

## ВИМУШЕНІ НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ КАНАТА З ВАНТАЖЕМ ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ КІНЕМАТИЧНОМУ ЙОГО ЗБУДЖЕННІ

*В статті розглядаються коливання каната баштового крана з урахуванням геометричної нелінійності та сил вязкого трення при горизонтальному гармонічному переміщенні точки підвеса грузу. Розглянуті особливості вимушених коливань в нелінійній системі. Исследована устойчивость вынужденных периодических колебаний с помощью диаграммы Айнса-Стретта.*

*In the article the vibrations of rope of a tower faucet are examined taking into account geometrical non-linearity and forces of viscid friction at the horizontal harmonic moving of suspension point of load. The features of the forced vibrations in the nonlinear system are considered. Stability of the forced periodic vibrations with help of Ince-Strett diagram is investigated.*

**Вступ.** Сучасний світ вимагає вдосконалення та модернізації засобів та приладів для будівельних робіт. Важливе місце тут посідають вантажо-підіймальні машини. Під час експлуатації дані системи зазнають значних інтенсивних вібраційних навантажень, що визначає необхідність вирішення задач їх коливань. Адже коливання можуть спричинити загрозу міцності елементів конструкції, порушити нормальні умови експлуатації. Лише з врахування коливань можна обрати параметри системи та режими роботи машини, які б були віддаленими настільки, наскільки це можливо від критичних режимів.

**Методи дослідження.** Аналізуючи сучасні методи розрахунку канатів підіймальних машин на динамічні навантаження, можна відмітити, що дослідження проводились лише в лінійній постановці. Лінеаризовані системи хоча й дають зробити висновки про властивості коливань каната з вантажем, та не відображають реальної картини коливальних процесів. Як приклад, лінійний підхід не дає змоги знайти амплітуду параметричних коливань, пояснити виникнення субгармонічних і супергармонічних коливань [1]. При підйомі вантажу на висоту більш ніж 60 метрів задача коливань каната є суттєво геометрично нелінійною. Тому в даній роботі розглядаються вимушені нелінійні коливання каната баштового крана (рис. 1) в нелінійній постановці з урахуванням вязкого тертя при їх кінематичному збудженні, що є актуальною задачею.

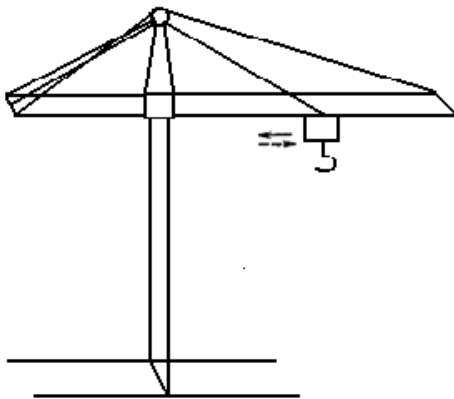


Рис. 1. Баштовий кран

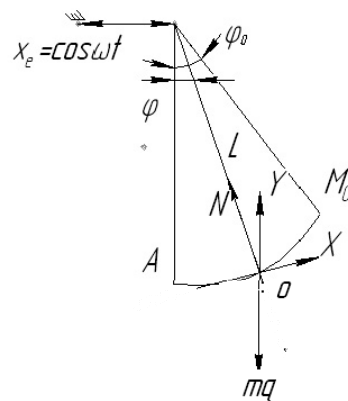


Рис. 2. Модель кінематичного збудження

**Основна частина.** Для складання диференціального рівняння руху вантажу скористаємося методом Д'Аламбера. Спроєктуємо всі сили, що діють на вантаж на нерухомі вісі XOY (рис.2).

