напруження у серединній площині, а E – модуль пружності і μ – коефіцієнт Пуассона, можна віднайти силові складові рівнянь (5)...(9) [6].

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), \quad (11)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right), \quad (12)$$

$$H = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}, \quad (13)$$

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \omega, \quad (14)$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 \omega}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \omega}{\partial y \partial x^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \omega, \quad (15)$$

де $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ – циліндрична жорсткість пластини, h – її товщина, ω – переміщення у напрямку товщини

пластини, ∇^2 означений двохмірний оператор Лапласа $\nabla^2 \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}$

Підстановка значень поперечних зусиль Q_x і Q_y з формул (14),(15) у рівняння (9) дає вираз (16) [6].

$$D \nabla^2 \nabla^2 \omega = h \sigma_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + h \sigma_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2\tau \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + q, \quad (16)$$

де через $\nabla^2 \nabla^2 ()$ позначено оператор $\nabla^2 \nabla^2 () = \frac{\partial^4 ()}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 ()}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 ()}{\partial y^4}$

Рівняння (16) пов’язує прогин пластинки з інтенсивністю зовнішнього навантаження, але воно містить у собі додаткові невідомі – складові напружень у серединній поверхні σ_x, σ_y , і τ . Вони пов’язані між собою рівняннями (5) і (6) і можуть бути виражені за допомогою функції Φ , так званої *функції напружень* [6].

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad \tau = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (17)$$

Ця функція, у вигляді (17), задовольняє диференційним рівнянням рівноваги (5) і (6).

Після підстановки значень (17) у рівняння (16) отримується рівняння (18) у кінцевому вигляді

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 \omega = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} + \frac{1}{h} q, \quad (18)$$

де значення вхідних літер з'ясовані раніше.

Це рівняння має дві невідомі ω і Φ і для його подальшого розв'язання треба залучити ще одне рівняння – сумісності деформацій [6].

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \quad (19)$$

Підставляючи в це рівняння вирази ε_x , ε_y і γ через напруження за формулами (10), отримуємо вираз

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right] = E \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right], \quad (20)$$

коли ж замінити напруження σ_x , σ_y і σ_z через функцію Φ , то вираз приймає вигляд (21)

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = E \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right], \quad (21)$$

Система двох рівнянь (18) і (21) може бути записана у одноподібній формі (22) [6]

$$\begin{aligned} \frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 \omega &= L(\omega, \Phi) + \frac{q}{h}, \\ \frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi &= -\frac{1}{2} L(\omega, \omega), \end{aligned} \quad (22)$$

Оператор L в застосуванні до функцій ω , Φ буде (23)

$$L(\omega, \Phi) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (23)$$

Виходячи з рівнянь (18) і (21), можна отримати вихідні диференційні рівняння для вказаних вище 3-х видів деталей-пластин.

Для жорсткої пластини, яка знаходиться лише під дією поперечного навантаження, серединна поверхня вільна від напружень. Тому у рівнянні (18) слід поставити $\Phi \equiv 0$ і тоді результатом буде лінійне рівняння

$$D \nabla^2 \nabla^2 \omega = q, \quad (24)$$

Знову повертаючись до рівнянь (14), (15), можна переписати це рівняння у вигляді

$$-\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} = q, \quad (a)$$

Для абсолютно гнучкої пластинки згинна жорсткість D приймається рівною 0 і рівняння (18) і (21) отримують вигляд

$$\begin{aligned} -h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} &= q \\ \nabla^2 \nabla^2 \Phi &= E \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right], \end{aligned} \quad (25)$$

З іншого боку, повертаючись до попередніх формул для абсолютно гнучкої пластинки, отримуємо

$$-h \sigma_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - h \sigma_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2h \tau \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = q, \quad (б)$$

Коли ж гнучка пластинка поруч з поперечним навантаженням піддається дії значних зусиль у серединній поверхні, які не залежать від прогину, то рівняння (18), (21) записуються, як

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 \omega = h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - 2h \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - \frac{q}{h}, \quad (26)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0, \quad (27)$$

або якщо перейти до звичних виразів, отримаємо

$$-\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} + h\sigma_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + h\sigma_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2h\tau\sigma_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} = q, \quad (28)$$

