

## ВИЗНАЧЕННЯ ВЛАСНИХ ЧАСТОТ КОЛИВАНЬ ЛАБОРАТОРНОЇ ЦЕНТРИФУГИ З ВРАХУВАННЯМ ГІРОСКОПІЧНИХ ЕФЕКТІВ

*Рассмотрены колебания центрифуги на упругом основании. Определена собственная частота колебания центрифуги. Сопоставлены численные и экспериментальные результаты. Построена диаграмма Кэмпбелла, отображающая зависимость собственных частот от скорости вращения ротора. Угловые скорости вращения выражались через углы Эйлера-Крылова. Получены уравнения движения ротора, определена траектория, описываемая его осью.*

*The vibrations of centrifuge on the resilient founding are considered. The eigenfrequency of oscillation of centrifuge is certain. Numerical and experimental results are confronted. The diagram of Campbell, representing dependence of eigenfrequencies, from rotor rotational speed is built. The angular velocities of rotation through the Euler-Krilov corners were expressed. Equations of rotor motions are got, the trajectory described by his axis is certain.*

### Вступ.

Швидкий ріст робочих швидкостей механізмів і машин в останнє десятиріччя поставив перед механіками і технікою ряд нових наукових завдань. Одна з них - дослідження динаміки роторів, що працюють за критичними швидкостями першого і вищих порядків. У сучасному машинобудуванні можна вказати різноманітні машини і агрегати, вали яких працюють саме в таких умовах : турбогенератори, газові і парові турбіни, реактивні двигуни, насоси великої продуктивності і численні машини спеціального призначення.

Всі механічні системи, що включають в себе тіла, що обертаються, в тому чи іншому випадку, здійснюють коливальні рухи. В залежності від конструкції система може мати різну кількість степенів свободи та різну кількість власних частот.

При дослідженні коливань роторів при згинанні зустрічаються два види розрахункових схем [6, 7].

У багатьох практично важливих випадках гіроскопічна дія мас роторів або дуже мала, або може бути врахована малими членами в диференціальних рівняннях руху. Сюди відносяться ротори з розподіленими по довжині масами; ротори, у яких хоч крім розподілених, є також і зосереджені маси, але або малі радіуси інерції, або зосереджені маси розташовані поблизу мінімальних переміщень пружної лінії роторів і здійснюють рух, близький до обертання навколо нерухомої осі. Проекції прогинів таких роторів на координатні площини можуть бути з достатньою точністю розкладені по власних функціях малих коливань вала, що не обертається. Малі нелінійні члени в диференціальних рівняннях руху і сили зовнішнього і внутрішнього тертя не суттєво впливають на форму пружної лінії вала.

До другого виду відносяться ротори, у яких гіроскопічні моменти досить великі [8].

Відомо, що сили інерції твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, є повністю зрівноважені у тому випадку, якщо центр ваги тіла лежить на осі обертання і якщо вісь обертання є головною віссю інерції тіла. При невиконанні першого з цих умов говорять про статичну не зрівноваженість тіла - вона може бути виявлена і на не обертальному роторі; невиконання другої умови називається динамічною не зрівноваженістю - вона проявляє себе тільки при обертанні тіла.

На вал 2, що лежить в двох підшипниках, насаджений ротор 1, рис. 1.

Припустимо, що диск насаджений на вал без ексцентриситету (т. є. так, що його центр ваги лежить в точності на осі вала). Припустимо також, що площина диска не цілком перпендикулярна до осі вала.

Позначимо перпендикуляр до площини диска, проведений через його центр ваги, буквою  $z$ , вісь  $z$  створює з віссю вала кут  $\theta$ .