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -N \sin \varphi, \\ m\ddot{y} = N \cos \varphi - mg. \end{cases} \quad (1)$$

Виразимо з системи (1) силу натягу в тросі:

$$N = -\frac{m\ddot{x}}{\sin \varphi}. \quad (2)$$

Тоді:

$$m\ddot{y} = -\frac{m\ddot{x}}{\sin\varphi}\cos\varphi - mg, \quad (3)$$

або

$$m\ddot{y}\sin\varphi + m\ddot{x}\cos\varphi + mg\sin\varphi = 0. \quad (4)$$

Точка підвісу здійснює горизонтальний переносний гармонічний рух  $x_e = B\cos\omega t$ .

Координати положення вантажу виразимо через кут відхилення  $\varphi$  тросу від вертикалі та зміщення точки відхилення  $X_e$ .

$$\begin{cases} x = l\sin\varphi + x_e, \\ y = l - l\cos\varphi. \end{cases} \quad (5)$$

Продиференціюємо двічі останню систему рівнянь.

$$\begin{cases} \ddot{x} = l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) - B\omega^2\cos\omega t, \\ \ddot{y} = l(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi). \end{cases} \quad (6)$$

Підставимо (6) в (3), враховуючи, що кут  $\varphi < 5^\circ$  ( $\cos\varphi \approx 1$ ,  $\sin\varphi \approx \varphi$ ,  $\dot{\varphi}^2 = 0$ ):

$$ml(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\sin\varphi + m[l(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) - B\omega^2\cos\omega t]\cos\varphi + mg\sin\varphi = 0.$$

$$ml\ddot{\varphi} + mg\varphi = mB\omega^2\cos\omega t. \quad (7)$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = \frac{B\omega^2}{l}\cos\omega t. \quad (8)$$

Таким чином, прийшли до задачі про вимушені коливання вантажу при кінематичному збудженні.

Введемо заміну  $P = \frac{B\omega^2}{l}$ .

Внаслідок отримаємо:

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = P\cos\omega t. \quad (9)$$

Це рівняння описує вимушені коливання лінійної системи.

Якщо в розкладі  $\sin\varphi$  утримаємо два доданки,  $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots$ , то одержимо нелінійну задачу вимушених коливань.

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi - \gamma\varphi^3 = P\cos\omega t, \quad (10)$$

де  $\gamma = \frac{\omega_0^2}{3!}$ .

Розв'яжемо останнє рівняння методом Малкіна для резонансного випадку.

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi - \gamma\varphi^3 = \varepsilon P\cos\omega t. \quad (11)$$

В теоремі Малкіна стверджується, що при головному резонансі існує одне і тільки одне рішення «квазіліпуновської» системи, яке перетворюється в нуль при  $\varepsilon = 0$ . Цей розв'язок є аналітичною функцією параметра  $\varepsilon^{\frac{1}{2k+1}}$ , де  $2k$  – найменша степінь величини  $A$  в розкладі періоду (частоти) породжувального рішення.

Для знаходження коефіцієнтів розв'яжемо рівняння Дюффінга  $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi - \gamma\varphi^3 = 0$  методом гармонічного балансу.

$$\varphi = A\cos(\omega t - \varphi) = A\cos\psi. \quad (13)$$

Підставимо (13) в (12):

$$-A\omega^2\cos\psi + \omega_0^2 A\cos\psi - \gamma A^3\cos 3\psi = 0. \quad (14)$$

Враховуючи, що  $\cos^3\psi = \frac{1}{4}(3\cos\psi + \cos 3\psi)$ , одержимо, що

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\psi - \frac{3}{4}\gamma A^3\cos\psi - \frac{1}{4}\gamma A^3\cos 3\psi = 0. \quad (15)$$

Прирівнявши доданки при  $\cos\psi$  до нуля, отримаємо:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\psi - \frac{3}{4}\gamma A^3 = 0,$$

або

$$\frac{3}{4}\gamma A^2 = \omega_0^2 - \omega^2. \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{3}{4}\gamma A^2. \quad (16)$$

Таким чином,  $k = 1$  (ступінь при коефіцієнті  $A$ ).

