

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ОПИСУ КІНЕМАТИЧНИХ ПАР МЕХАНІЗМІВ В ЗАДАЧАХ ПРОЕКТУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЇ СКЛАДАННЯ

Представлены результаты исследования характера возможных движений между элементами кинематических пар. Полученные результаты подтвердили гипотезу о том, что любая кинематическая пара может быть описана через бинарные отношения ограниченной подвижности (БООП). Системный анализ всех вариантов взаимодействия БООП также позволил выявить «недопустимые» сочетания. Дано объяснение причин невозможности некоторых сочетаний. Описание взаимодействия отдельных деталей в виде БВОР можно использовать в системах автоматизированного проектирования сборочных изделий и технологий сборки.

Results of studying the nature of possible movements between the elements of kinematic pairs are described. The obtained results confirmed the hypothesis that every kinematic pair can be described by binary relations of movement restriction (BRMR). The "unacceptable" combinations of BRMR are detected due to analysis of all possible combinations. The explanation of certain combinations impossibility is given. A description of the interaction between individual parts in terms of BRMR can be used in computer-aided design of assembly products and assembly processes.

Одним з етапів процедури цілеспрямованого скорочення кількості деталей у СВ [1] є аналіз кінематики виробу. Для реалізації зв'язків між структурними елементами системи автоматизованого DFA аналізу бажано, щоб процедури аналізу СВ та синтезу ППС спиралися на єдиний формат представлення даних. Для синтезу ППС використовується модель СВ у вигляді БВОР [2]. З іншого боку, для формального опису кінематики з'єднаних ланок механізму та кінематики механізму в цілому використовується *теорія механізмів і машин* (ТММ) [3]. Формального зв'язку між моделлю механізму у вигляді БВОР та його кінематикою на сьогоднішній день немає. Від моделі механізму в термінах ТММ формально перейти до алгоритмів *проектуювання технології складання* (ПТС) неможливо, так як в ТММ виконуються спрощення, які полегшують структурний, кінематичний та динамічний аналіз механізму, проте унеможливають аналіз конструктивних особливостей його реалізації. Зворотній крок, від ПТС до ТММ, може бути реалізований. Для цього необхідно: формалізувати логічні залежності, придатні для аналізу математичного представлення виробу та дослідження його кінематичної структури, розробити алгоритм автоматизованого синтезу кінематичної структури складального виробу.

Складальні вироби, які містять рухомі деталі у зібраному стані, являють собою механізми. З точки зору структури механізму у СВ можна виокремити дві множини деталей: A_0^K – умовно нерухомі деталі; A^M – деталі, які рухаються відносно деталей, що належать множині A_0^K . Множина A^M містить підмножини A_i^K деталей, які утворюють між собою одну жорстку рухому систему тіл, що має назву *рухомої ланки механізму*. Ознакою належності деталей одній множині A_i^K є відсутність відносного руху між цими деталями в зібраному стані. Усі деталі множини A_0^K утворюють одну жорстку нерухому систему тіл, що має назву *нерухома ланка або стійка*. Таким чином, у механізмі завжди є одна нерухома ланка та деяка кількість рухомих ланок. З точки зору кінематичної структури СВ може бути представлений наступним чином:

$$A = A_0^K \cup \sum_{i=1}^n A_i^K, \quad (1)$$

де n – кількість рухомих ланок.

В основі будь якого механізму як засобу передачі зусилля та перетворення руху лежить система кінематичних ланок, з'єднаних між собою кінематичними парами, – кінематичний ланцюг [4].

Теоретично необхідна кількість деталей СВ для реалізації його функцій як механізму дорівнює кількості кінематичних ланок у кінематичному ланцюгу, що є основою механізму. Тому можна стверджувати, що кінематика СВ не буде порушена, якщо множина деталей A_i^K буде інтегрована в одну деталь a_i^{IK} , так само як і множина A_0^K замінена деталлю a_0^{IK} . Тоді вираз (1) набуває вигляду:

$$A = a_0^{IK} \cup \sum_{i=1}^n a_i^{IK}, \quad (2)$$

Обмеження M_A^F [5] може бути ураховано в автоматизованому режимі, якщо буде створена процедура формального виявлення множин A_0^K та A_i^K , що базується на аналізі БВОР між деталями виробу.