Найпростішими задачами про коливання вала з диском, площина якого здатна відхилитись від початкового положення, є задачі про двоопорний вал з розташованим на ньому диском. Особливістю коливань таких валів є те, що прогин перетину вала, де прикріплений диск, супроводжується поворотом перетину, тому відхилення центру вала супроводжується поворотом площини диску і, відповідно, одночасно відбувається прецесія центру вала та кутова прецесія диску. Кутова прецесія диску викликає додаткові сили в наслідок гіроскопічної дії диску [1].

**Метою** запропонованої статті є необхідність вивчення руху центрифуги та її динаміки з урахуванням гіроскопічних ефектів, встановлення залежності власних частот від швидкості обертання ротора.

В основі теорії гіроскопів та гіроскопічних явищ лежить кінематика та динаміка твердого тіла, що обертається навколо нерухомої точки.

При аналітичному описуванні руху твердих тіл та гіроскопів вводять як Декартові системи координат так і кути Ейлера-Крылова [2]. Вибір їх у кінематиці довільний та визначається тільки характером, що відбувається відносно них руху. Введемо умовно нерухому або абсолютну систему координат  $\xi\eta\zeta$  з початком в деякій точці простору.

Центрифуга представляє собою ротор 1, що обертається навколо вертикальної осі 2, який приводиться до обертання електродвигуном, анкер якого 3, сидить на тій самій осі, а статор та корпус 4 закріплені на пружних опорах 5. Опори сконструйовані так, що дозволяють центрифугі обертатись відносно нерухомих осей  $\xi, \eta$ , причому жорсткість при обертанні відносно них однакова.

Конструкція центрифуги така, що жорсткість валу електродвигуна, на який, насаджена центрифуга, в багато разів більша ніж жорсткість опор. В силу цього вал можна вважати абсолютно жорстким. Таким чином, обертання центрифуги складається з обертання навколо власної осі симетрії та обертання навколо осей  $\xi, \eta$ . Пружними елементами опор центрифуги є гумові циліндри.

#### Основна частина.

Центрифуга в силу конструкції та зроблених вище припущеннях являє собою тверде тіло з нерухоною точкою. Для описання його руху використаний один з варіантів кутів Ейлера-Крилова рис. 2.

Для переходу від осей  $\xi, \eta, \zeta$  до осей  $x, y, z$  використовується наступна матриця:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

або у більш компактній формі

$$[\xi \ \eta \ \zeta]^T = \|a_{ik}\| \cdot [x \ y \ z]^T,$$

де символ T означає операцію транспонування матриці, та дев'ять направляючих косинусів  $a_{ik}$ .

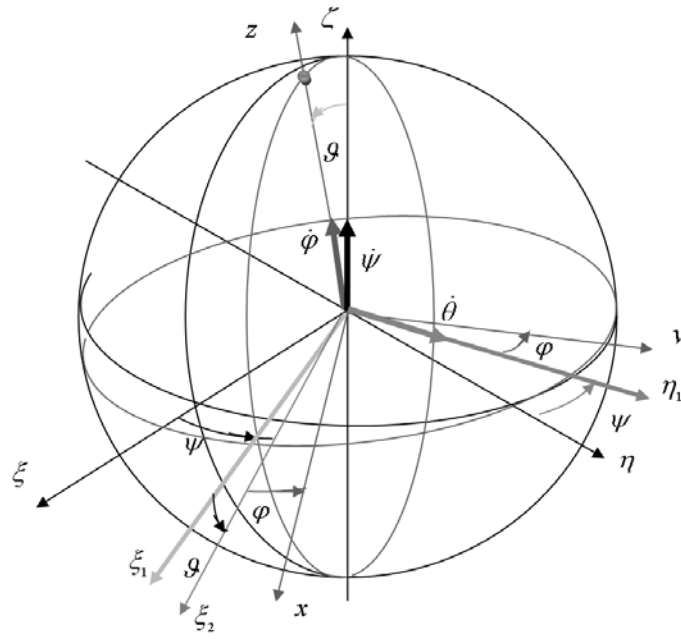


Рис. 2. Куті Ейлера-Крилова

Направляючі косинуси можна визначити за допомогою застосування основної формули сферичної тригонометрії або матричним методом [2, 3].