Розв'язок рівняння (10) потрібно шукати у вигляді розкладу за степенями параметра  $\varepsilon^{\frac{1}{3}}$ .

$$\varphi = \varepsilon^{\frac{1}{3}}\varphi_1 + \varepsilon^{\frac{2}{3}}\varphi_2 + \varepsilon\varphi_3 + \varepsilon^{\frac{4}{3}}\varphi_4 + \dots \quad (17)$$

Врахуємо розклад частот  $\alpha = \omega_0^2 - \omega^2$ , вважаючи його пропорційним параметру  $\varepsilon^{\frac{2}{3}}$ . Тоді  $\omega_0^2 = \omega^2 - \varepsilon^{\frac{2}{3}}\alpha$ . (18)

Підставимо (17) і (18) в (12) та, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях  $\varepsilon$ , дістанемо рекурентну систему рівнянь.

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + \omega^2\varphi_1 = 0 \\ \ddot{\varphi}_2 + \omega^2\varphi_2 = 0 \\ \ddot{\varphi}_3 + \omega^2\varphi_3 = \alpha\varphi + \varphi_1^3 + P \cos \omega t \\ \dots \end{cases} \quad (19)$$

З перших двох рівнянь знаходимо:

$$\varphi_1 = A \cos(\omega t - \theta) = A \cos \psi. \quad (20)$$

$$\omega = \omega_0, \varphi_2 = 0. \quad (21)$$

Підставимо (18), (20), (21) в третє рівняння системи (19).

$$\ddot{\varphi}_3 + \omega^2\varphi_3 = (\omega_0^2 - \omega^2)A \cos \psi + \gamma A^3 \cos^3 \psi + P \cos \omega t. \quad (22)$$

Замінімо нелінійний член сумою Фур'є.

$$\cos^3 \psi = \frac{1}{4}(3 \cos \psi + \cos 3\psi).$$

Умова періодичності для  $\varphi_3$ :

$$\ddot{\varphi}_3 + \omega^2\varphi_3 = (\omega_0^2 - \omega^2)A \cos \psi + P \cos \omega t + \frac{1}{4}A^3\gamma(3 \cos \psi + \cos 3\psi).$$

$$\cos(\omega t - \theta) = \cos \psi \Rightarrow \cos \omega t = \cos(\psi + \theta) = \cos \theta \cos \psi - \sin \theta \sin \psi.$$

$$\ddot{\varphi}_3 + \omega^2\varphi_3 = (\omega_0^2 - \omega^2)A \cos \psi + P(\cos \theta \cos \psi - \sin \theta \sin \psi) + \frac{1}{4}A^3\gamma(3 \cos \psi + \cos 3\psi). \quad (23)$$

Тоді

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A + P \cos \theta + \frac{3}{4}A^3\gamma = 0. \quad (24)$$

$$-P \sin \theta = 0. \quad (25)$$

З рівняння (25) слідує, що  $\theta = 0$ .

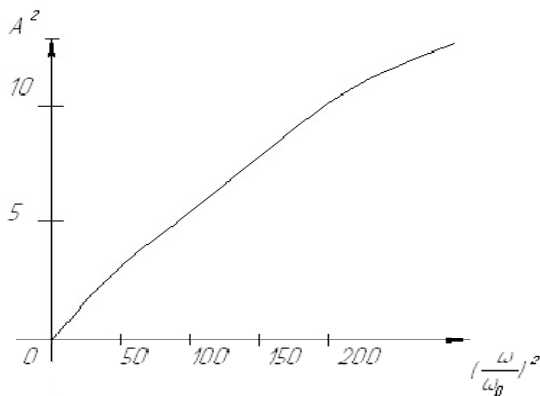


Рис. 3. Амплітудно-частотна характеристика вимушених коливань

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A + P + \frac{3}{4}A^3\gamma = 0. \quad (26)$$