Модель БВОР розглядає обмеження рухливості між парами твердих тіл. Проте, для визначення кількості ступенів вільності твердого тіла необхідно проаналізувати обмеження рухливості – умови зв'язку, які накладають на нього усі тверді тіла, які мають з ним поверхні контакту. Якщо усі деталі, які беруть участь в утворенні з'єднання замінити двома інтегрованими деталями (1, 2), то задача визначення кількості ступенів вільності твердого тіла зводиться до аналізу БВОР між парою деталей.

Необхідною умовою існування з'єднання між двома деталями a_i та a_j є наявність контакту між ними хоча б в одному з координатних напрямків, тобто

$$\begin{aligned} & \{G_M(R_{G,t \in T}^1)[i, j]\} \vee \{G_M(R_{G,t \in T}^1)[j, i]\} \vee \\ & \vee \{G_R(R_{G,t \in T}^1)[i, j]\} \vee \{G_R(R_{G,t \in T}^1)[j, i]\} = 1' \end{aligned} \quad (3)$$

де $G_M(R_{G,t \in T}^1)$ – поступальні і $G_R(R_{G,t \in T}^1)$ – обертальні початкові БВОР на множині координатних напрямів $t \in T$, де $T = \{X, Y, Z\}$.

Пара деталей a_i і a_j утворює **нерухоме з'єднання**, якщо вони взаємно обмежені по всіх координатних напрямках, тобто

$$\begin{aligned} & \sum_{t \in T} \left(\{G_M(R_{G,t}^1)[i, j]\} \vee \{G_M(R_{G,t}^1)[j, i]\} \right) + \\ & + \sum_{t \in T} \left(\{G_R(R_{G,t}^1)[i, j]\} \vee \{G_R(R_{G,t}^1)[j, i]\} \right) = 6 \end{aligned} \quad (4)$$

Пара деталей a_i і a_j утворює **рухоме з'єднання**, якщо між ними відсутнє обмеження уздовж хоча б одного координатного напрямку, тобто

$$\begin{aligned} & 0 < \sum_{t \in T} \left(\{G_M(R_{G,t}^1)[i, j]\} \vee \{G_M(R_{G,t}^1)[j, i]\} \right) + \\ & + \sum_{t \in T} \left(\{G_R(R_{G,t}^1)[i, j]\} \vee \{G_R(R_{G,t}^1)[j, i]\} \right) < 6 \end{aligned} \quad (5)$$

Відсутність обмеження руху деталі a_i з боку деталі a_j ідентифікується по наявності «0» у першому біті елементу матриці БВОР, який знаходиться на перетині i -го рядка та j -го стовпчика.

$$G(R_{G,t \in T}^1)[i, j] = 0 \quad (6)$$

Відношення обмеження рухливості у з'єднанні двох деталей є інвертним, тобто якщо деталь a_i може переміщуватись в напрямку « $t+$ » відносно деталі a_j , то деталь a_j може переміщуватись відносно деталі a_i в напрямку « $t-$ », тобто:

$$G(R_{G,t+}^1)[i, j] = 0 \Rightarrow G(R_{G,t-}^1)[j, i] = 0, t \in T \quad (7)$$

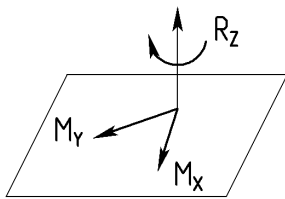
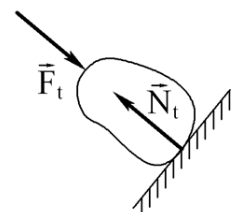
При визначенні кінематичної пари наявність такого руху будемо позначати M_t , якщо він має поступальний характер і R_t , якщо він має обертальний характер, причому $t \in T$, де $T = \{m, n, k\}$. Три координатні напрямки на двох множинах можливих рухів утворюють множину усіх можливих ступенів вільності з'єднання:

$$J = \{M_x, M_y, M_z\} \cup \{R_x, R_y, R_z\}, x \in T, y \in T, z \in T \quad (8)$$

Множина рухів R_t залежить від множини M_t – наявності ступенів вільності твердого тіла (відсутність обмежень рухливості) по двох взаємно перпендикулярних напрямках свідчить про обов'язкову наявність обертального ступеня вільності навколо нормалі до площини, утвореної цими двома напрямками (рис. 1):

$$\{M_x, M_y\} \rightarrow \{R_z\} \quad (9)$$

Доведемо це твердження. Якщо на тверде тіло накладено в'язь в напрямку t (рис. 2), то прикладання сили в даному напрямку не призведе до руху тіла. Якщо в'язь не накладено, то прикладання сили в напрямку t викликає рух тіла в даному напрямку.

