

УДК 621.77

В.М. Михалевич, д.т.н., В.А. Краевский, к.т.н.
Винницький національний технічний університетПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ
ДЕФОРМИРУЕМОСТИ

У роботі зроблений аналіз розв'язків варіаційної задачі для гарячого деформування для випадків двохступеневої та трьохступеневої зміни швидкості деформування й сформульовані варіаційні задачі для холодного деформування та тривалої міцності.

In work the analysis of the variation problem decisions for hot deformation for cases of two-stage and three-stage strain rate change is made and variation problems for cold deformation and durability are formulated

В отличие от холодного деформирования при горячем на интенсивность накопления повреждений, а, соответственно, и на предельную деформацию, существенное влияние оказывает скорость деформирования. Это параметр, который во многих процессах обработки металлов давлением можно варьировать в широких пределах. Поэтому очень важно научиться управлять скоростью деформирования так, чтобы обеспечить максимальное использование пластических свойств материала. Для этой цели в работе [1] были сформулированы две вариационные задачи для процесса горячего деформирования. Первая задача формулируется так: определить закон изменения скорости деформации $\dot{\varepsilon}_u = \dot{\varepsilon}_u(t)$, при котором заданная накопленная деформация ε_* достигается за кратчайшее время t_*

$$\begin{aligned} t_* = t_*(\dot{\varepsilon}_u(t)) \rightarrow \min, \\ \varepsilon_* = \int_0^{t_*} \dot{\varepsilon}_u(\tau) \cdot d\tau, \\ \left\{ \begin{aligned} \int_0^{t_*} \phi(t_* - \tau; I(\tau)) \cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau)) \cdot d\tau = 1, \\ \int_0^t \phi(t - \tau; I(\tau)) \cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau)) \cdot d\tau \leq 1, \forall t \in (0, t_*). \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (1)$$

где t, τ – время; $\phi(t - \tau, I(\tau))$ – ядро наследственности; f – некоторая функция.

Формулирование второй задачи: определить закон изменения скорости деформации $\dot{\varepsilon}_u = \dot{\varepsilon}_u(t)$, при котором за заданное время t_* материал приобретает наибольшую деформацию ε_*

$$\begin{aligned} \varepsilon_* = \int_0^{t_*} \dot{\varepsilon}_u(\tau) \cdot d\tau \rightarrow \max, \\ \left\{ \begin{aligned} \int_0^{t_*} \phi(t_* - \tau; I(\tau)) \cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau)) \cdot d\tau = 1, \\ \int_0^t \phi(t - \tau; I(\tau)) \cdot f(\dot{\varepsilon}_u(\tau)) \cdot d\tau \leq 1, \forall t \in (0, t_*). \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (2)$$

Предпоследнее условие в задачах (1) и (2) показывает очевидный факт, что для обеспечения оптимального режима необходимо использовать весь ресурс пластичности материала, то есть в момент времени t_* состояние материала должно быть близким к разрушению. В то же время последнее условие исключает возможность преждевременного разрушения материала.

Задачу (2) удалось решить для класса кусочно-постоянных функций: для случаев двухступенчатой [2] и трехступенчатой схемы изменения скорости деформаций. Так для двухступенчатого случая изменения скорости деформаций

$$\dot{\varepsilon}_u(t) = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1}, 0 \leq t \leq t_1; \\ \dot{\varepsilon}_{u2}, t_1 < t \leq t_*, \end{cases} \quad (3)$$

задача (2) сведена к задаче нелинейного программирования

$$\begin{aligned} \varepsilon_* &= \dot{\varepsilon}_{u1} \cdot t_1 + \dot{\varepsilon}_{u2} \cdot (t_* - t_1) \rightarrow \max, \\ \left(\frac{t_*}{t_{*1}}\right)^n + \left(\frac{t_* - t_1}{t_{*2}}\right)^n - \left(\frac{t_* - t_1}{t_{*1}}\right)^n &= 1, \\ t_1 &\leq t_{*1}, \end{aligned} \quad (4)$$

в которой целевая функция зависит от трех неизвестных $\dot{\varepsilon}_{u1}, \dot{\varepsilon}_{u2}, t_1$. Здесь

$$t_{*i} = t_{*c}(\dot{\varepsilon}_{ui}), \quad (5)$$

где t_{*c} – известная функция, которая характеризует свойства материала.