При  $\omega_0^2 = \omega^2$  знаходимо значення

$$A = -\sqrt[3]{\frac{4P}{3\gamma}}. \quad (27)$$

Або з урахуванням, що  $P = \frac{B\omega^2}{l}$ ,

$$\gamma = \frac{\omega_0^2}{3!} \text{ матимемо } \Rightarrow A = -\sqrt[3]{\frac{8B\omega^2}{l\omega_0^2}}.$$

Використовуючи програмне середовище MathCAD, побудуємо амплітудно-частотну характеристику (АЧХ). Приймемо довжину каналу

$$l = 60 \text{ м}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad B = 1 \quad \text{з умови, що}$$

$$\frac{B\omega^2}{2l\omega_0^2} \ll 0,5. [1]$$

### Особливості вимушених коливань у нелінійній системі

Розглянемо рівняння Дюффінга, яке ми отримали раніше.

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi - \gamma \varphi^3 = P \cos \omega t. \quad (28)$$

Скористаємося методом гармонічного балансу.

$$\varphi = A \cos \omega t. \quad (29)$$

Тут  $\dot{\varphi} = 0$ .

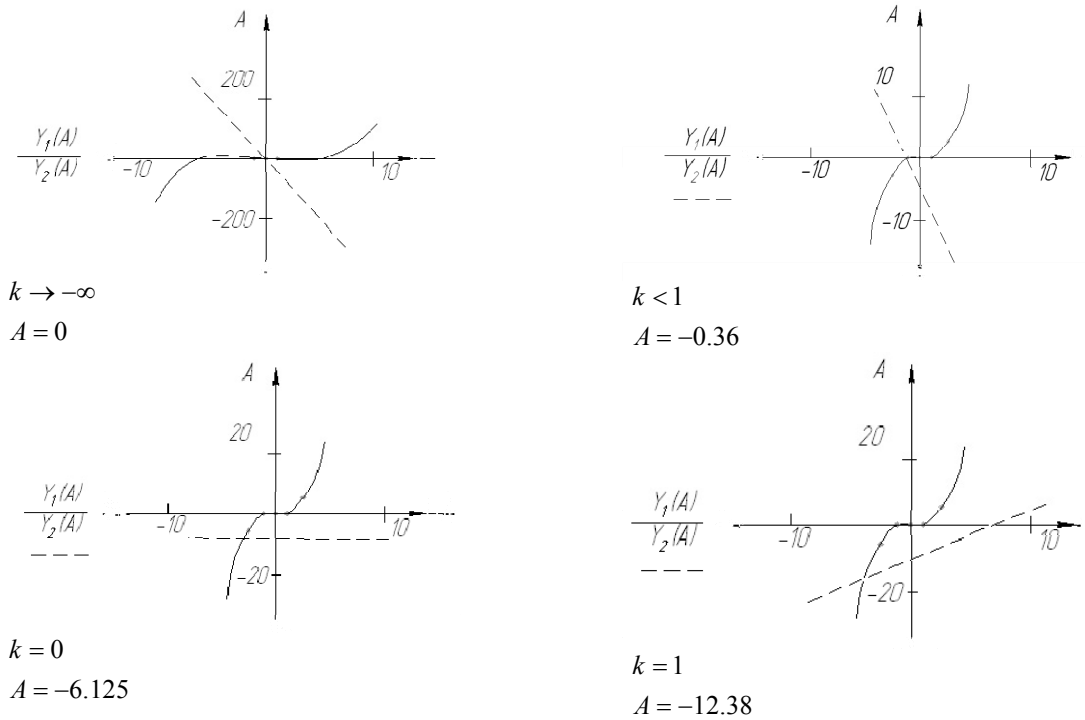


Рис. 4. Графічне визначення коренів амплітудно-частотного рівняння у випадку «м'якої» нелінійної характеристики відновлювальної сили

Підставимо (2) в (1) з врахуванням, що  $\cos^3 \psi = \frac{1}{4}(3 \cos \psi + \cos 3\psi)$ .

$$\omega_0^2 A \cos \omega t - A \omega^2 \cos \omega t - \frac{3}{4} \gamma A^3 \cos \omega t - \frac{1}{4} \gamma A^3 \cos 3\omega t = P \cos \omega t.$$

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{3}{4} \gamma A^3 - P = 0. \quad (30)$$

$\frac{1}{4} \gamma A^3 \cos 3\omega t$  - незрівноважений член. Тому розв'язок буде наближеним.