Рис. 1. Залежність R_z від M_y та M_x Рис. 2. Прикладання сили F_t не викликає руху тіла

Відсутність в'язей в двох взаємоперпендикулярних напрямках означає відсутність в'язей у площині ними утвореній. А це означає, що прикладання будь-якої сили в цій площині викликати рух тіла (рис. 3), в тому числі і прикладання пари паралельних сил (рис. 4), напрямлених у протилежні боки уздовж незбіжних ліній дії.

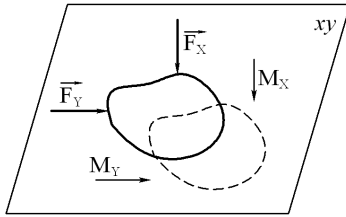


Рис. 3. Прикладання сил F_x та F_y викликає рух тіла

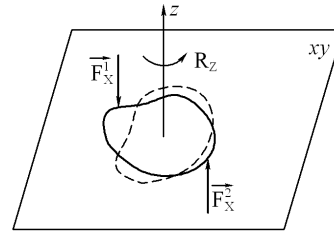


Рис. 4. Створення крутного моменту навколо осі z

Такі сили створюють крутний момент, який викликає обертання твердого тіла. Таким чином, існування $\{M_x, M_y\}$ свідчить про існування $\{R_z\}$.

Відсутність контакту між твердими тілами автоматично визначає відсутність обмежень обертального руху, тобто

$$\begin{cases} \{M_x, M_y\} \rightarrow \{R_z\} \\ \{M_x, M_z\} \rightarrow \{R_y\} \\ \{M_y, M_z\} \rightarrow \{R_x\} \end{cases} \Rightarrow \{M_x, M_y, M_z\} \rightarrow \{R_x, R_y, R_z\} \quad (10)$$

Кількість та напрямки можливих рухів у з'єднанні двох деталей визначають тип кінематичної пари. Характер з'єднання між деталями може бути однозначно ідентифікований на основі математичної моделі БВОР, представленій у вигляді матриць, що відповідають трьом поступальним та трьом обертальним напрямкам.

Відсутність ступенів вільності у з'єднанні двох деталей ідентифікується по відсутності «0» у молодшому біті матриць БВОР по всіх координатних напрямках, тобто:

$$G(R_{G,t}^1) = 1 \forall t \in T \quad (11)$$

Прикладом такого з'єднання є пресове з'єднання (рис. 5).

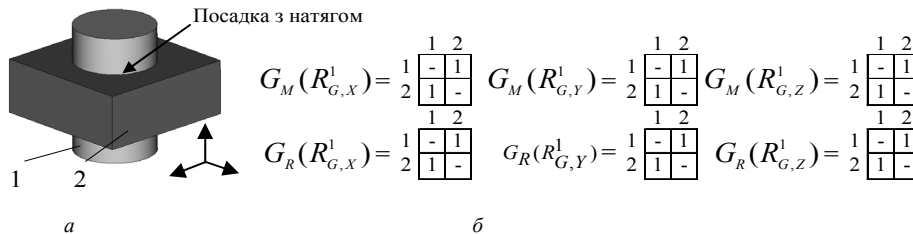


Рис. 5. Нерухоме з'єднання двох деталей: а) 3D модель; б) матриці БВОР

Відсутність з'єднання між двома деталями ідентифікується по відсутності обмежень рухливості в усіх напрямках (рис. 6):