Задачу (4) решили с помощью метода множителей Лагранжа. В результате получили оптимальную схему, которая определяется системой

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\dot{\varepsilon}_{u1}} \left\{ \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{1-\frac{1}{n}} + \left[\gamma^n - \dot{\varepsilon}_{u1} \left(t_*^n - \left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{\frac{1}{n}} \right)^n \right) \right] \cdot \left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{\frac{1}{n}} \right)^{1-n} \right\} &= 0, \\ \dot{\varepsilon}_{u2} &= \frac{\gamma^n - \dot{\varepsilon}_{u1} \left[t_*^n - \left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{\frac{1}{n}} \right)^n \right]}{\left(t_* - \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{\frac{1}{n}} \right)^n}; \\ t_1 &= \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Аналогичный подход использовали и для трехступенчатой схемы

$$\dot{\varepsilon}_u = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{u1}, & 0 \leq t \leq t_1; \\ \dot{\varepsilon}_{u2}, & t_1 \leq t \leq t_2; \\ \dot{\varepsilon}_{u3}, & t_2 \leq t \leq t_*, \end{cases} \quad (7)$$

для которой также удалось найти оптимальное решение в виде

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \dot{\varepsilon}_{u1}} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial t_2} = 0; \quad t_1 &= \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{\frac{1}{n}}; \\ \dot{\varepsilon}_{u2} &= \frac{\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1}(t_2 - t_1)^n - \dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n}{(t_2 - t_1)^n}; \\ \dot{\varepsilon}_{u3} &= \frac{\dot{\varepsilon}_{u1}(t_* - t_1)^n - \dot{\varepsilon}_{u1}t_*^n + \gamma^n}{(t_* - t_2)^n} + \frac{\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1}(t_2 - t_1)^n - \dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n}{(t_2 - t_1)^n} - \\ &\quad - \frac{(\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1}(t_2 - t_1)^n - \dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n)(t_* - t_1)^n}{(t_2 - t_1)^n(t_* - t_2)^n}, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\begin{aligned} F(\dot{\varepsilon}_{u1}, t_2) &= \gamma \dot{\varepsilon}_{u1}^{1-\frac{1}{n}} + \left(\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1} \cdot \rho(t_2)^n - \dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n \right) \cdot \rho(t_2)^{1-n} + \\ &+ \frac{\dot{\varepsilon}_{u1} \cdot \rho(t_*)^n - \dot{\varepsilon}_{u1}t_*^n + \gamma^n}{(t_* - t_2)^{n-1}} + \frac{(\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1} \cdot \rho(t_2)^n - \dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n)(t_* - t_2)}{\rho(t_2)^n} - \\ &- \frac{(\gamma^n + \dot{\varepsilon}_{u1} \cdot \rho(t_2)^n - \dot{\varepsilon}_{u1}t_2^n) \cdot \rho(t_*)^n}{(t_* - t_2)^{n-1} \cdot \rho(t_2)^n}. \end{aligned} \quad (9)$$

Соотношения (6) и (8) использовали для моделирования непрерывного кручения образцов из стали 14X17H2 при температуре 1150⁰С [3]. При кручении с постоянной скоростью максимальная деформация, которую может выдержать материал до разрушения $\varepsilon_* = 1.8$. При использовании двухступенчатой схемы деформирования, параметры которой определяются решением системы (6).

$$\dot{\varepsilon}_u(t) = \begin{cases} 0.4329 c^{-1}, & 0 \leq t \leq 3.4268; \\ 0.0164 c^{-1}, & 3.4268 < t \leq 30, \end{cases} \quad (10)$$

получим деформацию $\varepsilon^* = 1.914$. Как показывает анализ, проведенный в работе [2], использование других схем двухступенчатого деформирования приводит к уменьшению граничной деформации. Согласно расчетам оптимальная трехступенчатая схема имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_u = \begin{cases} 1.59 \text{ c}^{-1}, 0 \leq t \leq 0.821; \\ 0.048 \text{ c}^{-1}, 0.821 < t \leq 9.713; \\ 0.01 \text{ c}^{-1}, 9.713 < t \leq 30. \end{cases} \quad (11)$$

Накопленная деформация при использовании схемы (11) $\varepsilon^* = 1.939$. Динамика изменения накопленной деформации в процессе деформирования при использовании разных режимов показана на рис. 1. Следует отметить, что эффект от оптимизации будет больше для материалов с ярко выраженной зависимостью граничных деформаций от скорости деформаций.