Рівняння (3) переписемо наступним чином:

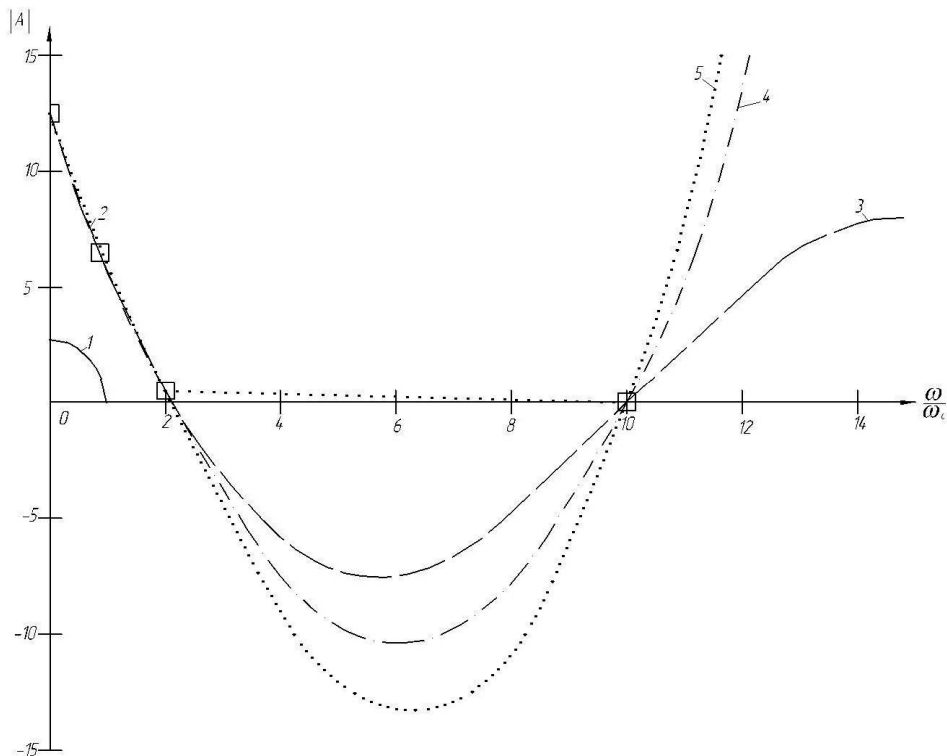
$$-\frac{P}{\omega_0^2} + (1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})A = \frac{3}{4} \gamma \frac{A^3}{\omega_0^2}. \quad (31)$$

Корені визначимо графічно як точки перетину кубічної параболи  $Y_1 = \frac{3}{4} \gamma \frac{A^3}{\omega_0^2}$  і прямої  $Y_2 = (1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})A - \frac{P}{\omega_0^2}$ .

Нахил прямої залежить від кутового коефіцієнту  $k = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ , який змінюється при зміні  $\frac{\omega}{\omega_0}$  від 0 до  $\infty$ . Прийmemo

$$l = 60 \text{ м}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Використовуючи програмне середовище MathCAD, побудуємо амплітудно-частотну характеристику (АЧХ)



**Рис. 5** АЧХ нелінійної системи з «м'якою» характеристикою при гармонічному збудженні без тертя  
 де 1 – скелетна лінія,  
 2 – енергетична лінія,  
 3 – лінійна інтерполяція,  
 4 – поліномна інтерполяція,  
 5 – кубічна інтерполяція.