$$G(R_{G,t}^1) = 0 \forall t \in T \quad (12)$$

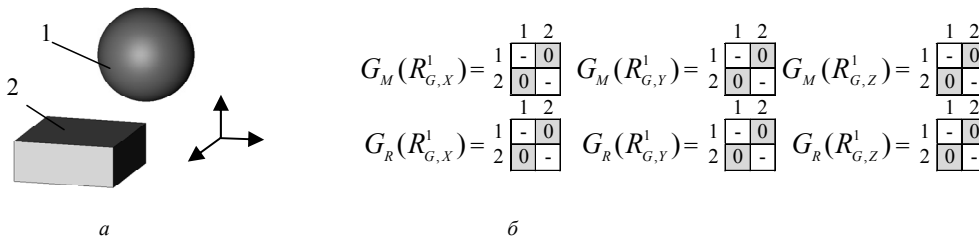


Рис. 6. Відсутність з'єднання двох деталей: а) 3D модель; б) матриці БВОР

Пари I класу. Необхідною і достатньою умовою існування пари I класу є наявність контакту в одному з напрямків, причому, відповідно до твердження (9) він може бути лише поступальним, тоді умова існування КП I класу (рис. 7) може бути записана так:

$$\exists t G_M(R_{G,t}^1) = 1, t \in T \quad (13)$$

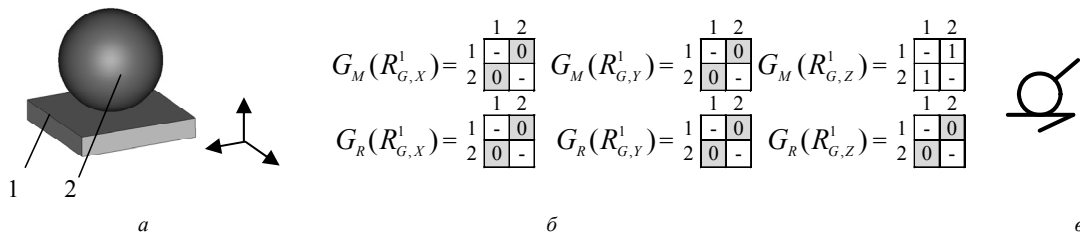


Рис. 7. Кінематична пара «шар-площина»: а) 3D модель; б) матриці БВОР; в) умовне позначення

Пари II класу. Необхідною і достатньою умовою існування пари II класу є наявність обмеження рухливості з'єднання в двох напрямках. Існує 4 варіанти сполучення обмежень рухливості: 2 з них суперечать твердженню (9), інші два можуть бути описані наступним чином:

$$\exists t_1, t_2 G_M(R_{G,t_1}^1) \wedge (G_M(R_{G,t_2}^1) \vee G_R(R_{G,t_2}^1)) = 1, t_1, t_2 \in T \quad (14)$$

В залежності від комбінацій можливих рухів відповідно до рівняння (14) існує два типи кінематичних пар II класу: шар-циліндр (рис. 8) та площина-циліндр.

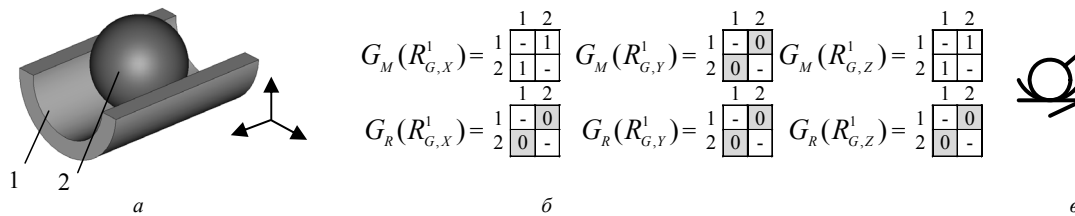


Рис. 8. Кінематична пара «шар-циліндр»: а) 3D модель; б) матриці БВОР; в) умовне позначення

Пари III класу. Необхідною і достатньою умовою існування пари III класу є наявність обмеження рухливості з'єднання в трьох напрямках. Існує 6 варіантів сполучення можливих рухів у такому з'єднанні: 2 з них суперечать твердженню (9), інші описуються наступним рівнянням:

$$\begin{aligned} \exists t_1, t_2, t_3 G_M(R_{G,t_1}^1) \wedge (G_M(R_{G,t_2}^1) \vee G_R(R_{G,t_2}^1)) \wedge \\ \wedge (G_M(R_{G,t_3}^1) \vee G_R(R_{G,t_3}^1)) = 1, t_1, t_2, t_3 \in T \end{aligned} \quad (15)$$

В залежності від комбінацій можливих рухів у з'єднанні згідно (15) існує чотири типи кінематичних пар III класу. Серед них дві – сферична та площинна – мають формальні назви і позначення.

