

ТЕРМОДИНАМІЧНИЙ ПІДХІД ДО ОПИСАННЯ КІНЕТИКИ НАКОПИЧЕННЯ РОЗСІЯНИХ ПОШКОДЖЕНЬ В КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛАХ

В работе рассматривается и детализируется развитие основных положений термодинамики необратимых процессов относительно основополагающих уравнений кинетики накопления повреждений при упругопластическом деформировании в условиях сложного напряженного состояния.

In this paper constitutive and damage evolution equations for elastic-plastic deformation under complex stress state are developed on the irreversible thermodynamics theory.

Процес деформування є типовим термодинамічним процесом. В механіці твердого деформівного тіла для широкого класу задач термодинамічний підхід забезпечує необхідну точність розрахунків при застосуванні таких понять, як робота, кількість тепла, внутрішньої енергії тощо. Особливе значення термодинамічний підхід має при розгляді незворотних процесів деформації та руйнування.

Термодинамічна теорія незворотних процесів часто використовувалась як основа для уніфікованого формулювання визначальних співвідношень і рівнянь накопичення пошкоджень при пружно-пластичному деформуванні для конструкційних матеріалів [1-10]. Пошкоджуваність трактується як термодинамічний процес, що описується деякими спряженими параметрами, які разом з напруженнями і деформаціями задовольняють основним співвідношенням термодинаміки. Далі використовуються формалізм термодинамічних потенціалів і складаються балансові співвідношення термодинаміки та з умови існування зв'язку між термодинамічними силами і потоками, формально записуються співвідношення між напруженнями, деформаціями і параметром пошкоджуваності [6-10, 11].

Зміст першого закону термодинаміки полягає в твердженні про те, що при переході системи із заданого початкового в заданий кінцевий стан сума роботи, виконаної над системою, та теплоти, що підводиться до неї залишається постійною [12].

Таким чином, сума двох функціоналів, а саме – функціонала виконаної над системою роботи і функціонала підведеного до системи тепла, є функцією стану системи, що називається внутрішньою енергією. Внутрішня енергія змінюється під дією пружного деформування та теплового навантаження за рахунок зміни кінетичної та потенціальної енергії всіх молекул, в той час як при накопиченні пошкоджень збільшення внутрішньої енергії проходить лише за рахунок розривів зв'язків молекул. В фізичній точці матеріалу, у відповідності з термофлуктаційною природою механічного руйнування, завжди проходять два конкуруючих процеси: накопичення пошкоджень та зміцнення матеріалу. Перший процес характеризується розривом зв'язків між молекулами, інший - відновленням цих зв'язків. Використання висновку про термофлуктаційну природу механічного руйнування дозволяє в більшості випадків більш точно описати механізм накопичення пошкоджень.

Приріст внутрішньої енергії системи при виконанні над нею роботи δA та наданні системі нескінченно малої кількості теплоти δQ буде повним диференціалом

$$dU = \delta A + \delta Q \quad (1)$$

Застосуємо перший закон термодинаміки до процесу деформування. Відомо, що густина роботи напружень σ_{ij} на варіаціях малих деформацій ε_{ij} визначається наступним чином:

$$\delta A = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} . \quad (2)$$

Позначимо питому внутрішню енергію через U . Тоді приріст питомої внутрішньої енергії при переході від заданого стану до нескінченно близького стану деформації можна записати у вигляді

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{\partial U}{\partial T} \delta T . \quad (3)$$

З врахуванням цього перший закон термодинаміки можна записати у такому вигляді:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{\partial U}{\partial T} \delta T = \delta Q + \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} . \quad (4)$$

В подальшому кількість теплоти, отриманої тілом вважатимемо додатною. Якщо тіло переходить різними шляхами з початкового в кінцеве положення, то механічний еквівалент дії зовнішніх навантажень (в тому числі і теплових) матиме щоразу одне й те саме значення незалежно від траєкторії переходу. Запис першого закону термодинаміки у формі (4), зокрема, дозволяє зв'язати компоненти тензора напружень з компонентами тензора деформацій та абсолютною температурою у формі рівнянь стану з такою структурою:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{21}, \dots, \varepsilon_{33}, T). \quad (5)$$

Другий закон термодинаміки полягає в тому, що кількість теплоти, отримана при будь-якому зворотному процесі, завжди має інтегровані дільники і серед цих інтегрованих дільників виразу кількості тепла є дільник, що залежить тільки від температури системи.