Дослідимо стійкість вимушених періодичних коливань за допомогою діаграми Айнса-Стретта.

$$\varphi_0 = A_0 \cos \omega t.$$

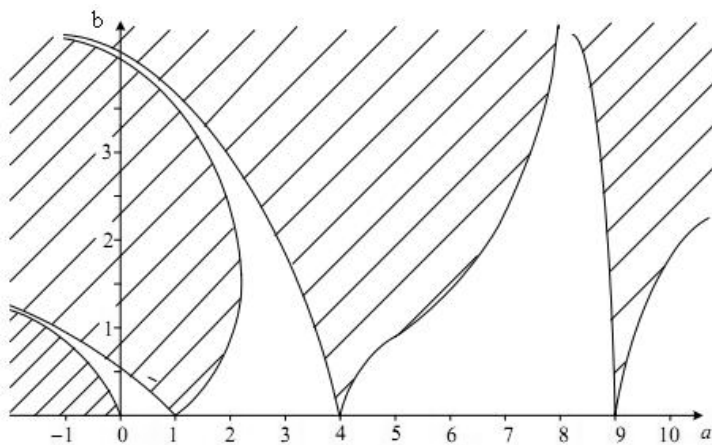
Надамо приріст  $x$  переміщенню і підставимо в останнє рівняння збуджений розв'язок  $\varphi_0 + x$ :

$$\ddot{\varphi}_0 + \ddot{x} + \omega_0^2 \varphi_0 + \omega_0^2 x - \gamma \varphi_0^3 - 3\gamma \varphi_0^2 x - \dots - P_0 \cos \omega t = 0.$$

Вирази, що підкреслені, знищуються.

Внаслідок матимемо:

$$\ddot{x} + \left( \omega_0^2 - \frac{3}{2} \gamma A_0^2 - \frac{3}{2} \gamma A_0^2 \cos 2\omega t \right) x = 0. \text{ Вводячи безрозмірний час } \tau = \omega t \text{ та виконуючи прості перетворення}$$



**Рис. 6** Діаграма Айнса-Стретта

$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \omega^2$ , останнє рівняння зведеться до стандартного вигляду рівняння Мат'є відносно варіації.

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + (a + 2b \cos \tau)x = 0, \text{ де параметри}$$

$$a = \frac{\omega_0^2 - \frac{3}{4} \gamma A_0^2}{\omega^2}, \quad 2b = \frac{3}{2} \frac{\gamma}{\omega^2} A_0^2.$$

Поведінка розв'язків рівняння Мат'є залежить від значень параметрів  $a$  та  $b$ , за якими з діаграми Айнса-Стретта (рис. 6) визначаються області стійкості (параметричний резонанс) чи області стійкості (відповідають затухаючим коливанням).

Таблиця 1

## Результати обчислень параметра а

| А, м | $\frac{\omega}{\omega_0}$ |        |        |        |        |        |        |
|------|---------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|      | 0,5                       | 1      | 1,5    | 2      | 2,5    | 3      | 4      |
| 0,1  | 3,998                     | 0,999  | 0,444  | 0,25   | 0,16   | 0,111  | 0,062  |
| 1    | 3,8                       | 0,949  | 0,422  | 0,237  | 0,152  | 0,105  | 0,059  |
| 5    | -1,054                    | -0,264 | -0,117 | -0,066 | -0,042 | -0,029 | -0,016 |
| 6    | -3,278                    | -0,82  | -0,364 | -0,205 | -0,131 | -0,091 | -0,051 |
| 7    | -5,907                    | -1,477 | -0,656 | -0,369 | -0,236 | -0,164 | -0,092 |
| 8    | -8,939                    | -2,235 | -0,993 | -0,559 | -0,358 | -0,248 | -0,14  |
| 9    | -12,376                   | -3,094 | -1,375 | -0,774 | -0,495 | -0,344 | -0,193 |
| 10   | -16,218                   | -4,054 | -1,802 | -1,014 | -0,649 | -0,45  | -0,253 |