Крім вказаних вище двох кінематичних пар існує ще дві, проте, вони не мають формальної назви та позначення. Для ідентифікації даних кінематичних пар запропоновані наступні назви: «площина-шар з пальцем» (рис. 9) та «клиново-циліндрична» пара (рис. 10).

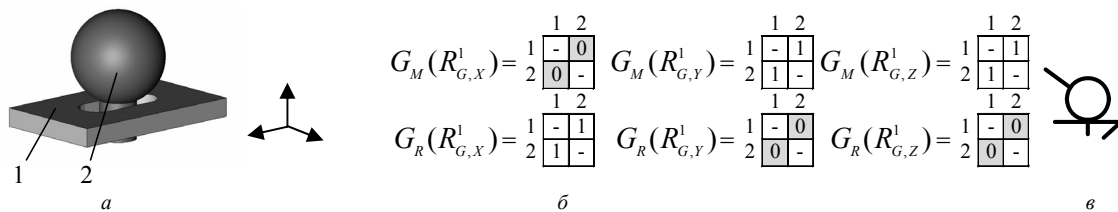


Рис. 9. Кінематична пара «площина-шар з пальцем»: а) 3D модель; б) матриці БВОР; в) умовне позначення

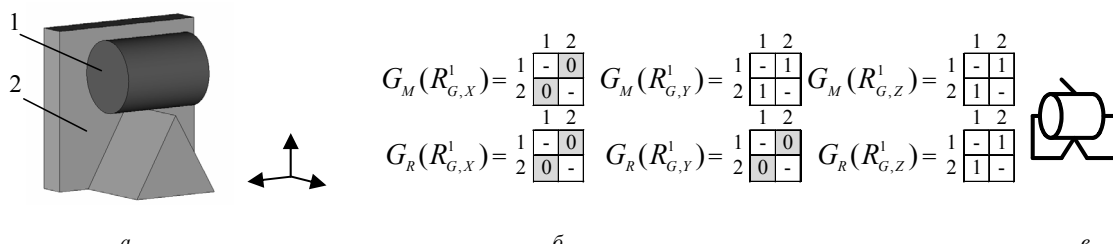


Рис. 10. Кінематична пара «клиново-циліндрична»: а) 3D модель; б) матриці БВОР; в) умовне позначення

Пари IV класу. Необхідною і достатньою умовою існування пари IV класу є наявність обмеження рухливості з'єднання в чотирьох напрямках. Існує 4 варіанти сполучення можливих рухів у такому з'єднанні: один з них суперечить твердженню (9), інші описуються наступним рівнянням:

$$\begin{aligned} & \exists t_1, t_2, t_3 G_M(R_{G,t_1}^1) \wedge G_R(R_{G,t_1}^1) \wedge \left(\left(G_M(R_{G,t_2}^1) + G_R(R_{G,t_2}^1) \right) \wedge \left(G_M(R_{G,t_3}^1) + G_R(R_{G,t_3}^1) \right) \right) + \\ & + \left(\left(G_M(R_{G,t_2}^1) \sim G_R(R_{G,t_2}^1) \right) \wedge \left(G_M(R_{G,t_3}^1) \sim G_R(R_{G,t_3}^1) \right) \wedge \left(G_M(R_{G,t_3}^1) + G_M(R_{G,t_2}^1) \right) \right) \\ & = 1, t_1, t_2, t_3 \in T \end{aligned} \quad (16)$$

В залежності від комбінацій можливих рухів згідно (16) існують три типи кінематичних пар IV класу. Дві з них – циліндрична та сферична з пальцем – мають формальну назву та позначення, одна з них існує (рис. 11), проте формальної назви не має.

