УДК 539.374.001.8.621.7 – 111

**Чигиринский В.В., д.т.н., проф., В.Д. Обдул, к.т.н., доц., Д.В. Обдул, инженер, Е.А. Диброва, студент**
**ЗНТУ, г. Запорожье**

# РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОСАДКИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

*Показано аналітичне рішення плоскої осесиметричної задачі теорії пластичності. Поля напруги описуються гармонійними координатними функціями. Параметри рішення підтверджуються тестовими розрахунками в рамках єдиної математичної моделі.*
*Ключові слова: узагальнена модель, поля напруги, гармонійна функція.*

*The analytical decision of flat axisymmetrical task of theory of plasticity is rotined. The Fields of tensions are described harmonic co-ordinate functions. The parameters of decision are confirmed test calculations within the framework of single mathematical model.*
*Keywords: generalized model, fields of tensions, harmonic function.*

## 1. Введение

Осесимметричная задача относится к объемным задачам теории пластичности. Это вносит достаточную неопределенность в постановку и ее решение аналитическими методами.

Во многих случаях решение может упрощено, если перейти к плоской задаче. В ряде работ [1]…[4] получены данные решения в замкнутом виде. Обоснование такой постановки для осесимметричного напряженно-деформированного состояния можно найти в работе [5].

## 2. Постановка задачи

Система уравнений теории пластичности для осесимметричного плоскодеформированного состояния [5] уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho}+\frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z}+\frac{\sigma_\rho-\sigma_\theta}{\rho}=0\ ;\ \frac{\partial\tau_{z\rho}}{\partial\rho}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{z\rho}}{\rho}=0\ ; \tag{1}$$

условие пластичности для плоской задачи

$$\left(\sigma_\rho-\sigma_z\right)^2+4\tau_{z\rho}^2=4k^2\ ; \tag{2}$$

уравнение связи

$$\frac{\sigma_\rho-\sigma_z}{2\tau_{z\rho}}=\frac{\dot\xi_\rho-\dot\xi_z}{\dot\gamma_{z\rho}}\ ; \tag{3}$$

условие несжимаемости

$$\dot\xi_\rho+\dot\xi_z=0\ ; \tag{4}$$

уравнение неразрывности скоростей деформаций для осесимметричной плоской задачи

$$\frac{\partial^2\xi_\rho}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\xi_z}{\partial\rho^2}=\frac{\partial^2\dot\gamma_{z\rho}}{\partial z\partial\rho}\ . \tag{5}$$

граничные условия принимаются в виде

$$\tau_n=-k\cdot sin\left(A\Phi-2\alpha\right) \tag{6}$$

где $\sigma_\rho,\sigma_z,\sigma_\theta$ - нормальные напряжения;

$\tau_{z\rho}$ - касательное напряжение;

$k$ – сопротивление пластического сдвига;

$\xi_\rho$, $\xi_z$ -линейные скорости деформаций;

$\dot\gamma_{z\rho}$ -сдвиговая скорость деформации;

$A$ - постоянный коэффициент, характеризующий напряженное состояние;

$\Phi$ - неизвестная координатная функция z, ρ ;

$\alpha$ - текущий угол наклона контактной площадки.

Имеем шесть уравнений (1)…(5) и семь неизвестных: $\sigma_\rho,\sigma_z,\sigma_\theta$, $\tau_{\rho z}$, $\xi_\rho$, $\xi_z$, $\dot\gamma_{z\rho}$. Выражение (6) позволяет связать неизвестные величины $\tau_{z\rho}$ и $k$, однако появляется неопределенная функция $A\Phi$.

Анализ показывает, что в постановке (1)…(6) задача может быть решена аналитически для напряженного и деформированного состояния.

**3. Решение задачи**

Принимается плоская задача, т.е. $\sigma_\theta = \frac{\sigma_\rho + \sigma_z}{2}$,

тогда $\frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = \frac{\sigma_\rho - \sigma_z}{2\rho}$.

При плоском решении возможны варианты $\sigma_\rho = -\sigma_z$.