Таблиця 2

## Результати обчислень параметра б

| А, м | $\frac{\omega}{\omega_0}$ |        |        |        |         |         |         |
|------|---------------------------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|
|      | 0,5                       | 1      | 1,5    | 2      | 2,5     | 3       | 4       |
| 0,1  | 0,02                      | 0,0005 | 0,0002 | 0,0001 | 0,00008 | 0,00005 | 0,00003 |
| 1    | 0,202                     | 0,051  | 0,022  | 0,013  | 0,008   | 0,005   | 0,003   |
| 5    | 5,05                      | 1,262  | 0,56   | 0,316  | 0,202   | 0,14    | 0,079   |
| 6    | 7,272                     | 1,818  | 0,808  | 0,455  | 0,3     | 0,202   | 0,114   |
| 7    | 9,898                     | 2,474  | 1,1    | 0,619  | 0,4     | 0,275   | 0,155   |
| 8    | 12,92                     | 3,232  | 1,436  | 0,808  | 0,517   | 0,359   | 0,202   |
| 9    | 16,36                     | 4,09   | 1,818  | 1,023  | 0,654   | 0,454   | 0,256   |
| 10   | 20,2                      | 5,05   | 2,244  | 1,262  | 0,808   | 0,561   | 0,316   |

## Вимушені коливання нелінійної системи з урахуванням в'язкого тертя

Рівняння вимушених коливань з врахуванням в'язкого тертя має наступний вигляд:

$$\ddot{\varphi} + 2h\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi - \gamma\varphi^3 = P \cos \omega t. \quad (32)$$

Розв'язок шукаємо, використовуючи метод гармонічного балансу у вигляді

$$\varphi = A \cos(\omega t - \theta) = A \cos \psi. \quad (33)$$

Підставимо (2) в (1):

$$\omega_0^2 A \cos \psi - A\omega^2 \cos \psi - \frac{3}{4}\gamma A^3 \cos \psi - \frac{1}{4}\gamma A^3 \cos 3\psi - 2h\omega A \sin \psi = P \cos \omega t, \quad (3)$$

де  $\cos \omega t = \cos(\psi + \theta) = \cos \theta \cos \psi - \sin \theta \sin \psi$ .

Маємо:

$$A(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{3}{4}\gamma A^3 = P \cos \theta. \quad (34)$$

$$2h\omega A = P \sin \theta. \quad (35)$$

Піднесемо рівняння (4) і (5) до квадрату, а потім просумуємо.

$$\begin{aligned} [A(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{3}{4}\gamma A^3]^2 &= P^2 \cos^2 \theta \\ + \\ 4h^2 \omega^2 A^2 &= P^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (36)$$

$$[A(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{3}{4}\gamma A^3]^2 + 4h^2 \omega^2 A^2 = P^2,$$

або

$$[A(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{3}{4}\gamma A^3]^2 = P^2 - 4h^2 \omega^2 A^2. \quad (37)$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{2h\omega}{\omega_0^2 - \frac{3}{4}\gamma A^2 - \omega^2}. \quad (38)$$

Прирівнюючи обидві частини рівняння (7) до нуля, отримаємо систему 2-х рівнянь.

$$\begin{cases} \omega_0^2 - \omega^2 - \frac{3}{4} \gamma A^2 = 0, \\ P - 4h^2 \omega^2 A^2 = 0. \end{cases} \quad (39)$$

Перше рівняння системи (9) описує скелетну лінію (баланс реактивних енергій), друге – енергетичну лінію (баланс активних енергій) при «точному» резонансі. Точки перетину цих кривих лежать на амплітудній кривій (9).

Ординати цих точок дорівнюють можливим значенням амплітуди.

Скелетна лінія у цьому випадку є параболою, енергетична – рівнобічною гіперболою  $(\frac{\omega}{\omega_0})^2 A^2 = \frac{P_0^2}{4h^2 \omega_0^2}$ . Чим менший коефіцієнт демпфірування  $h$ , тим більш віддалені гілки гіперболи від початку координат.