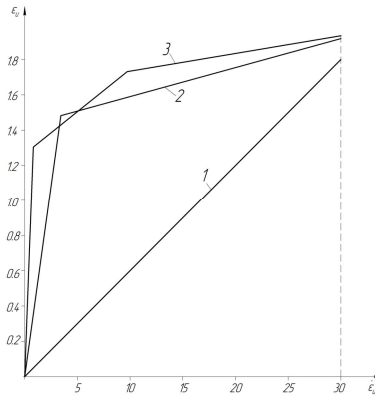


Рис. 1. Динамика изменения накопленной деформации:
 1 – при деформировании с постоянной скоростью; 2 – при деформировании по схеме (10); 3 – при деформировании по схеме (11)

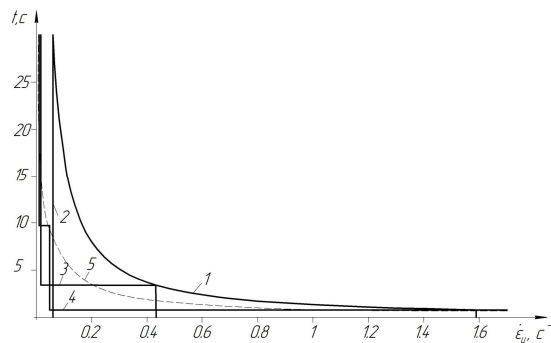


Рис. 2. Зависимость времени до разрушения от схемы изменения скорости деформирования: 1 – кривая пластичности $t_{*c} = t_{*c}(\dot{\varepsilon}_u)$; 2 – деформирование с постоянной скоростью; 3 – деформирование по схеме (10); 4 – деформирование по схеме (11); 5 – деформирование по непрерывному закону изменения скорости

Полученные результаты показывают, что для двух- и трехступенчатого деформирования оптимальными являются схемы с понижением скорости деформирования. При этом с увеличением количества ступеней ε^* также увеличивается (рис. 2). Тогда, возможно, оптимальную схему мы получим при неограниченном возрастании количества ступеней, следовательно, существует закон изменения скорости деформации, который является решением задачи (2) и описывается непрерывной функцией (кривая 5 на рис. 2).

По аналогии с горячим деформированием соответственные вариационные задачи можно сформулировать как для холодного деформирования

$$A^* = \int_0^{\varepsilon^*} \sigma_u d\varepsilon_u, \quad (12)$$

$$\begin{cases} \int_0^{\varepsilon^*} \varphi(\varepsilon_u, I(\varepsilon_u)) d\varepsilon_u = 1; \\ 0 \\ \int_0^{\varepsilon_u} \varphi(\varepsilon_u, I(\varepsilon_u)) d\varepsilon_u \leq 1, \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon^*), \\ 0 \end{cases}$$

так и для процесса длительной прочности

$$A^* = \int_0^{\varepsilon^*} \sigma_u d\varepsilon_u,$$

$$\begin{cases} \int_0^{t^*} \varphi(t^* - \tau; I(\tau)) \sigma_u(\tau) d\tau = 1; \\ \int_0^t \varphi(t - \tau; I(\tau)) \sigma_u(\tau) d\tau \leq 1, \forall t \in (0, t^*), \end{cases} \quad (13)$$

где A^* – работа пластического деформирования на единицу объема, σ_u – интенсивность напряжений;

I – безразмерные инварианты напряженного состояния.

Анализ вариационных задач (12) и (13), а также поиск оптимального решения в классе непрерывных функций задач (1) и (2) являются предметом последующих исследований.

Выводы

В работе сделан анализ решений вариационной задачи для горячего деформирования для случаев двухступенчатого и трехступенчатого изменения скорости деформирования и сформулированы вариационные задачи для холодного деформирования и длительной прочности.

Список литературы

1. Михалевич В. М. Формулювання варіаційної задачі для моделі накопичення пошкоджень при гарячому деформуванні / Михалевич В. М., Краєвський В. О. // В зб.: «Обработка материалов тиском». Збірник наукових праць. – Краматорськ, 2009. – №2(21). – С. 12-16. – ISBN 978-966-379-339-9.
2. Михалевич В. М. Вісесиметрична осадка циліндричних заготовок / Михалевич В. М., Краєвський В. О., Добраний Ю. В. // Наукові нотатки: міжвузівський збірник (за напрямом «Інженерна механіка»). – Луцьк: – 2009 – Випуск 25, ч. 1 – С. 241-249. – ISBN 5-7763-8653-5.
3. Богатов А. А. Влияние горячей прерывистой деформации на пластичность металла / Богатов А. А., Смирнов М. В., Криницын В. А. и др. // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1981. – №12. – С. 37-40.