Уравнения равновесия принимают вид

$$\frac{\partial(\rho\sigma_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial(\rho\tau_{\rho z})}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial(\rho\tau_{z\rho})}{\partial\rho} + \frac{\partial(\rho\sigma_z)}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

Дифференцируя (7) и вычисляя, получим обобщенное уравнение равновесия

$$\frac{\partial^2(\rho\tau_{z\rho})}{\partial\rho^2} - \frac{\partial^2(\rho\tau_{\rho z})}{\partial z^2} = \pm 2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\rho} k \cdot \rho \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\tau_{\rho z}}{k}\right)^2} \tag{8}$$

Неизвестной функцией (8) является касательное напряжение $\tau_{\rho z}$.

В системе (1)…(6) последние уравнения не используются, а принимаются для общей осадки возможностей плоского осесимметричного решения.

Для удовлетворения граничных условий (6) в напряжениях необходимо принять

$$\tau_{\rho z} = k \cdot sinAi \tag{9}$$

Замена (9) позволяет линеаризировать (8) относительно *k*. Аналитическое решение(8) в дальнейшем имеет место, если используем фундаментальную подстановку

$$k = C_\sigma \cdot \exp\theta, \tag{10}$$

где $C_\sigma$ - постоянная, характеризующая напряженное состояние среды;

$\theta$ - неизвестная координатная функция $\rho$ ,z .

Подставляя (9) и (10) в (8) получим после преобразований

$$\begin{gathered}\left[2\theta_\rho + \rho\cdot\theta_{\rho\rho} + \rho(\theta_\rho + A\Phi_z)^2 - \rho\cdot\theta_{zz} - \rho(\theta_z - A\Phi_\rho)^2 + 2A\Phi_z + 2\rho\cdot A\Phi_{\rho z}\right]\cdot sin\, A\Phi + \\ \left[2\rho\theta_\rho(A\Phi_\rho - \theta_z) - 2\rho\cdot A\Phi_z(\theta_z - A\Phi_\rho) + 2(A\Phi_\rho - \theta_z) + \rho(A\Phi_{\rho\rho} - A\Phi_{zz}) - 2\rho\theta_{\rho z}\right]\cdot cosAo \ = 0\end{gathered} \tag{11}$$

где $\theta_\rho$, $\theta_z$, $A\Phi_\rho$, $A\Phi_z$ – частные производные от функций $\theta$ и АФ по координатам ρ и z.

Примечательным является тот факт, что в операторах при тригонометрических функциях появились одинаковые скобки, равенство нулю которых значительно упрощает уравнение (11),т. е. $\theta_\rho + A\Phi_z = 0; \theta_z - A\Phi_\rho = 0$.

отсюда
$$\theta_\rho = -A\Phi_z; \theta_z = A\Phi_\rho. \tag{12}$$

тогда
$$\left[\rho\theta_{\rho\rho} - \rho\cdot\theta_{zz} + 2(\theta_\rho + A\Phi_z) + 2\rho A\Phi_{\rho z}\right]\cdot\sin A\Phi + \left[\rho(A\Phi_{\rho\rho} - A\Phi_{zz}) - 2\rho\theta_{\rho z}\right]\cos A\Phi = 0. \tag{13}$$

Соотношения (12)- это соотношения Коши-Римана.

Из (12) следует, что функции $A\Phi$ и $\theta$ гармонические, удовлетворяющие уравнению Лапласа.

$$\theta_{\rho\rho} + \theta_{zz} = 0; A\Phi_{\rho\rho} + A\Phi_{zz} = 0.$$

Таким образом, имеем дифференциальные уравнения, определяющие неизвестные координатные функции $A\Phi$ и $\theta$.