Матричний метод полягає у використанні матриць перетворення послідовно для кожного повороту та у майбутньому виключенні проміжних матриць.

В результаті матимемо:

$$[\xi \ \eta \ \zeta]^T = B \cdot [x \ y \ z]^T, \text{ де матриця перетворення}$$

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\psi & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

Для вирішення задачі використовуємо рівняння Лагранжа другого роду  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ , де  $L$  - функція Лагранжа,  $L = K - P$ , де  $K$  - кінетична енергія,  $P$  - потенціальна енергія [4, 5]. Головними осями центрифуги являються осі  $x, y, z$ , причому  $J_x = J_y = J$  та рівні суми моментів інерції всіх деталей, що обертаються відносно цих осей.

За допомогою матриці перетворення визначаємо кутові швидкості обертання

$$\begin{aligned} \omega_z &= \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta, \\ \omega_x &= -\dot{\psi} \cos\theta \sin\theta + \dot{\theta} \sin\theta, \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin\theta \sin\theta + \dot{\theta} \cos\theta. \end{aligned}$$

Відповідно швидкостям визначається і кінетична енергія

$$K = \frac{1}{2} \left[ I_x \cdot \left( \dot{\psi} \cdot \sin\theta + \dot{\phi} \right)^2 + I_y \cdot \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \cdot \cos^2\theta \right) \right]$$

Потенціальна енергія системи запишеться наступним чином

$$P = \frac{1}{2} C_3 \cdot (\psi^2 + \theta^2),$$

де  $C_3$  – жорсткість при згині.

З врахуванням малості кутів та приймаючи  $\sin\theta = \theta$ ,  $\cos\theta = 1$  вирази матимуть вид:

$$K = \frac{1}{2} \left[ I_x \cdot \left( \dot{\psi} \cdot \theta + \dot{\phi} \right)^2 + I_y \cdot \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \right) \right]$$

Знаходимо похідні від функції Лагранжа

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= I_x \cdot \left( \dot{\psi} \cdot \theta + \dot{\phi} \right) \cdot \theta + I_y \cdot \dot{\psi} \quad \frac{\partial L}{\partial \psi} = -C_3 \Gamma \cdot \psi \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= I_y \cdot \dot{\theta} \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = I_x \cdot \left( \dot{\psi} \cdot \theta + \dot{\phi} \right) \cdot \dot{\psi} - C_3 \Gamma \cdot \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= I_x \cdot \left( \dot{\psi} \cdot \theta + \dot{\phi} \right) \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \end{aligned}$$

З отриманих співвідношень випливає, що координати  $\psi$  та  $\phi$  - циклічні, так як з рівняння Лагранжа випливає  $\left( \dot{\psi} \cdot \theta + \dot{\phi} \right) = D$ .

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} I_y \cdot \ddot{\psi} + I_x \cdot D \cdot \dot{\theta} + C_3 \cdot \psi &= 0 \\ I_y \cdot \ddot{\theta} - I_x \cdot D \cdot \dot{\psi} + C_3 \cdot \theta &= 0 \end{aligned}$$

Записавши  $\psi = A \cdot \cos(p \cdot t)$  та  $\theta = B \cdot \cos(p \cdot t)$ , де  $A$  і  $B$  - амплітуди, та підставляючи у систему рівнянь, отримаємо:

$$\begin{aligned} -I_y \cdot A \cdot p^2 \cdot \cos(p \cdot t) + I_x \cdot D \cdot B \cdot p \cdot \cos(p \cdot t) + C_3 \cdot A \cdot \cos(p \cdot t) &= 0 \\ -I_y \cdot B \cdot p^2 \cdot \sin(p \cdot t) + I_x \cdot D \cdot A \cdot p \cdot \sin(p \cdot t) + C_3 \cdot B \cdot \sin(p \cdot t) &= 0 \end{aligned}$$

