

ДИНАМИКА ЦЕНТРИФУГИ НА НЕЛИНЕЙНО УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Розглянуто вирішення задачі динаміки центрифуги при умові, що опори є нелінійно пружними. Якщо вони мають м'яку характеристику при досить великих переміщеннях її можна апроксимувати синусоїдальною залежністю. При цих припущеннях за допомогою еліптичних функцій отриманий розв'язок, що описує рух центрифуги при кінцевих переміщеннях та наближений розв'язок за допомогою елементарних функцій при малих переміщеннях.

The decision of task of dynamics of centrifuge is considered on condition that supports are nonlinear resilient. If they have soft description at the large enough moving she can be approximated by sinewave dependence. At these suppositions by means of elliptic functions there is the got decision that describes motion of centrifuge at the eventual moving and close decision by means of elementary functions at the small moving.

Введение.

Для определения долговечности конструкции необходимо определение сил действующих на нее. Силы, действующие на центрифугу, возникают в результате ее вращательного движения и колебаний. В силу этих причин необходимо изучение движения центрифуги и ее динамики. Центрифуга представляет собой цилиндр 1, вращающийся вокруг вертикальной оси 2, который приводится во вращение электродвигателем, ротор которого 3, сидит на той же самой оси, а статор и корпус 4 закреплены на упругих опорах 5 (рис.1). Опоры сконструированы так, что позволяют центрифуге поворачиваться относительно неподвижных осей ξ, η , причем жесткость при повороте относительно них одинакова.

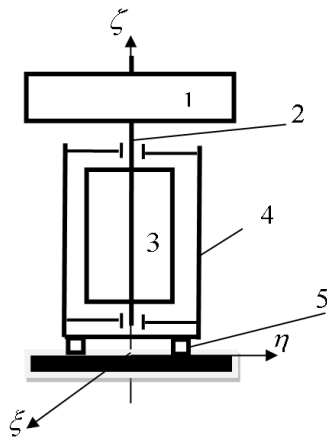


Рис.1. Схематическое изображение лабораторной центрифуги

Конструкция центрифуги такова, что жесткость вала электродвигателя, на который, по сути, насажена центрифуга, во много раз больше чем жесткость опор. В силу этого вал можно считать абсолютно жестким. Таким образом, движение центрифуги состоит из вращательного движения относительно собственной оси симметрии и вращения вокруг осей ξ, η . Упругим элементом опор центрифуги являются резиновые цилиндры. В связи с этим при малых перемещениях упругие силы, которые действуют со стороны опор, можно считать слабо нелинейными с мягкой характеристикой.

Основная часть.

Центрифуга в силу конструкции и сделанных выше предположений представляет собой твердое тело с неподвижной точкой. Для описания его движения использован один из вариантов углов Эйлера-Крилова рис.2. Для решения задачи используем уравнения

Лагранжа второго рода $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, где L - функция Лагранжа,

$L = K - P$, где K - кинетическая энергия, P - потенциальная энергия [4, 5, 6]. Главными осями центрифуги являются оси x, y, z , причем

$J_x = J_y = J$ и равны сумме моментов инерции всех деталей

вращающихся относительно этих осей. Угловые скорости вращения

$$\omega_z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta,$$

$$\omega_x = -\dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \varphi,$$

$$\omega_y = \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi.$$

(1)

Соответственно скоростям находится и кинетическая энергия

$$K = \frac{1}{2} \left[J_z (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + J (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) \right].$$

(2)

Потенциальная энергия системы состоит из потенциальной энергии деформации опоры, предполагается, что момент на опоре пропорционален синусу угла отклонения от неподвижной вертикальной оси $M = C \sin \theta$. Опора считается абсолютно упругой поэтому потенциальная энергия деформации равна

$$P = C \int_0^\theta \sin \alpha d\alpha = C(1 - \cos \theta). \quad (3)$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \left[J_z (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + J (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) \right] - C(1 - \cos \theta), \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad q_1 = \psi, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \varphi.$$

Находим производные

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = J_z (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta + J \dot{\psi} \sin^2 \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = J \dot{\theta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -J_z (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \dot{\psi} \sin \theta + J \dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + C \sin \theta, \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_z (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta), \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0. \quad (7)$$

Из полученных соотношений следует, что координаты ψ и φ - циклические, так как из уравнений Лагранжа следует

$$(\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = C_1, \quad J_z (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) \cos \theta + J \dot{\psi} \sin^2 \theta = C_2. \quad (8)$$