Дифференцируя (12) соответствующим образом получим соотношения

$$\theta_{\rho\rho} = -A\Phi_{z\rho}; \theta_{zz} = A\Phi_{\rho z}\ ;\ A\Phi_{\rho\rho} = \theta_{z\rho}; A\Phi_{zz} = -\theta_{\rho z}.$$

Подставляя полученные соотношения в (13) получим тождество, следовательно, функция

$$\tau_{\rho z} = C\sigma\cdot\exp\theta\cdot\sin A\Phi \tag{14}$$

при $\theta_\rho = -A\Phi_z$ $\qquad \theta_z = A\Phi_\rho$

есть решение обобщенного уравнения равновесия (8)

Подставляя (14) в уравнение равновесия (7) и интегрируя, получим

$$\sigma_\rho = C\sigma\cdot\exp\theta\cdot\cos A\Phi + C\sigma\cdot\frac{1}{\rho}\cdot I_3 + \sigma_0 + f(z); \tag{15}$$

$$\sigma_z = -C\sigma\cdot\exp\theta\cdot\cos A\Phi + C\sigma\cdot\frac{1}{\rho}\cdot I_4 + \sigma_0 + f(\rho);$$

где

$$I_3 = \int \rho \cdot C_\sigma \cdot \theta_z \cdot \exp\theta \cdot \sin A\Phi d\rho + \int \rho \cdot C_\sigma \cdot \theta_z \cdot \exp\theta \cdot A\Phi_z \cdot \cos A\Phi d\rho \ ;$$

$$I_4 = \int C_\sigma \cdot \theta_z \cdot \exp\theta \cdot \sin A\Phi dz + \int \rho \cdot C_\sigma \cdot \theta_\rho \cdot \exp\theta \cdot A\Phi \cdot \cos A\Phi dz + \int \rho \cdot C_\sigma \cdot \exp\theta \cdot A\Phi_\rho \cdot \cos A\Phi dz \ .$$

Можно показать, что они равны.

С учетом условия пластичности (2) и упрощающих возможностей, принимаем

$$\sigma_0 = -2C\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos A\Phi - C\sigma \cdot \frac{1}{\rho} \cdot I_3 \ .$$

В итоге (15) можно записать в виде

$$\sigma_\rho = -C\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos A\Phi + K_0 \ ; \qquad (16)$$

$$\sigma_z = -3C\sigma \cdot \exp\theta \cdot \cos A\Phi + K_0 \ .$$

Решая уравнения Лапласа, используя соотношения Коши-Римана, функции $A\Phi$ и $\theta$ имеют вид

$$A\Phi = AA_6 \cdot z \cdot \rho$$

$$\theta = -\frac{1}{2}(\rho^2 - z^2) \cdot AA_6 \ , \qquad (17)$$

где $A_6$ - коэффициент, определяемый граничными условиями.

Постоянные $A\ A_6$ запишутся $AA_6 = \dfrac{2A\Phi_0}{h \cdot R}$, (18)

где $A\Phi_0$ - постоянная величина, определяемая постоянным трением.

$$A\Phi_0 = arctg[f(1-f)]$$

$$\theta_0 = -\frac{1}{2} AA_6 (R^2 - \frac{h^2}{4}) \ , \qquad (19)$$

где: $f$-коэффициент трения; $R$- радиус заготовки; $h$- толщина заготовки.

Подставляя формулы (18),(19) в (16)и переходя к безмерным величинам, получим

$$\frac{\sigma_\rho}{K_0} = (\frac{\exp\theta \cdot cos\ A\Phi}{\exp\theta_0 \cdot cos\ A\Phi_0} - 1) = (\frac{\exp(\theta - \theta_0)}{cos\ A\Phi_0} \cdot cosAo\ - 1),$$

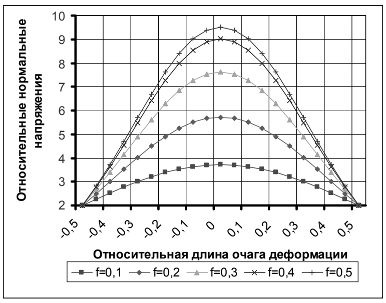
$$\frac{\sigma_z}{K_0} = -(3 \cdot \frac{\exp\theta \cdot cos\ A\Phi}{\exp\theta_0 \cdot cos\ A\Phi_0} - 1) = -(3 \cdot \frac{\exp(\theta - \theta_0)}{cos\ A\Phi_0} \cdot cosAo\ - 1), \qquad (20)$$

$$\frac{\tau_{xy}}{K_0} = \frac{\exp\theta \cdot sinAi}{\exp\theta_0 \cdot cos\ A\Phi_0} = \frac{\exp(\theta - \theta_0)}{cos\ A\Phi_0} \cdot sinAi \ .$$

