УДК 621.83

А.В. Явтушенко[1], к.т.н., Б.П. Середа, д.т.н.[2], Т.А. Васильченко[2], А.В. Глебенко[1]
1.-Запорожский национальный технический университет
2.-Запорожская государственная инженерная академия

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЛАНЕТАРНОГО ПРИВОДА КРИВОШИПНЫХ ПРЕССОВ

В статті представлена математична модель планетарного приводу кривошипних пресів. Рівняння руху інерційних елементів моделі є диференційними рівняннями другого порядку зі складною нелінійною правою частиною. Аналітичний розв'язок таких рівнянь можливий лише за допомогою спеціальних методів рішення нелінійних рівнянь, або при введенні деяких допущень.

The paper presented a mathematical model of the planetary drive crank presses. Equation of motion of the inertial model elements is a second order differential equations with complex nonlinear right-hand side. The analytical solution of these equations is possible only by using special methods for solving nonlinear equations, or when entering certain assumptions,

В приводе кривошипных прессов используются планетарные механизмы, которые выполняют двойную роль [1]. С одной стороны такие механизмы являются обычными редуцирующими передачами и исключают необходимость использования одной или нескольких цилиндрических зубчатых передач, а с другой стороны, они являются составной частью системы включения.

Работа любого планетарного механизма независимо от его типа в приводе кривошипного пресса разделяется на ряд последовательных периодов его движения.

В первом периоде происходит холостое движение ведущего звена a и звена b при неподвижном водиле h [2]. Во втором периоде, когда происходит включение привода на движение главного исполнительного механизма (ГИМа), в движении находятся все звенья редуктора. Период длится до момента полной остановки звена b. В третьем периоде при неподвижном звене b происходит ход ГИМа, и соответственно вращаются центральное колесо a и водило h. Четвертый период характеризуется одновременным движением всех звеньев и соответствует процессу остановки ГИМа. После остановки водила весь цикл работы повторяется. В течение всех других периодов работы КПМ привод с планетарным редуктором принципиально не отличается от обычного привода с фрикционной муфтой.

Наибольший интерес представляют 2 и 4 периоды включения и остановки механизма, когда в движении участвуют все звенья. Именно в эти периоды решаются основные динамические задачи, определяющие кинематические, силовые и энергетические характеристики привода, его работоспособность и эффективность. Длительность затормаживания соответствующего звена определяет время включения или остановки пресса. Расход энергии на включение и остановку привода определяет суммарный расход энергии на включение пресса. При ограничении длительности процесса включения определяются необходимые тормозные моменты.

Расчетная динамическая модель планетарного привода для указанных задач представляет собой трехмассовую динамическую модель с сосредоточенными инерционными элементами, соединенными безинерционными жесткими связями и нагруженными внешними крутящими моментами [2]. Угловые положения основных звеньев механизма определяются углами поворотов звеньев относительно собственных осей φ_a, φ_b, φ_h. Координаты звеньев связаны кинематическим уравнением связи

$$\varphi_a = \varphi_b i_{ab}^h + \varphi_h i_{ah}^b, \tag{1}$$

где i_{ab}^h, i_{ah}^b – передаточное отношение между двумя звеньями, указанными в нижнем индексе при остановленном третьем звене, указанном в верхнем индексе.

Легко показать, что для любых перестановок символов A, B, C справедливы соотношения

$$i_{AB}^C = \frac{1}{i_{BA}^C},\ i_{AB}^C = 1 - i_{AC}^B,\ 1 - i_{AB}^C - i_{AC}^B = 0.$$

Для планетарного механизма типа A передаточное отношение суть

$$i_{ab}^h = \frac{r_b}{r_a}, \tag{2}$$

где r_a, r_b – соответственно, радиусы делительных окружностей зубчатых колес a и b.

В первом приближении моменты сил сопротивления вращению соответствующих звеньев M_{ca}, M_{cb} и M_{ch} принимаются постоянными.

Движущий момент электродвигателя $M_д$ может быть аппроксимирован параболической зависимостью

$$M_д = \frac{2M_k}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}},$$

где $M_д$ – критический момент электродвигателя;
s, s_k – текущее и критическое скольжение электродвигателя.