Используем закон сохранения энергии $E = K + P$ в соответствии с которым имеем

$$E = \frac{1}{2} \left[J_z (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)^2 + J (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) \right] + C(1 - \cos \theta). \quad (9)$$

Используя закон сохранения энергии [4], и циклические координаты [2] находим скорость $\dot{\theta}$

$$J \dot{\theta}^2 = 2[E - C(1 - \cos \theta)] - J_z C_1^2 - J \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta, \quad (10)$$

$$J_z C_1 \cos \theta + J \dot{\psi} \sin^2 \theta = C_2, \quad (11)$$

$$\dot{\psi} \sin \theta = \frac{C_2 - J_z C_1 \cos \theta}{J \sin \theta}, \quad J \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta = \frac{(C_2 - J_z C_1 \cos \theta)^2}{J \sin^2 \theta}, \quad (12)$$

$$J \dot{\theta}^2 = 2[E - C(1 - \cos \theta)] - J_z C_1^2 - \frac{(C_2 - J_z C_1 \cos \theta)^2}{J \sin^2 \theta}, \quad (13)$$

$$J^2 \sin^2 \theta \dot{\theta}^2 = 2[E - C(1 - \cos \theta)] J \sin^2 \theta - J_z C_1^2 J \sin^2 \theta - (C_2 - J_z C_1 \cos \theta)^2, \quad (14)$$

$$\left(\frac{d}{dt} \cos \theta \right)^2 = \frac{1}{J^2} \left\{ 2J[E - C(1 - \cos \theta)] \sin^2 \theta - J_z C_1^2 J \sin^2 \theta - (C_2 - J_z C_1 \cos \theta)^2 \right\} \quad (15)$$

Из полученного выражения следует, что правая часть равна нулю при $\theta = 0$ т.е., точка $\theta = 0$ является корнем уравнения если правую часть равна нулю. Второй корень уравнения очевидно равен углу при котором вся энергия переходит в потенциальную энергию. Очевидно, что потенциальная энергия максимальна при $\theta = \pi/2$ и равна C .

Используя преобразование $y = \cos \theta$, получаем дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \frac{1}{J^2} \left\{ 2J[E - C(1 - y)](1 - y^2) - J_z C_1^2 J(1 - y^2) - (C_2 - J_z C_1 y)^2 \right\}. \quad (16)$$

Правая часть уравнения представляет собой кубический полином. Рассматриваемая задача имеет решение при условии, что правая часть положительна. Кубический полином имеет в общем случае три корня. В данном случае один корень равен 1, второй корень должен находится на интервале $0 < y < 1$. Так как при $y \rightarrow -\infty$ правая часть стремится к бесконечности [1, 2].

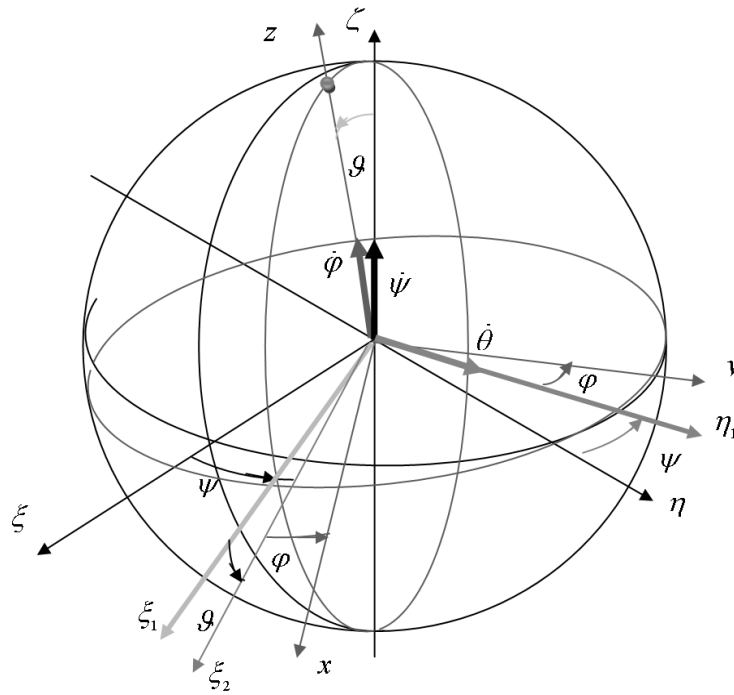


Рис. 2. Углы Эйлера-Крылова

После приведения подобных полиномов принимает вид

$$\dot{y}^2 = \frac{1}{J^2} \left[(2JE - 2JC - JJ_z C_1^2 - C_2^2) + (2JC + 2C_2 I_z C_1) y + (-2JE + 2JC + JJ_z C_1^2 + J_z^2 C_1^2) y^2 - 2JC y^3 \right], \quad (17)$$

решением дифференциальных уравнений такого типа являются эллиптические функции [3].