## 4. Анализ полученных результатов

Последние выражения были просчитаны для разных значений коэффициентов трения и фактора формы $\frac{d}{h}$ при осадке цилиндрической заготовки. Поля напряжений описываются едиными формулами без разбивки очага деформации на отдельные зоны со своими контактными законами трения. На рис.1 и 2 представлены нормальные и касательные контактные напряжения. В каждой точке очага деформации напряженное состояние реагирует на последние факторы, что качественно и количественно соответствует известным тестовым решениям [6].

Полученные подходы можно использовать и для других процессов обработки металлов давлением, изменив при этом заданные граничные условия.



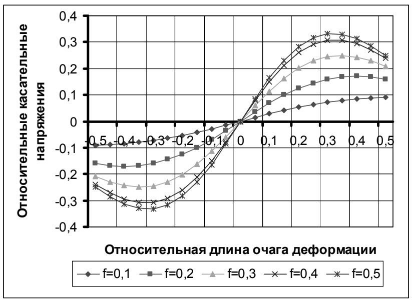




**Рис.1. Распределение контактных напряжений при осадке цилиндрической заготовки $\frac{d}{h}$=10, $f$=0,1…0,5**

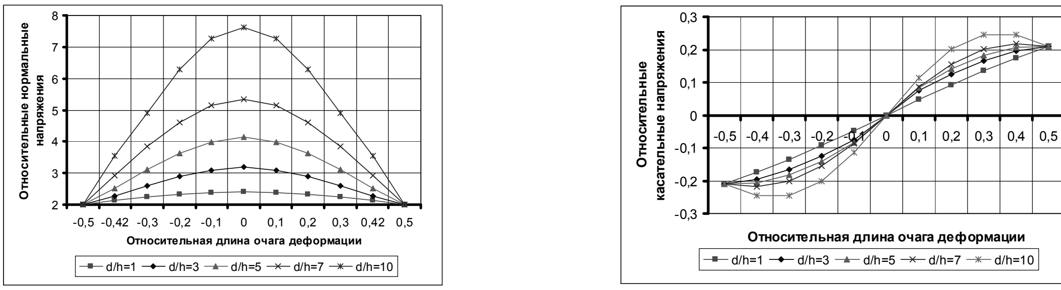



**Рис.2. Распределение контактных напряжений при осадке цилиндрической заготовки $f$ =0,3 , $\frac{d}{h}$ =1,3,5,7,10**

## Выводы

1. Аналитически решена осесимметричная плоская задача теории пластичности с использованием метода гармонических функций.
2. Анализ результатов решения показал, что качественно и количественно контактные напряжения соответствуют известным тестовым литературным данным.
3. Поле напряжений в очаге деформации описываются едиными аналитическими выражениями.

## Список литературы

1.Чигиринский В.В. Некоторые особенности теории пластичности применительно к процессам ОМД// Тр. науч.- техн. конф. «Теория и технология процессов пластической деформации-96».-М.: МИСиС , 1997.-С.568-572.

2. V.V.Chygyryns'kyy, I.Mamuzic, F.Vodopiec, I.V.Gordienco. The Influence of the Temperature Factor on Deformability of the Plastic Medium // Metalurgija. Zagreb.-2006.-vol.45, br. 2. -P.115-118.

3. Чигиринский В.В. Исследование влияния пространственных параметров деформированного объема на сопротивление пластической деформации сдвига// Теория и практика металлургии.-1997.-№3.-С.31-32.

4.Чигиринский В.В. Аналитическое определение напряжений и скоростей деформаций реального очага деформации применительно к процессам обработки металлов давлением// Збірник наук. праць «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій».-Днепропетровск: Навчальна книга, 1998, Т.3.-С.130-145.

5.Чигиринский В.В. Плоская задача теории пластичности в цилиндрических координатах// «Прогрессивные технологии пластической деформации».- М.: МИСиС, 2009.-С.345-351.

6.Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением.- М.: Машиностроение, 1977.-422 с.