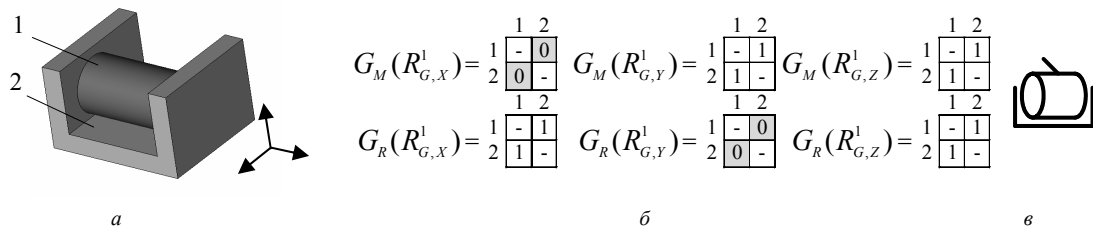


Рис. 11. Кінематична пара IV класу: а) 3D модель; б) матриці БВОР; в) умовне позначення

Пари V класу. Необхідною і достатньою умовою існування пари V класу є наявність обмеження рухливості з'єднання в п'яти напрямках:

$$\begin{aligned} & \exists t_1, t_2, t_3 G_M(R_{G,t_1}^1) \wedge G_R(R_{G,t_1}^1) \wedge G(R_{G,t_2}^1) \wedge G_R(R_{G,t_2}^1) \wedge \\ & \wedge \left(G_M(R_{G,t_3}^1) + G_R(R_{G,t_3}^1) \right) = 1, t_1, t_2, t_3 \in T \end{aligned} \quad (17)$$

В залежності від комбінацій можливих рухів існують два типи кінематичних пар V класу: поступальна (рис. 12), обертальна.

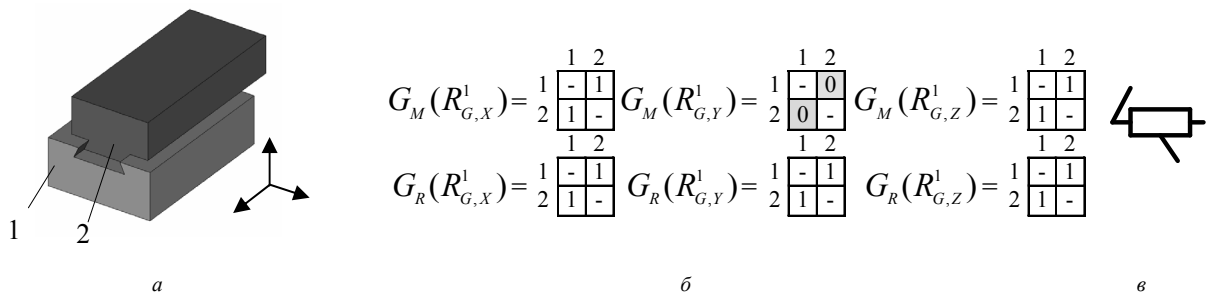


Рис. 12. Кінематична пара «поступальна»: а) 3D модель; б) матриці БВОР; в) умовне позначення

Гвинтова пара (рис. 13) також відноситься до V класу, проте вона є специфічною парою, так як для неї поступальний рух є функціонально залежним від обертального, тому для ідентифікації такої пари недостатньо проаналізувати тільки початкову складову функції обмеження рухливості F_G^1 , необхідно також враховувати віртуальну складову F_G^2 [2]:

$$\begin{aligned} & \exists t_1, t_2, t_3 G_M(R_{G,t_1}^1) \wedge G_R(R_{G,t_1}^1) \wedge G(R_{G,t_2}^1) \wedge G_R(R_{G,t_2}^1) \wedge \\ & \wedge G_M(R_{G,t_3}^1) \wedge G_R(R_{G,t_3}^1) \wedge G_M(R_{G,t_3}^2) \wedge G_R(R_{G,t_3}^2) = 1, t_1, t_2, t_3 \in T \end{aligned} \quad (18)$$

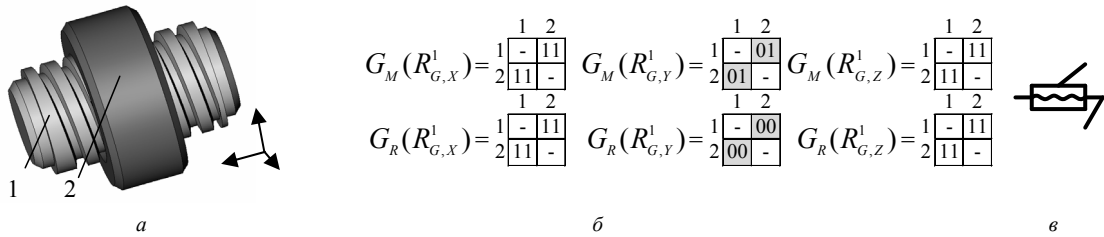


Рис. 13. Кінематична пара «гвинтова» а) 3D модель; б) матриці БВОР; в) умовне позначення