Если определить коэффициенты в правой части следующим образом

$$A_4 = 2JE - 2JC - JJ_z C_1^2 - C_2^2, \quad 4A_3 = 2JC + 2C_2 I_z C_1, \quad (18)$$

$$6A_2 = -2EJ + 2JC + JJ_z C_1^2 - C_1^2 J_z^2, \quad 4A_1 = -2JC. \quad (19)$$

Результат можно представить в виде

$$4A_1 Y^3 + 6A_2 Y^2 + 4A_3 Y + A_4 = \dot{Y}^2. \quad (20)$$

Если использовать преобразование

$$g_2 = 3A_2^2 - 4A_1 A_3, \quad g_3 = 2A_1 A_2 A_3 - A_2^3 - A_1^2 A_4, \quad \dot{z} = \frac{\dot{Y}}{A_1} \quad (21)$$

то полученное уравнение приводится к стандартной форме Вейерштрасса

$$\dot{z}^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3. \quad (22)$$

Решением этого уравнения является эллиптическая функция Вейерштрасса $\wp(t)$ [1,2,3].

Для дальнейшего анализа движения может понадобиться область определения коэффициентов. По определению $A_1 < 0$ и $A_3 > 0$. Так как при $y = 0$ имеем $\dot{y}^2 = (2JE - 2JC - JJ_z C_1^2 - C_2^2) / J^2$, то $(2JE - 2JC - JJ_z C_1^2 - C_2^2) \geq 0$ поэтому $A_4 \geq 0$. Анализ соотношения между A_4 и $6A_2$ показывает, что $A_2 < 0$. Таким образом $A_1 < 0$, $A_2 < 0$, $A_3 > 0$, $A_4 > 0$.

Рассмотрим приближенное решение, которое имеет место для линейно упругой опоры при малых углах колебания центрифуги. В этом случае заменяем $\sin \theta \rightarrow \theta$, $\cos \theta \rightarrow 1 - \frac{1}{2} \theta^2$ и получаем уравнение

$$\left[\frac{d}{dt}(\theta^2) \right]^2 = \frac{4}{J^2} \left[(2JE - J_z C_1^2 J) \theta^2 - \left(JC + \frac{1}{4} J_z^2 C_1^2 \right) \theta^4 \right], \quad (23)$$

Решение этого уравнения

$$\theta = \sqrt{\frac{a}{b}} \sin \left[\frac{1}{2} \sqrt{b} (t - \theta_0) \right], \quad (24)$$

где

$$a = \frac{4}{J^2} (2JE - J_z C_1^2 J), \quad b = \frac{4}{J^2} \left(JC + \frac{1}{4} J_z^2 C_1^2 \right). \quad (25)$$

После определения θ , используя соотношения

$$\dot{\psi} = \frac{C_2 - J_z C_1 \cos \theta}{J \sin^2 \theta}, \quad \dot{\varphi} = C_1 - \dot{\psi} \cos \theta, \quad (26)$$

находим $\dot{\psi}, \dot{\varphi}$ и интегрируя их находим ψ, φ . Постоянные C_1, C_2 находятся из начальных условий.

Выводы.

При малых углах θ скорость $\dot{\psi}$ оказывается постоянной, а $\dot{\varphi}$ к угловой скорости вращения ротора центрифуги.

Список литературы

1. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и математическими таблицами. М., «Наука», 1979. – 832с. с илл.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., «Наука», 1974. – 431с.
3. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1967. – 299с.
4. Лурье А.И. Аналитическая механика. М., 1961. – 824с.
5. Павловский М.А., Петренко В.Е. Виброустойчивость гироскопов. К., 1982. – 172с.
6. Павловский М.А., Путята Т.В. Теоретическая механика. К., 1985. – 328с.