В период холостого вращения привода при незначительных нагрузках (s_k>>s) движущий момент может быть аппроксимирован линейной зависимостью [3]

$$M_{\partial} = \frac{1{,}39 M_k s}{s_k} \qquad (3)$$

Моменты M_{tb}, M_{th} являются тормозными моментами, которые обеспечивают остановку звена b или звена h. Изменение текущего момента трения M_t в дисковом фрикционном узле происходит по сложному закону, математическое описание которого достаточно сложное и учитывает большое количество конструктивных параметров. С достаточной точностью этот момент может быть аппроксимирован степенной зависимостью [3]

$$M_t = Bt^z ,$$

где $B = \dfrac{M_{tc}}{t_c^z}$ – постоянный коэффициент;

M_{tc} – момент сил трения, развиваемый в конце процесса включения;

t_c – время выравнивания относительных угловых скоростей ведущей и ведомой части привода;

z – показатель степенной функции изменения момента трения.

Основная сложность использования такой степенной аппроксимации состоит в том, что момент и длительность времени выравнивания скоростей взаимосвязаны, поэтому одна величина может быть определена, если задана вторая.

В таком случае удобнее использовать экспоненциальную аппроксимацию вида [4]

– при включении фрикционного узла

$$M_t = M_p\left(1 - e^{-\alpha t}\right); \qquad (4)$$

– при выключении фрикционного узла

$$M_t = M_p e^{-\beta t} \qquad (5)$$

Здесь означено:

M_p – расчетный момент в узле, т.е. наибольший момент при полном включении;

α, β – соответственно, коэффициент интенсивности включения или отключения фрикционного дискового узла.

В начальный момент работы привода, когда начинается процесс включения, при постоянных значениях моментов сил сопротивления M_{ca} и M_{cb} скорость вращения φ'_{an0} звена a, а, следовательно, и звена b будут постоянны. Если длительность паузы между двумя ходами ГИМа достаточна для восстановления угловой скорости ведущего звена после предыдущего хода, то скорость φ'_{an0} есть скорость холостого вращения ведущего звена a. Принимая линейную аппроксимацию момента электродвигателя (2), из уравнения $M_{\partial} = M_{ca} + M_{cb} i_{ba}^h$ легко определить

$$\varphi'_{an0} = \varphi'_{ax} = \varphi'_{ac}\left[1 - \frac{s_k}{1{,}39 M_k}\left(M_{ca} + M_{cb} i_{ba}^h\right)\right] \qquad (6)$$

Скорость φ'_{ac} есть синхронная скорость ведущего звена a.

Если процесс включения начинается до момента полного восстановления угловой скорости ведущего звена, начальная скорость φ'_{an0} есть скорость в момент окончания четвертого периода движения привода (см. далее).

Передаточное отношение i_{ba}^h представляет собой передаточное отношение между колесами b и a при остановленном водиле h

$$i_{ba}^h = \frac{r_a}{r_b} .$$

В период включения привода под действием тормозного момента M_{tb} начинается остановка промежуточного колеса b и разгон водила h, которое было заторможено моментом M_{th}.

Изменение тормозного момента M_{tb} определяется по формуле (4), а момента – формулой (5).

Уравнения движения системы записываются в виде

$$\begin{aligned} J_a \varphi''_a &= M_{\ddot{a}} - M_{ca} - R_{ag} r_a; \\ J_b \varphi''_b &= -M_{tb} - M_{cb} + R_{bg} r_b; \\ J_h \varphi''_h &= -M_{th} - M_{ch} + R_{hg} rh_a , \end{aligned} \qquad (7)$$

где r_h – радиус оси расположения сателлитов на водиле $r_h = \dfrac{r_a + r_b}{2}$.

R_{ag}, R_{bg}, R_{hg} – реакции в зубчатых зацеплениях, действующие на колеса a и b, и реакция, действующая на водило со стороны сателлитов. Из условия статического равновесия следует, что $R_{ag} = R_{bg} = 0{,}5 R_{hg}$.