Спростивши обидва рівняння матимемо:

$$I_y \cdot A \cdot p^2 - I_x \cdot D \cdot B \cdot p - C_3 \cdot A = 0$$

$$I_y \cdot B \cdot p^2 - I_x \cdot D \cdot A \cdot p - C_3 \cdot B = 0$$

Розв'язавши данні рівняння, отримаємо:

$$p' = \frac{I_x \cdot D \cdot B}{2 \cdot I_y \cdot A} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4 \cdot A^2 \cdot C_3 \cdot I_y}{I_x^2 \cdot D^2}} \right]$$

$$p'' = \frac{I_x \cdot D \cdot A}{2 \cdot I_y \cdot B} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4 \cdot B^2 \cdot C_3 \cdot I_y}{I_x^2 \cdot D^2}} \right]$$

#### Числовий розрахунок.

Досліджувалась лабораторна центрифуга РІСО 21, яка застосовується в медицині для швидкого приготування зразка. Нестабільність функціонування центрифуги погіршує отримані результати під час роботи.

Маси тіл, що розглядались для розрахунку:

$m_1 = 0,507$  кг,  $m_2 = 0,6$  кг,  $m_3 = 0,134$  кг,  $m_4 = 2,4$  кг, – маси ротора, анкера, валу та статора відповідно.

$x_1 = 0,128$  м,  $x_2 = 0,032$  м,  $x_3 = 0,055$  м,  $x_4 = 0,045$  м, відстані до центру мас ротора, анкера, валу та статора відповідно.

| Моменти інерції відносно головних осей |  |
|--|--|
| Ротор                                  | $I_{X1} = 0,001529 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$<br>$I_{Y1} = 0,000882 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ |
| Анкер                                  | $I_{X2} = 0,000425 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$<br>$I_{Y2} = 0,000093 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ |
| Вал                                    | $I_{X3} = 0,000003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$<br>$I_{Y3} = 0,000138 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ |
| Статор                                 | $I_{Y4} = 0,018 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$   |

$$C_3 = 6 \cdot 0,034^2 \cdot 33626,307 = 233,23$$

$$I_{Y1 \ 3B} = m_1 \cdot x_1^2 + I_{Y1} = 0,009188688 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_{Y2 \ 3B} = m_2 \cdot x_2^2 + I_{Y2} = 0,0007074 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_{Y3 \ 3B} = m_3 \cdot x_3^2 + I_{Y3} = 0,000543350 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_{Y4 \ 3B} = m_4 \cdot x_4^2 + I_{Y4} = 0,0228600 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_{Y \ 3B} = I_{Y1 \ 3B} + I_{Y2 \ 3B} + I_{Y3 \ 3B} + I_{Y4 \ 3B} = 0,033299438 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$I_{X \ 3B} = I_{X1 \ 3B} + I_{X2 \ 3B} + I_{X3 \ 3B} = 0,001957 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Траєкторія руху крайньої верхньої точки валу, на який насаджений ротор, описана наступним виразом  $\arccos(\cos(A \cdot \cos pt) \cdot \cos(B \cdot \sin pt))$ , графічно зображена у полярних координатах на Рис. 3.