Таким чином, для елемента жорсткої пластинки поперечне навантаження урівноважується різницею проєкцій поперечних зусиль, які діють вздовж граней товщини елемента (рис.5)

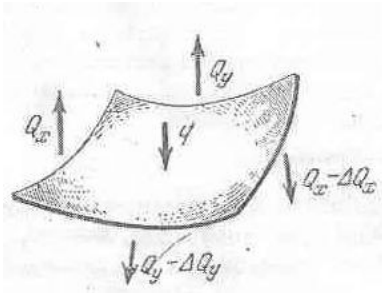


Рис. 5. Поперечне навантаження, врівноважується за рахунок поперечних зусиль [6]

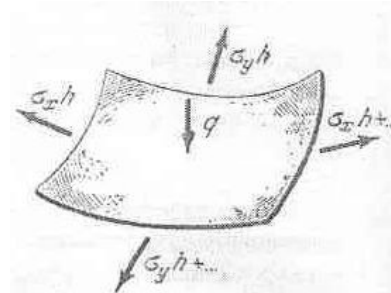


Рис. 6. Поперечне навантаження, врівноважується за рахунок зусиль у серединній поверхні [6]

Навпаки, у випадку абсолютно гнучкої пластини те ж навантаження урівноважується проєкціями на вертикаль зусиль в серединній поверхні (рис.6). В загальному ж випадку гнучкої пластинки, діють зусилля обох типів.

Інтегрування диференціальних рівнянь згину пластинки має проводитись з урахуванням граничних умов. Деталь, яка вирубується, на стадії пружного навантаження знаходиться між кромками пуансона і матриці, це означає відсутність прогину, тобто

$$\omega = 0, \quad (29)$$

Подекуди, особливо для гнучких заготовок, вони вигинаються і відходять від торців матриці і пуансона, тоді можна вважати край зашкеленим, тобто

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (30)$$

Коли наявні значні пружні деформації штамп, то край пластини можна вважати опертим на пружне ребро, жорсткість якого по відношенню до вигину у вертикальній площині дорівнює EI, тоді гранична умова залишається у вигляді

$$EI \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} = R_x, \quad (31)$$

$$EI \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} = -D \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x \partial y^2} \right]. \quad (32)$$

Розв'язання задач вирубування гнучких деталей пов'язане з інтегруванням системи лінійних диференціальних рівнянь (22). Точні методи інтегрування цієї системи майже відсутні і треба використовувати чисельні методи, наприклад варіаційні методи. Одним з найбільш розповсюджених енергетичних принципів є принцип можливих переміщень, котрий для деформованого стану формулюється так: *реальний рівно-важний стан пружної системи характеризується тим, що сума робіт всіх зовнішніх і внутрішніх зусиль на будь-яких кінематично можливих переміщеннях точок пружної системи дорівнює 0.*

Для випадку гнучкої деталі-пластини повна робота зусиль у серединній поверхні і зусиль згину знаходиться у вигляді варіаційного рівняння

$$\iint_F \left(\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 \omega - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} - \frac{q}{h} \right) \delta \omega dx dy = 0, \quad (33)$$

де, крім вказаних раніше символів, присутня варіація $\delta \omega$. Цей інтеграл розв'язується за допомогою програми «MathCad».

Список літератури

1. Donald F.Eary & Edward A.Reed. Techniques of Pressworking sheet metal (An engineering approach to die design). – RAL Motors Institute Industrial Engineering Department, Gene, 1976. – pp.1-19
2. М.Е. Зубцов. Листовая штамповка. Изд. «Машиностроение», Ленинград, 1967г. – С.60-61.
3. В.М. Яворовський, Дослідження зношування вирубних штампів складної форми. У зб. «Наукові нотатки», вип.3, Луцьк, 1996р. – С. 194-200
4. В.Н. Яворовский, И.А. Рощина, Неравномерность износа штампа при вырубке прямоугольных деталей // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением, Москва, №4, 2002г. – С.19-24
5. Ф.П. Михаленко, Стойкость разделительных штампов. – М.,Машиностроение, 1986г. – 223 стр.
6. А.С. Вольмир. Гибкие пластинки и оболочки. - М., Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1956 г. – 413 стр.
7. Е.А. Попов. Основы теории листовой штамповки. – М., Машиностроение, 1968 г. – С. 48-60.