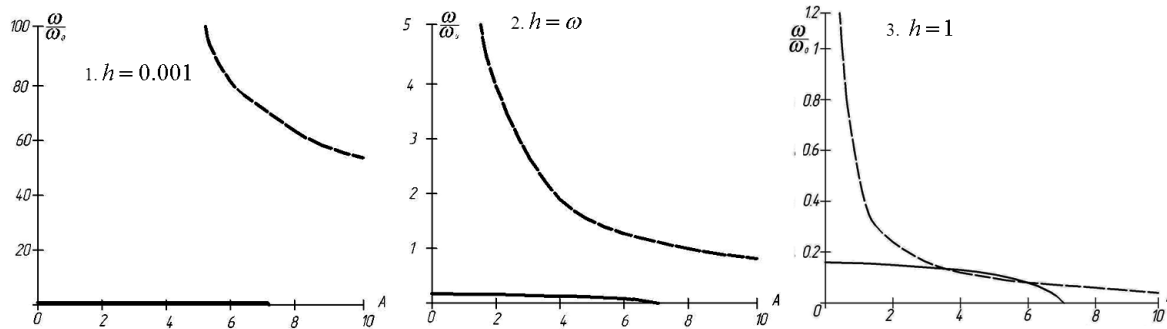


Рис. 7. Амплітудно-частотна характеристика при різних значення коефіцієнта демпфірування

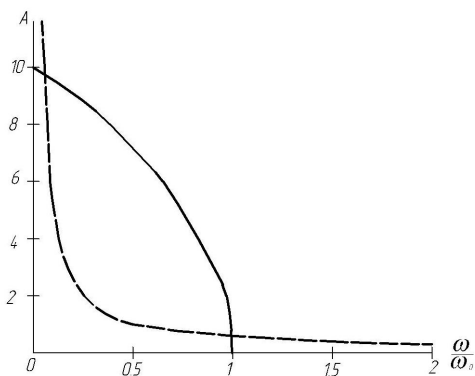


Рис. 8. Амплітудно-частотна характеристика з урахуванням в'язкого тертя

#### Висновки

1. З рис. 5 бачимо, що при деяких значення  $\frac{\omega}{\omega_0}$  буде кілька значень амплітуди коливань  $A$  (в даному випадку 3 значення, проте стійкими (реально існуючими) будуть не всі).
2. Амплітуди коливань в нелінійній системі завжди обмежені, незважаючи на відсутність розсіювання енергії.
3. При «точному» резонансі, коли  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$ , амплітуда не є найбільшою величиною, як в лінійній системі.
4. В нелінійній системі основну роль в обмеженні амплітуди коливань відіграє нелінійність характеристики відновлювальної сили.
5. Розсіювання енергії в нелінійній системі визначає максимально можливу амплітуду коливань.
6. При малому значенні  $h$  гіпербола не перетинає криву (див. рис. 7). При цьому не буде максимально можливих значень амплітуди. При великому значенні  $h$  гіпербола перетинає криву в двох точках. Можливі два види вимушених коливань – з великою або малою амплітудою коливань.

7. АЧХ не замкнена. Таке можливо у випадку «м'якої» характеристики відновлювальної сили.

8. Рекомендується для значень амплітуд  $A$  від  $3\text{ м}$  і вище та співвідношень частот  $\frac{\omega}{\omega_0} = 0,5$ , а також для  $A$  від  $8\text{ м}$  і вище при  $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$  зменшити величину швидкості підйому для уникнення зон нестійкої поведінки вантажу.

#### Список літератури

1. Василенко М.В., Алексейчук О.М. Теорія коливань і стійкість руху: Підручник. – К. Вища шк., 2004. – 525с.: іл.
2. Підйомно-транспортні машини: Розрахунки підймальних і транспортувальних машин: Підручник / В.С. Бондарев, О.І. Дубинець, М.П. Колісник та ін. – К.: Вища шк., 2009. – 734 с.