Всі варіанти сполучень можливих рухів у з'єднанні двох деталей та їх зв'язок з теорією механізмів і машин представлені в табл. 1. Виявлені «некласичні кінематичні пари», які існують, але не мають формальної назви, запропоновані позначення для таких КП. Знайдені формальні ознаки для виявлення помилок у створеній математичній моделі СО з точки зору кінематики з'єднань – це сполучення можливих рухів, які суперечать твердженню (9) і визначають заборонений стан моделі.

Таблиця 1

Результати аналізу можливих рухів у з'єднанні двох деталей

| N | Можливі рухи | Клас КП | | N | Можливі рухи | Клас КП | |
|----|------------------------------------|----------------------|--|----|-------------------------|------------------|--|
| 1 | $\{M_x, M_y, M_z, R_x, R_y, R_z\}$ | Відсутність контакту | | 11 | $\{M_y, M_z, R_x\}$ | III | |
| 2 | $\{M_x, M_y, R_x, R_y, R_z\}$ | I | | 12 | $\{M_x, R_x, R_y\}$ | III | |
| 3 | $\{M_x, M_y, M_z, R_x, R_y\}$ | Заборонений стан | | 13 | $\{M_z, R_x, R_y\}$ | III | |
| 4 | $\{M_x, R_x, R_y, R_z\}$ | II | | 14 | $\{R_x, R_y\}$ | IV | |
| 5 | $\{M_x, M_z, R_x, R_y\}$ | II | | 15 | $\{M_x, R_x\}$ | IV | |
| 6 | $\{M_x, M_y, R_x, R_y\}$ | Заборонений стан | | 16 | $\{M_y, R_x\}$ | IV | |
| 7 | $\{M_x, M_y, M_z, R_x\}$ | Заборонений стан | | 17 | $\{M_x, M_y\}$ | Заборонений стан | |
| 8 | $\{R_x, R_y, R_z\}$ | III | | 18 | $\{R_x\}$ | V | |
| 9 | $\{M_x, M_y, M_z\}$ | Заборонений стан | | 19 | $\{M_x\}$ | V | |
| 10 | $\{M_x, M_y, R_x\}$ | Заборонений стан | | 20 | $\{R_x, M_x = F(R_x)\}$ | V | |

В результаті досліджень характеру можливих рухів між ланками в кінематичній парі та відображення цих рухів у математичній моделі СО було встановлено, що кожна з кінематичних пар, представлених у ТММ, може бути однозначно ідентифікована при аналізі БВОР між парою деталей СВ.

Це дає можливість використовувати формалізований опис взаємодії окремих деталей складального виробу у виді БОР в задачах аналізу виявлення рухів в системах автоматизованого проектування виробів та технологій складання.

Список літератури

1. Пасічник В.А. Метод цілеспрямованого перепроектування складальних виробів та його реалізація у «DFA Expert» / В.А. Пасічник, Ю.В. Лашина // Вісник НТУУ «КПІ» – К.: 2010. – №59 / Машинобудування. С. 258–263.
2. Пасічник В.А. Принципи формування математичної моделі складальної одиниці в виді бінарних відношень обмежень рухливості / В.А. Пасічник, В.М. Кореньков // Машиностроение и техносфера XXI века. Сб. тр XV межд. науч. техн. конф., В 4-х томах. – Донецьк : ДонНТУ, 2008. Т. 3. – С. 64–70.
3. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. Учеб. Для вузов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 640 с.
4. Половинкин А.И. Основы инженерного творчества. – М.: Машиностроение, 1988. – 386 с.
5. Лашина Ю.В. Формалізація обмежень на інтеграцію деталей в складальному виробі / Ю.В. Лашина, В.А. Пасічник // Надійність інструменту та оптимізація технологічних систем. Збірник наукових праць. – Краматорськ. – 2010. – №26 – С.177–182.