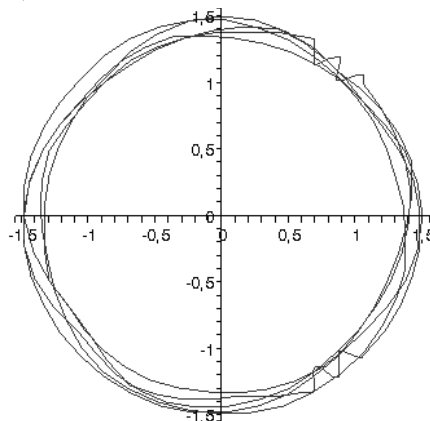


Рис. 3. Траєкторія руху верхньої точки валу

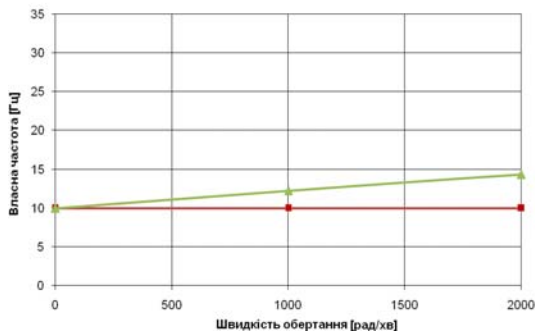
**Експериментальне дослідження.**

Експеримент поставлений в інституті механіки Отто-фон-Геріке Університету Магдебурга (Німеччина). Експериментально динамічні характеристики центрифуги визначались наступним чином: за допомогою двох лазерів LMS LASER VIBROMETER Optical Sensor визначались горизонтальні переміщення верхньої точки валу центрифуги при обертанні ротору на різних швидкостях обертання. Отримані данні оброблялись за допомогою спеціального програмного пакету LMS TestLab.

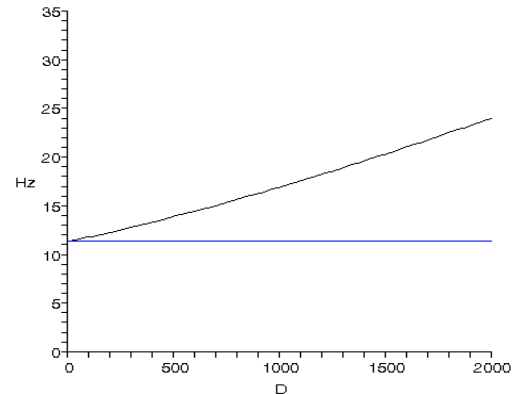
**Результат дослідження:**

P1=10,0 Гц  
P2=10,0 Гц

Діаграма Кемпбела

**Числовий результат:**

P1=11,36 Гц  
P2=11,35 Гц

**Висновки.**

В результаті побудована діаграма Кемпбелла, яка відображає залежності власних частот від швидкості обертання ротора, тобто вплив гіроскопічних ефектів на власні частоти, оскільки в динамічних системах власні частоти залежать від гіроскопічних ефектів, які викликані швидкістю обертання.

Розрахунковим шляхом при визначенні першої власної частоти найбільш близькі результати були отримані за допомогою моделі яка враховує ступені свободи системи обумовлені осьовою деформацією гумових опор, деформацією при зсуві гумових опор і обертанням центрифуги в результаті осьової деформації гумових опор.

**Список літератури.**

1. Диментберг Ф.М., Шаталов К.Т., Гусаров А.А. Колебания машин. М., Машиностроение, 1964. – 308с.
2. Павловский М.А., Путьята Т.В. Теоретическая механика. К., 1985. – 328с.
3. Н.В. Звиногородский, М.Я. Кушувль. Исследование вибраций быстроходных веретен. Изв. АН СССР, ОТН, №10, 1956.
4. Лурье А.И. Аналитическая механика. М., 1961. – 824с.
5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М., «Наука», 1974. – 431с.
6. Fischer, J., Strackeljan, J.: Some considerations of modelling internal friction in rotor shaft connections, Proceedings of 12th World Congress in Mechanism and Machine Science IFToMM 2007.
7. Fischer J., Strackeljan J.: Stability Analyses of High Speed lab centrifuges considering internal damping in rotor shafts, Technische Mechanik, Band 26, Heft 2, pp 131-147, 2006.
8. Fischer, J., Strackeljan, J.: FEM-Simulation and stability analyses of high speed rotor systems .7th IFToMM-Conference on Rotor Dynamics, Vienna, Austria, 2006.