Исключая реакции R_{ag}, R_{bg}, R_{hg} , после несложных преобразований система (7) сводится к каноническому виду

$$\begin{aligned}
\varphi_a'' &= a_a\left(M_{\ddot{a}} - M_{ca}\right) + a_b\left(M_{cb} + M_{tb}\right) + a_h\left(M_{ch} + M_{th}\right);\\
\varphi_b'' &= b_a\left(M_{\ddot{a}} - M_{ca}\right) + b_b\left(M_{cb} + M_{tb}\right) + b_h\left(M_{ch} + M_{th}\right);\\
\varphi_h'' &= h_a\left(M_{\ddot{a}} - M_{ca}\right) + h_b\left(M_{cb} + M_{tb}\right) + h_h\left(M_{ch} + M_{th}\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Коэффициенты при внешних моментах определяются по формулам

$$a_a = \frac{j_{\ddot{i}} + j_{\hat{i}}}{J_a j},\quad a_b = -\frac{j_{\ddot{i}}}{J_a jp},\quad a_h = -\frac{j_{\hat{i}}}{J_a j\left(1+p\right)},$$

$$b_a = -a_b = \frac{j_{\ddot{i}}}{J_a jp},\quad b_b = -\frac{1+j_{\ddot{i}}}{J_a jp^2},\quad b_h = \frac{1}{J_a jp\left(1+p\right)},$$

$$h_a = -a_h = \frac{j_{\hat{i}}}{J_a j\left(1+p\right)},\quad h_b = b_h = \frac{1}{J_a jp\left(1+p\right)},\quad h_h = -\frac{1+j_{\hat{i}}}{J_a j\left(1+p\right)^2}.$$

Здесь обозначено:

$p = -i_{ab}^{h}$ – кинематический параметр планетарного механизма A;

j_o – относительный момент инерции промежуточного колеса при неподвижном водиле h

$$j_{\hat{i}} = \frac{J_b}{J_a p^2};$$

j_n – относительный момент инерции водила при неподвижном промежуточном колесе b

$$j_{\ddot{i}} = \frac{J_h}{J_a\left(1+p\right)^2}.$$

$j = j_{\ddot{i}} + j_{\hat{i}} + j_{\ddot{i}}\,j_{\hat{i}}$ – относительный общий момент инерции разгоняемых масс.

Начальными условиями системы уравнений (8) являются конечные условия предыдущего периода.

Очевидно, что при $t = 0$ $\varphi_h' = 0,\ \varphi_a' = \varphi_{an0}',\ \varphi_b' = \varphi_{bn0}' = \varphi_{an0}' i_{ba}^{h}$.

Процесс включения заканчивается в период остановки колеса b. Скорости ведущего звена a и водила h в этот момент являются начальными скоростями для расчета последующего периода, т.е.

При остановке привода происходит затормаживание водила h, соответственно, разгон промежуточного колеса b. Изменение тормозного момента M_{tb} определяется по формуле (5), а момента – формулой (4). Движение системы описывается той же системой дифференциальных уравнений (7), но при других начальных условиях. В общем случае остановка привода может начинаться в любом положении главного вала. Если остановка производится в крайнем верхнем положении ползуна, то начальными условиями являются кинематические характеристики, соответствующие окончанию холостого хода ползуна вверх. Если же остановка производится в промежуточном положении ГИМа, то начальными условиями являются характеристики, соответствующие этому моменту.

Очевидно, что при остановке ГИМа в крайнем верхнем положении происходит наибольший расход энергии на разгон промежуточного колеса и, соответственно длительность процесса остановки наибольшая, поэтому расчет привода необходимо производить по этому периоду. В таком случае начальные условия системы уравнений запишутся в виде $t = 0$ $\varphi_b' = 0,\ \varphi_a' = \varphi_{ao0}',\ \varphi_h' = \varphi_{h\ddot{i}o}' = \varphi_{ao0}' i_{ha}^{b}$. Угловая скорость φ_{ao0}' есть скорость ведущего звена a в конце периода обратного холостого хода ГИМа. Передаточное отношение i_{ha}^{b} есть передаточное отношение между ведущим колесом a и водилом h при остановленном промежуточном колесе b. Из уравнения связи (1) легко определить,

$$i_{ha}^{b} = \frac{1}{1 - i_{ab}^{h}}.$$

Расчет процесса остановки длится до момента полной остановки водила, т.е. до момента, когда $\varphi_h' = 0$.

Важно отметить, что в рассматриваемые периоды движения привод представляет собой систему с двумя степенями свободы и для ее описания достаточно двух уравнений системы дифференциальных уравнений, т.к. скорость третьего звена можно определить с помощью кинематического уравнения связи.

Математические модели привода в первом и третьем периодах работы привода при остановленном одном из звеньев планетарного механизма являются частными случаями общей модели.