Аналітично другий закон термодинаміки записують у вигляді:

$$dS' = \frac{\delta Q}{T}, \quad (6)$$

де S' - ентропія системи.

Класична термодинаміка також твердить, що у випадку незворотних процесів має місце нерівність:

$$dS' > \frac{\delta Q}{T}. \quad (7)$$

З першого та другого законів термодинаміки випливають важливі співвідношення, а саме якщо розділити вираз (4) на температуру T , отримаємо:

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial T} \delta T - \frac{1}{T} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}. \quad (8)$$

В силу другого закону термодинаміки $\delta Q/T$ повинно бути (для зворотних процесів) повним диференціалом [12]. Виходячи з цього можна записати:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{mn}} - \sigma_{mn} \right) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{mn}} \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \frac{1}{T}$$

З цих формул випливає

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T = \sigma_{ij} - T \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{pq}}. \quad (10)$$

Застосування поняття ентропії дає можливість зробити важливе формулювання другого закону термодинаміки. Можна знайти таку функцію параметрів, що визначають систему, що зміна цієї функції, що називається ентропією, в оборотних процесах дорівнює для кожної малої ділянки процесу відношенню кількості отриманого системою тепла до абсолютної температури джерела цього тепла. Для необоротних процесів це відношення менше зміни ентропії.

Застосування поняття ентропії у відповідності з узагальненим рівнянням Гіббса, дозволяє записати зміну внутрішньої енергії фізичної точки матеріалу наступним чином [13]:

$$dU = TdS + \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}. \quad (11)$$

Це рівняння справедливе у всіх частинах матеріалу. Перший член в правій частині рівняння характеризує зміну внутрішньої енергії, що зв'язана з припливом тепла, другий – з механічним навантаженням. Слід відмітити, що якщо в матеріалі накопичуються пошкодження, то цей процес обов'язково проходить зі збільшенням ентропії. При руйнуванні матеріалу ентропія досягне свого граничного значення. Для кожного матеріалу граничне значення ентропії буде різним, тому знання тільки абсолютного значення ентропії, яка виникла в наслідок накопичення пошкоджень в матеріалі, не буде достатнім для кількісної оцінки його пошкоджуваності. У зв'язку з цим, за основу визначення інтегральної пошкоджуваності взято відношення поточного значення ентропії до граничного [13-16]:

$$D = \frac{S_i}{S_R}. \quad (12)$$

Такий підхід дозволяє кількісно оцінити накопичення пошкоджень в матеріалі. Основною перевагою ентропії

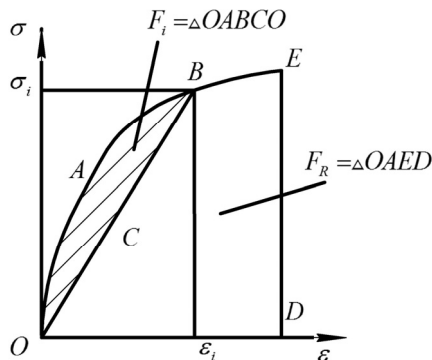


Рис. 1. Визначення пошкоджуваності по i -тій точці діаграми деформування

являється те, що це величина адіативна, і її необоротна частина однозначно характеризує міру необоротності процесів, що протікають в матеріалі.

В i -тий момент часу частина ентропії, що зв'язана з необоротними процесами дорівнює відношенню механічної роботи F_i , що йде на виникнення й накопичення пошкоджень до температури T :

$$S_i = \frac{F_i}{T}. \quad (13)$$

При $T = \text{const}$ гранична величина ентропії знаходиться як відношення механічної роботи руйнування F_R , що дорівнює площі під діаграмою деформування, до температури T . Тоді пошкоджуваність визначається:

$$D_i = \frac{F_i}{T} \frac{T}{F_R} = \frac{F_i}{F_R}. \quad (14)$$

Оскільки $T = \text{const}$ в якості пошкоджуваності в i -тий момент часу взято відношення поточної величини механічної роботи, що йде на виникнення і накопичення пошкоджень F_i (площа між діаграмою деформування $\sigma - \varepsilon$ та січним модулем ($\Delta OABCO$), до механічної роботи руйнування F_R (вся площа під діаграмою ($\Delta OABCO$)) (рис. 1)

Абу-Фарсахом [17-18] була запропонована модель накопичення розсіяних пошкоджень в якій величина пошкоджуваності розраховувалась через густину енергії деформацій (рис.2):

$$D = 1 - \sqrt{\frac{U_e}{U_s} + \frac{2(K(U_P) - BC(U_P)^C)}{[1 + \frac{U_s}{U_e}(U_S - 2U_e)(BC(U_P)^{C-1} - K)]}}, \quad (15)$$

де B , C та K – параметри матеріалу, що визначаються експериментально.

Розглянемо основні термодинамічні потенціали та їх застосування до процесу пружного деформування суцільного середовища. Якщо разом з тензорами напружень та деформацій і температурою в якості четвертої величини, що характеризує деформований стан тіла, прийняти ентропію, то можна побудувати чотири функції. Кожна з цих функцій може бути визначена двома з чотирьох змінних, які характеризують стан деформації. Дві інших змінних стану можуть бути отримані із цієї функції шляхом знаходження частинних похідних. Такі функції називаються основними термодинамічними потенціалами. Вирази для їх питомих величин можуть бути записані наступним чином [12, 19]:

$$\text{внутрішня енергія} - U = \int T dS + \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij},$$

$$\text{вільна енергія} - \psi = U - TS',$$

$$\text{термодинамічний потенціал Гіббса} - \Phi' = U - TS' - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij},$$

$$\text{теплова функція} - H = U - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}.$$

Якщо відомі термодинамічні потенціали, то легко можуть бути знайдені похідні термодинамічної функції, ентропія, абсолютна температура, тензор напружень. Наведемо рівняння стану для кожного термодинамічного потенціалу, а також співвідношення для знаходження вказаних похідних термодинамічних функцій.

Приймаючи в якості термодинамічного потенціалу внутрішню енергію, отримано таке рівняння стану:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{S'}. \quad (16)$$

Відповідно рівняння для визначення температури:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S'} \right)_{\varepsilon_{ij}}. \quad (17)$$

Беручи за термодинамічний потенціал вільну енергію ψ записано рівняння стану наступним чином:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_T. \quad (18)$$

Для визначення ентропії слід користуватись співвідношенням

$$S' = - \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{\varepsilon_{ij}}. \quad (19)$$

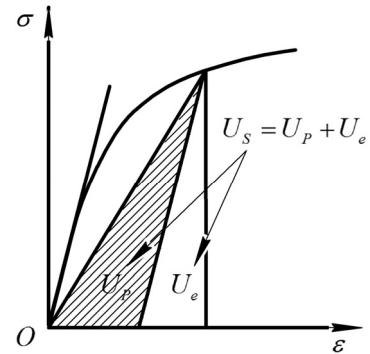


Рис. 2. Енергії деформацій на діаграмі деформування

Використовуючи теплову функцію, маємо таке рівняння стану

$$\varepsilon_{ij} = - \left(\frac{\partial H}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{S'} \quad (20)$$

При цьому температура визначатиметься співвідношенням

$$T = \left(\frac{\partial H}{\partial S'} \right)_{\sigma_{ij}} \quad (21)$$

Якщо потенціалом вибрано термодинамічний потенціал Гіббса, то рівняння стану буде таке

$$\varepsilon_{ij} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} \right)_T \quad (22)$$

Відповідно, ентропія дорівнюватиме

$$S' = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{\sigma_{ij}} \quad (23)$$

Вибір конкретного термодинамічного потенціалу залежить від тих умов, у яких проходить процес, який досліджується. Існує ряд зауважень [18] щодо вибору термодинамічного потенціалу для різних задач.