Так, в первом периоде движения, когда остановлено водило, кинетическая энергия системы будет равна

$$T^h = \frac{1}{2}\left(J_a\varphi_a'^2 + J_b\varphi_b'^2\right) = \frac{J_a\varphi_a'^2}{2}\left(1 + j_o\right).$$

Используя уравнения Лагранжа II-го порядка, несложно показать, что уравнение движения ведущего звена запишется в виде

$$\varphi_a'' = a_a^h\left(M_{\ddot{a}} - M_{ca}\right) + a_b^h M_{cb} \tag{9}$$

Коэффициенты a_a^h и a_b^h равны

$$a_a^h = \frac{1}{J_a\left(1 + j_{\hat{i}}\right)},\quad a_b^h = -\frac{1}{J_a\left(1 + j_{\hat{i}}\right)p}.$$

Скорость ведомого звена, в данном случае наружного колеса *b*, будет равна $\varphi'_b = i^h_{ba}\varphi'_a$. Начальные условия уравнения (9) будут

$$t=0 \quad \varphi'_h = 0,\ \varphi'_a = \varphi'_{aoo},\ \varphi'_b = \varphi'_{boo} = \varphi'_{aoo} i^h_{ba}.$$

Угловая скорость $\varphi'_{a\hat{\imath}\hat{e}}$ есть текущая скорость ведущего звена после остановки водила. Процесс расчета длится или до полного восстановления скорости ведущего звена до величины $\varphi'_{a\ddot{\imath}0}$, или до начала следующего цикла работы пресса. В последнем случае конечная скорость ведущего звена будет начальным значением скорости при расчете процесса пуска.

В третьем периоде движения, когда остановлено наружное колесо *b*, кинетическая энергия системы составляет

$$T^b = \frac{1}{2}\left(J_a\varphi'^2_a + J_h\varphi'^2_h\right) = \frac{J_a\varphi'^2_a}{2}\left(1 + j_{\ddot{\imath}}\right).$$

Уравнение движения ведущего звена будет

$$\varphi''_a = a^b_a\left(M_{\ddot{a}} - M_{ca}\right) + a^b_h M_{ch} \tag{10}$$

Коэффициенты a^b_a и a^b_h равны

$$a^b_a = \frac{1}{J_a\left(1 + j_{\ddot{\imath}}\right)}, \quad a^b_h = -\frac{1}{J_a\left(1 + j_g\right)\left(1 + p\right)}.$$

Начальные условия уравнения (10) суть условия окончания предыдущего периода

$$t=0 \quad \varphi'_b = 0,\ \varphi'_a = \varphi'_{ann},\ \varphi'_h = \varphi'_{hnn} = \varphi'_{ann} i^b_{ha}.$$

Угловая скорость φ'_{ann} есть скорость ведущего звена в момент окончания процесса включения привода.

Таким образом, совокупность системы дифференциальных уравнений (8) или уравнений (9) и (10) движения основных звеньев, совместно с начальными условиями и условиями окончания расчетов периодов движения, а также аналитические зависимости для расчета движущего момента электродвигателя (2)-(3) и тормозных моментов (4)-(5) является обобщенной математической моделью планетарного привода кривошипного пресса.

Уравнения движения инерционных элементов динамической модели планетарного привода являются дифференциальными уравнениями второго порядка (относительно угловых перемещений) со сложной нелинейной правой частью. Решение системы возможно или одним из численных методов или специальными методами решения нелинейных уравнений.

Список литературы

1. Явтушенко А.В., Руденко А.В., Рыбиник В.А. Совершенствование систем включения кривошипных кузнечно-прессовых машин. – Киев: Знание, 1980. – 24 с.
2. Явтушенко А.В., Глебенко А.В., Васильченко Т.А., Видмич С.С. Динамическая модель планетарного привода кривошипных прессов. Вісник Кременчуцького державного технічного університету ім.. М. Остроградського. – Кременчук, КДТУ, 2009. – Вип.6/2009 (59, частина 1). С. 44-48.
3. Власов В.И. Системы включения кривошипних прессов.- М.:Машиностроение.-1969-272с.
4. Живов Л.И., Клеванский Н.Н.Применение ЭЦВМ для расчетов кузнечно-штамповочных машин.-«Вища школа», 1974.-64с.