Визначивши всі змінні стану та асоційовані змінні, другий потенціал дасть кінетичні визначальні співвідношення для опису розвитку накопичення пошкоджень.

Сформульовано визначальні співвідношення та рівняння накопичення розсіяних пошкоджень для конструкційних матеріалів при пружно-пластичному деформуванні, що базуються на необоротній термодинамічній теорії. У відповідності з узагальненим рівнянням Гіббса отримано співвідношення для якісної оцінки пошкоджуваності через граничне значення ентропії.

Список літератури

1. Kattan, P. I. and G. Z. Voyiadjis. 1990. "A Coupled Theory of Damage Mechanics and Finite Strain Elasto-Plasticity I. Damage and Elastic Deformations," *Int. J. Engng. Sci.*, 28:421-435.
2. Voyiadjis, G. Z. and P. I. Kattan. 1990. "A Coupled Theory of Damage Mechanics and Finite Strain Elasto-Plasticity II. Damage and Finite Strain Plasticity," *Int. J. Engng. Sci.*, 28:505-524.
3. Бажанов В.Л. Термодинамические подходы к проблеме прочности. *Проблемы прочности* - № 4. 1981. С. 28-38.
4. Murakami, S. and K. Kamiya. 1997. "Constitutive and Damage Evolution Equations of Elastic-Brittle Materials Based on Irreversible Thermodynamics." *Int. J. Mech. Sci.*, 39:473-486.
5. Hayakawa, K., S. Murakami and Y. Liu. "Irreversible Thermodynamics Theory for Elastic-Damage Materials," *Euro. J. Mech. A/Solids*.
6. Rice, J. R. 1975. "Continuum Mechanics and Thermodynamics of Plasticity in Relation to Microscale Deformation Mechanics," in *Constitutive Equations in Plasticity*, A. S. Argon, ed., The MIT Press, Cambridge, pp. 23-79.
7. Murakami, S., K. Hayakawa and Y. Liu. "Damage Evolution and Damage Surface of Elastic-Plastic-Damage Materials Under Multiaxial Loading," *Int. J. Damage Mech.*
8. Lemaitre J. *A Course on Damage Mechanics*, second ed., Springer, 1996.
9. Murakami, S. 1988. "Mechanical Modeling of Material Damage," *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, 55:280-286.
10. Ju, J. W. 1989. "On Energy Based Coupled Elastoplastic Damage Theories: Constitutive Modeling and Computational Aspect," *Int. J. Solids Struct.*, 27:803-833.
11. Hansen, N. R. and H. L. Schreyer. 1994. "A Thermodynamically Consistent Framework for Theories of Elastoplasticity Coupled with Damage," *Int. J. Solids Struct.*, 31:359—389
12. Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. М.: Мир, 1966, с.136
13. Дзюба В.С. Термодинамический подход к оценке повреждаемости армированных пластиков.// Институт проблем прочности АН УРСР.- Киев 1984г. 56с. Г. А.
14. Дзюба В.С. Прочность и деформативность армированных пластиков с учетом их повреждаемости. Сообщение 2. *Проблемы прочности* - № 11. 1980. С. 92-95.
15. Дзюба В.С. Прочность и деформативность армированных пластиков с учетом их повреждаемости. Сообщение 1. *Проблемы прочности* - № 10. 1979. С. 38-52.
16. Дзюба В.С. Прочность и деформативность армированных пластиков с учетом их повреждаемости. Сообщение 3. *Проблемы прочности* - № 11. 1980. С. 96-99.
17. Abu-farsakh, S. A. Barakat and F.H. Abed. A Macromechanical Damage Model of Fibrous Laminated Composites. *Applied Composite Materials* 6: 99-119, 1999.
18. Abu-Farsakh, G., 'New Material Models for Nonlinear Stress-Strain Behavior of Composite Materials', *Composites* 20, 1989, 349-360.
19. Гольденблат И.И., Бажанов В.Л., Копнов В.А. Длительная прочность в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1977. – 247 с.